有限次元線形モデルを用いる最適同定法

河 注 植*・古 田 勝 久**

* 東京工業大学大学院 東京都目黒区大岡山 2-12-1

** 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

(昭和 46 年 5 月 25 日 受付)

An Optimal Identification Method Using a Finite Dimensional Linear Model

Joo Shik HA* and Katsuhisa FURUTA**

(* Graduate School, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo)
(** Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo)

(Received May 25, 1971)

The identification can be considered as a problem to find the optimal model in a set of models chosen a priori. As a criterion function, (1) response error criterion function, (2) equation error criterion function have been usually used. It has been known that only the response error criterion is applicable when the information about the dynamical structure of the system to be identified is not available. But this criterion function is not much desirable in case when only limited number of observed data of input and output, contaminated by noises, are provided.

In the paper, the improved version of the response error criterion is proposed; i.e., the sum of the following three terms, (1) weighted square error of the initial state, (2) sum of the weighted square error between the input to the model and the observed input, (3) sum of the weighted square error between the output of the model and the observed output.

Minimization procedure with the proposed criterion function is achieved by two steps. First, determination of the optimal initial state and input to the model, which minimize the criterion function for a given model. This first step is known as the optimal tracking problem. Second, minimization of the criterion function with respect to the parameters of the model. This second step is a static optimization problem. The computational algorithm for a linear discrete system is presented.

The criterion function is also explained from the statistical viewpoint and found to be equivalent to the likelihood function in parameter estimation when the structure of the system is the same as that of the model.

The computational examples are given to illustrate the proposed identification method.

1. 緒 言

動的システムの同定は近年ますますその重要性を増し、多くの研究がなされているが、同定の定義は研究者によって異なっている¹⁾。しかし、プラント（以後、同定すべきシステムをプラントと呼ぶ）の入力、出力のようなプラントの外部変数だけの情報を用いて同定を行なう実験的同定法 (experimental identification)

* 現在、韓国海洋大学勤務。

に限定して考えると、同定の一般的定義としては、プラントに対してモデルとしてとりうるシステム（以後モデルと呼ぶ）を要素とする集合（以後、可能モデル集合と呼ぶ）の中から、外部変数の測定結果を用いて、適当に与えられた評価関数を最小にする要素を求めることであるといえる。また、同定に用いられる評価関数としては、①実応答誤差のはん関数、②方程式誤差のはん関数などが考えられる。②の評価関数を用いる場合には可能モデル集合がプラントと等価な要素

(topologically equivalent model of the plant) を持たなければならないのに対し、①の評価関数を用いる場合はそのような必要はない。②の評価関数を用いる場合、モデル調整法を用いてもパラメータを同定する安定な閉ループ系が作られることが知られているが²⁾、測定データが雑音に汚されているときは一般に推定値にバイアスを与える。Sacrisson³⁾、Furuta⁴⁾らはこれに対する改良形評価関数を与えているが、この場合もプラントと等価なモデルが可能モデル集合に含まれることと長時間の測定データが必要である。①の評価関数を用いる場合にも有限区間の測定データしか与えられていないときは入力信号が正確に測定されなければならない。プラントと等価なモデルが可能モデル集合に含まれることが知られていて、かつ、入出力の測定誤差の統計的性質が既知の場合、同定問題は一般に統計的パラメータ推定問題となる。この場合に用いられる評価関数を特に統計的評価関数とも呼ぶ。統計的評価関数を用いて同定を行なうことは古くから提案されている手法である。Cox⁵⁾は most probablic estimate を用いて、未知パラメータも状態変数と考え、同定問題を非線形推定問題として取扱ったが、これは非線形 2 点境界値問題となるため、実際にはこの方法を利用することが困難である。Åström⁶⁾、Kashap⁷⁾は最尤推定法を用いて、パルス伝達関数で記述されるプラントの入力に測定した入力信号以外に統計的雑音加わる場合、パルス伝達関数の未知パラメータを求める方法を提案している。同定と同時に制御も行なわれる場合を考えると、一般に、同定と同時に過去の入力と状態の推定も得られるのが望しい。しかし、Åström、Kashap はプラントを状態方程式で記述しておらず、単にパラメータ推定のみを目的としたため、過去の入力と初期状態の推定を行なっていない。Mayne⁸⁾は Åström の結果を状態変数を用いて説明しているが過去の入力と状態の推定は行なっていない。

本研究においては、プラントの入力信号と出力信号の測定データのみが与えられた場合、状態変数で記述した次元離散値線形系を要素とする可能モデル集合の中から最適モデルおよび過去の入力と状態(初期状態を含む)の推定を同時に求めるのに有効な評価関数を提案し、この評価関数の下での同定アルゴリズムを示す。すなわち、プラントの構造が未知で入出力の測定誤差に関する統計的性質が未知の場合、探索法を適用するまえまでのパラメータ同定アルゴリズムを与える。ここで考えている可能モデル集合は、プラントの次数などは考慮せず、制御その他の条件からプラントに比べ低次のシステムを要素としているものとする。

ここで与えられる同定結果は適当な条件の下で最尤推定になることが示される。この場合、本研究はこれまでの最尤推定による同定法を、初期状態と過去の入力の推定も与えるように改良したものともみることが出来る。

2. 同 定 問 題

本報告では簡単のため単一入力、単一出力離散値系について述べるが、ここで提案する方法の多入力、多出力系および連続系への拡張は容易である。いま、プラントの入力 $v_i (i=0, 1, \dots, N-1)$ と出力 $z_i (i=0, 1, \dots, N)$ が測定されたとする。このとき、本報告では、(1) 式のように記述される n 次線形離散値系、

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1}^m &= \Phi x_i^m + g u_i \\ y_i^m &= h^T x_i^m \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし、 x_i^m, g, h : n -ベクトル、 Φ : $n \times n$ 行列、 u_i^m, y_i^m : それぞれ入力と出力 (スカラー量)。

を要素とする可能モデル集合の中から、(2) 式で表わされる評価関数を最小にする最適モデルを求める同定問題を考える。

$$J = \frac{1}{2} \left[\|x_0^m - \bar{x}_0^m\|^2 w_0 + \sum_{i=0}^{N-1} (v_i - u_i^m)^2 w_{1i} + \sum_{i=0}^N (z_i - h^T x_i^m)^2 w_{2i} \right] \quad (2)$$

ここで、 $\bar{x}_0^m$ は a priori に考えられる x_0^m の値で既知とする。 w_0, w_{1i}, w_{2i} は同定の目的または条件によって適当に与えられる重み係数である (3. 参照)。しかし、(1) 式で記述されるモデルの中には同一入力に対して同一出力を与える等価なモデルが数多く存在するから、このような可能モデル集合の中から (3) 式の評価関数を最小にする 1 つの最適モデルを決定することはできない。したがって、本報告では、(1) 式で表わされるモデルの中で Φ, g, h が (3) 式のように control canonical form⁹⁾ で記述され、かつ、 (Φ, h) が可観測であるモデルのみを要素とする集合を可能モデル集合とする。ただし、プラントと等価なモデルが可能モデル集合に含まれることを前提にしない。

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -k^T & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} k^T &= [k_1, k_2, \dots, k_n] \\ g^T &= [0, 0, \dots, 0, 1] \\ h^T &= [h_1, h_2, \dots, h_n] \end{aligned} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 T は転置、 I_{n-1} は $n-1$ 次の単位行列を表わす。この場合、最適モデルを決定する問題は (1), (3) 式の拘束の下で (2) 式の評価関数を $h, k, x_0^m, u_i^m (i=0, 1, \dots, N-1)$ について最小にする問題になる。これを次の 2 つの手順に分けて行なう。

① まず未知パラメータ h, k が与えられたと仮定

して (2) 式を最小にする $\hat{\mathbf{x}}_i^m, \hat{u}_i^m$ を求め、これを $\hat{\mathbf{x}}^m, \hat{u}$ とする (最適トラッキング問題)。

② $\hat{\mathbf{x}}_i^m, \hat{u}_i$ を (2) 式に代入してこれを最小にする $\mathbf{h}, \mathbf{k}$ を求める (静的最適化問題)。

このとき、① の解として $\hat{u}_i^m, \hat{\mathbf{x}}_i^m$ は (4)~(6) 式で与えられる^{10), 11)}。

$$\hat{u}_i^m = v_i - w_{1i}^{-1} \mathbf{g}^T (\mathbf{R}_{i+1} \hat{\mathbf{x}}_{i+1} - \mathbf{b}_{i+1}), \quad i=0, 1, \dots, N-1 \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1}^m = (\mathbf{I}_n + w_{1i}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{i+1})^{-1} (\Phi \hat{\mathbf{x}}_i^m + w_{1i}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{b}_{i+1} + \mathbf{g} v_i), \quad i=0, \dots, N-1 \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0^m = \mathbf{M}_{21}^{-1} (w_{10}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{b}_1 + \mathbf{g} v_0) + \mathbf{M}_{22}^{-1} (\Phi^T \mathbf{b}_1 + w_{20} \mathbf{h} z_0 + w_0 \bar{\mathbf{x}}_0^m) \quad (6)$$

ただし、

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n + w_{10}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_1 & -\Phi \\ \Phi^T \mathbf{R}_1 & w_0 \mathbf{I}_n + w_{20} \mathbf{h} \mathbf{h}^T \end{bmatrix};$$

$$2n \times 2n \text{ 行列}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^{-1} & \mathbf{M}_{12}^{-1} \\ \mathbf{M}_{21}^{-1} & \mathbf{M}_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

ここで、 $\mathbf{R}_i$ は $n \times n$ 対称正定行列、 $\mathbf{b}_i$ は n -ベクトルであり、それぞれ次の差分方程式の解で与えられる。

$$\mathbf{R}_i = w_{2i} \mathbf{h} \mathbf{h}^T + \Phi^T \mathbf{R}_{i+1} (\mathbf{I}_n + w_{1i} \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{i+1})^{-1} \Phi, \quad i=1, 2, \dots, N-1, \quad \mathbf{R}_N = w_{2N} \mathbf{h} \mathbf{h}^T \quad (7)$$

$$\mathbf{b}_i = w_{2i} \mathbf{h} z_i + \Phi^T (\mathbf{I}_n + w_{1i} \mathbf{R}_{i+1} \mathbf{g} \mathbf{g}^T)^{-1} (\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{R}_{i+1} \mathbf{g} v_i), \quad i=1, 2, \dots, N-1,$$

$$\mathbf{b}_N = w_{2N} \mathbf{h} z_N \quad (8)$$

証明は付録参照。

以上によって $\hat{u}_i^m, \hat{\mathbf{x}}_i^m$ が求まるとこれらは未知パラメータ $\mathbf{h}, \mathbf{k}$ の関数となるから、②の手順は (4)~(8) 式の拘束の下で (9) 式の評価関数を最小にする $\mathbf{h}, \mathbf{k}$ を求めれば良い。

$$\hat{J}(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left[\|\hat{\mathbf{x}}_0^m - \bar{\mathbf{x}}_0^m\|^2 w_0 + \sum_{i=0}^{N-1} (v_i - \hat{u}_i^m)^2 w_{1i} + \sum_{i=0}^N (z_i - \mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}}_i^m)^2 w_{2i} \right] \quad (9)$$

しかし、一般に (9) 式は $\mathbf{h}, \mathbf{k}$ について非線形関数になり、これを解析的に最小化することは困難である。また、 N が有限な場合 (9) 式は $\mathbf{h}, \mathbf{k}$ について一般には Unimodal にならないので、最急傾斜法、共役こう配法などの探求法を用いることはできないが、格子探索とか不規則探索などによる数値計などで最適な $\mathbf{h}, \mathbf{k}$ の値を求めることができる。最適な $\mathbf{h}, \mathbf{k}$ が求まると、これに対する $\hat{u}_i^m, \hat{\mathbf{x}}_i^m$ により過去の入力と状態の推定値が与えられる。

3. 重み係数 w_{1i}, w_{2i}

前章で、(2) 式の評価関数における重み係数 w_0 ,

w_{1i}, w_{2i} は同定の目的と条件によって与えられると述べたが、ここで、これについて検討するとともに、(2) 式の評価関数と最尤推定法との関連について考察する。

3.1 入力と初期状態に制限がある場合

従来の実応答誤差を用いた評価関数、

$$J_r = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (z_i - y_i^m)^2 w_{2i} \quad (10)$$

ただし、 w_{2i} は与えられたとする。

を (1) 式の拘束の下で最小にする同定問題において、物理的条件から、測定されたプラントの入力 v_i とモデルの入力 v_i^m との差に対する制限条件、

$$(u_i - u_i^m)^2 \leq c_i, \quad \text{または} \quad \sum_{i=0}^{N-1} (v_i - u_i^m)^2 \leq c \quad (11)$$

と初期状態に対する制限条件、

$$\|\mathbf{x}_0^m - \bar{\mathbf{x}}_0^m\|^2 \leq d \quad (12)$$

がつけ加わった場合、 $1/2 w_{1i}$ または $1/2 w_1$ (この場合 w_{1i} は定数 $= w_1$) と $1/2 w_0$ をラグランジュ乗数と考えると、(1) 式の拘束の下に最小化すべき評価関数は (2) 式ようになる。したがって、この場合の w_{1i} または w_1 および w_0 はそれぞれ (11) 式、(12) 式を満たすように決めれば良い。

3.2 プラントの構造と測定誤差の統計的性質が知られている場合

プラントもモデルと同じく (1') 式のように記述され、Fig. 1 のように、その入力 u_i と出力 y_i が測定雑音 m_i, n_i に汚されてそれぞれ v_i, z_i として測定されるとする。

Fig. 1 Linear discrete system

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= \Phi \mathbf{x}_i + \mathbf{g} u_i \\ y_i &= \mathbf{h}^T \mathbf{x}_i \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

また、測定雑音 m_i, n_i およびプラントの初期状態 $\mathbf{x}_0$ はおのおのの独立な正規性確率変数であり、その平均値および共分散が (13) 式のように与えられるとする。

$$\left. \begin{aligned} E(m_i) &= 0, E(n_i) = 0 \\ E(m_i m_j) &= \sigma_{1i}^2 \delta_{ij}, E(n_i n_j) = \sigma_{2i}^2 \delta_{ij} \quad (i, j: 0, 1, \dots) \\ E(\mathbf{x}_0) &= \bar{\mathbf{x}}_0, E[(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^T] = \sigma_0^2 \mathbf{I}_n \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ただし、 $E(\cdot)$: 空間平均、 δ_{ij} : Kronecker のデルタ。

この場合、入出力の測定データ $v_i (i=0, 1, \dots, N-1)$,

$z_i(0, 1, \dots, N)$ が与えられたときの $\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{x}_0$ および $u_i(i=0, 1, \dots, N-1)$ の最尤推定は (14) 式の条件付き確率密度関数を (1') 式の拘束の下で最大にすることによって得られる。

$$\begin{aligned} P(z_0, z_1, \dots, z_N, v_0, v_1, \dots, v_{N-1}, \mathbf{x}_0 | u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, \theta) \\ = P(\mathbf{x}_0 | \theta) P(z_0, z_1, \dots, z_N | u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, \theta) \\ P(v_0, v_1, \dots, v_{N-1} | u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, \theta) \quad (14) \end{aligned}$$

ただし, $\theta = \{\mathbf{h}, \mathbf{k}, \sigma_0^2, \sigma_{1i}^2(i=0, 1, \dots, N-1), \sigma_{2i}^2(i=0, 1, \dots, N)\}$

したがって, 一般に maximum likelihood function L_N は,

$$\begin{aligned} L_N(\mathbf{x}_0, \theta, \mu_i; i=0, 1, \dots, N-1) \\ = \frac{\text{const.}}{\sigma_0^{2N} \prod_{i=0}^{N-1} \sigma_{1i}^2 \sigma_{2i}^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0\|^2}{\sigma_0^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(v_i - u_i)^2}{\sigma_{1i}^2} + \sum_{i=0}^N \frac{(z_i - \mathbf{h}^T \mathbf{x}_i)^2}{\sigma_{2i}^2} \right] \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

のようになるから, $\sigma_0^2, \sigma_{1i}^2(i=0, \dots, N-1), \sigma_{2i}^2(i=0, \dots, N)$ が既知の場合, $\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{x}_0, u_i$ の最尤推定は次の評価関数を (1') 式の拘束の下で最小にすることによって得られることがわかる。

$$\begin{aligned} J_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0\|^2}{\sigma_0^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(v_i - u_i)^2}{\sigma_{1i}^2} \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^N \frac{(z_i - \mathbf{h}^T \mathbf{x}_i)^2}{\sigma_{2i}^2} \right] \quad (16) \end{aligned}$$

(2) 式と (16) 式を比較してみると (2) 式の評価関数における重み係数 w_0, w_{1i}, w_{2i} をそれぞれ $w_0=1/\sigma_0^2, w_{1i}=1/\sigma_{1i}^2(i=0, \dots, N-1), w_{2i}=1/\sigma_{2i}^2(i=0, \dots, N)$ に選ぶと本報告での同定は最尤推定と一致することがわかる。

鞍掛¹²⁾ は most probable estimate によって (16) 式と同様な評価関数を用いた同定法を与えているが, most probable estimate ではこのような評価関数が与えられにくく, また, 初期状態の推定も考慮されておらず, Mayne⁸⁾ の論文との違いがみられない。

3.3 3.2 と同じ条件で $\sigma_0^2, \sigma_{1i}^2, \sigma_{2i}^2$ が未知の場合
この場合, 重み係数 w_0, w_{1i}, w_{2i} を決めることは, $\sigma_0^2, \sigma_{1i}^2, \sigma_{2i}^2$ を決めることと同じであるから, ここでは, $\sigma_0^2, \sigma_{1i}^2, \sigma_{2i}^2$ が未知の場合, これらも未知パラメータ $\mathbf{h}, \mathbf{k}$ と同様に maximum likelihood estimate によって推定することを考える。一般的に, 測定雑音 m_i, n_i は定常であると考えて良いので, $\sigma_{1i}^2 = \text{定数} = \sigma_1^2, \sigma_{2i}^2 = \text{定数} = \sigma_2^2, \nu = \sigma_1^2/\sigma_2^2, \nu_0 = \sigma_2^2/\sigma_0^2$ とすると, (15) 式から, $\mathbf{h}, \mathbf{k}, \nu_0, \nu, \sigma_2^2, \mathbf{x}_0, u_i(i=0, 1, \dots, N-1)$ の最尤推定は (1') 式の拘束の下で (17) 式の評価関数を最小にすることによって得られることがわかる。

$$\begin{aligned} J_2 = \frac{1}{2\sigma_2^2} \left[\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0\|^2 \nu_0 + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(v_i - u_i)^2}{\nu} \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^N (z_i - \mathbf{h}^T \mathbf{x}_i)^2 \right] + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\nu^N}{\nu_0^N} \sigma_2^{4(N+(n+1)/2)} \right] \quad (17) \end{aligned}$$

前章と同様に, まず $\mathbf{h}, \mathbf{k}, \nu_0, \nu, \sigma_2^2$ が与えられたとして, $u_i, \mathbf{x}_i$ の最適値, $\hat{u}_i, \hat{\mathbf{x}}_i$ を求めると, これらは (18)~(20) 式のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{u}_i = v_i - \nu \mathbf{g}^T (\mathbf{R}_{i+1} \hat{\mathbf{x}}_{i+1} - \mathbf{b}_{i+1}), \\ i=0, 1, \dots, N-1 \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{i+1} = (\mathbf{I}_n + \nu \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{i+1})^{-1} (\Phi \hat{\mathbf{x}}_i + \nu \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{g} v_i), \\ i=0, 1, \dots, N-1 \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{M}_{21}^{-1} (\nu \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{b}_1 + \mathbf{g} v_0) \\ + \mathbf{M}_{22}^{-1} (\Phi^T \mathbf{b}_1 + \mathbf{h} z_0 + \nu_0 \bar{\mathbf{x}}_0) \quad (20) \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n + \nu \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_1 & -\Phi \\ \Phi^T \mathbf{R}_1 & \nu_0 \mathbf{I}_n + \mathbf{h} \mathbf{h}^T \end{bmatrix};$$

$$2n \times 2n \text{ 行列, } \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^{-1} & \mathbf{M}_{12}^{-1} \\ \mathbf{M}_{21}^{-1} & \mathbf{M}_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

ここで, $\mathbf{R}_i, \mathbf{b}_i$ は次の差分方程式の解である。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i = \mathbf{h} \mathbf{h}^T + \Phi^T \mathbf{R}_{i+1} (\mathbf{I}_n + \nu \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{i+1})^{-1} \Phi, \\ \mathbf{R}_N = \mathbf{h} \mathbf{h}^T \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i = \mathbf{h} z_i + \Phi^T (\mathbf{I}_n + \nu \mathbf{R}_{i+1} \mathbf{g} \mathbf{g}^T)^{-1} (\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{R}_{i+1} \mathbf{g} v_i), \\ \mathbf{b}_N = \mathbf{h} z_N \quad (22) \end{aligned}$$

次に, $\mathbf{h}, \mathbf{k}, \nu_0, \nu, \sigma_2^2$ の最適推定は, (18)~(22) 式の拘束の下で (23) 式の評価関数を最小にすることによって得られる。

$$\begin{aligned} \hat{J}_2(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \nu, \nu_0, \sigma_2^2) = \frac{1}{\sigma_2^2} F(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \nu, \nu_0) \\ + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\nu^N}{\nu_0^N} \sigma_2^{4(N+(n+1)/2)} \right] \quad (23) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \nu, \nu_0) = \frac{1}{2} \left[\|\hat{\mathbf{x}}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0\|^2 \nu_0 + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(v_i - \hat{u}_i)^2}{\nu} \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^N (z_i - \mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}}_i)^2 \right] \quad (24) \end{aligned}$$

$\partial \hat{J}_2 / \partial \sigma_2^2 = 0$ から, σ_2^2 の最適値 $\hat{\sigma}_2^2$ は,

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{F}{N + \frac{n+1}{2}}$$

となるからこれを (23) 式に代入すると,

$$\begin{aligned} \hat{J}_2'(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \nu, \nu_0) = N + \frac{n+1}{2} \\ + \frac{N}{2} \ln \left[\frac{\nu}{\nu_0^{n/N}} \left(\frac{F}{N + \frac{n+1}{2}} \right)^{2+(n+1)/N} \right] \quad (25) \end{aligned}$$

を得る。したがって, 最適パラメータ $\hat{\mathbf{h}}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\nu}_0, \hat{\nu}$ は,

$$\mathbf{J}_0 = \frac{\nu}{\nu_0^{n/N}} F(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \nu, \nu_0)^{2+(n+1)/N} \quad (26)$$

を最小にすることによって得られ、 $\sigma_0, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ の最適推定値 $\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ は (27) 式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_2^2 &= \frac{1}{N + \frac{n+1}{2}} F(\hat{\mathbf{h}}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\rho}, \hat{\rho}_0) \\ \hat{\sigma}_1^2 &= \hat{\rho} \hat{\sigma}_2^2 \\ \hat{\sigma}_0^2 &= \hat{\sigma}_2^2 / \hat{\rho}_0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

特に、プラントの初期状態 x_0 が完全に既知の場合は、 $\hat{\mathbf{h}}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\rho}$ は、(18), (19), (21), (22) 式の拘束の下で (26') 式を最小にすることによって得られ、 $\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2$ は (27') から求められる。

$$J'_0 = \nu F'(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \nu)^{2+1/N} \quad (26')$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} F'(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \nu) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \frac{(v_i - \hat{u}_i)^2}{\nu} + \sum_{i=0}^N (z_i - \mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}}_i)^2 \right] \\ \hat{\sigma}_2^2 &= \frac{1}{N + \frac{1}{2}} F'(\hat{\mathbf{h}}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\rho}) \\ \hat{\sigma}_1^2 &= \hat{\rho} \hat{\sigma}_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (27')$$

以上によって得られた推定値 $\hat{u}_i (i=0, \dots, N-1)$, $\hat{x}_i (i=0, \dots, N)$, $\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2$ は、最尤推定の漸近的性質 (asymptotic properties) によって、 $N \rightarrow \infty$ のときそれぞれ真の値に収束することが知られているが^{(13), (14)},

観測データが少ない場合には、 $\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2$ はそれぞれ $E(u_i - \hat{u}_i)^2$, $E(y_i - \mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}}_i)^2$ と同じ程度の推定誤差を伴うので、本方法により測定雑音の分数を推定するときにはかなり長時間の観測データを用いなければならない。しかし、本報告は測定雑音の統計的性質が未知な場合でもパラメータ $\mathbf{h}, \mathbf{k}$ を有効に推定することを目的としており、これらの推定値 $\hat{\mathbf{h}}, \hat{\mathbf{k}}$ は $\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2$ または重み係数 w_1, w_2 の値にそれほど影響されないことを本章の例題で示す。

以上述べられたほかに、プラントおよび測定誤差に関するなんらかの情報も与えられていない場合、2. で述べた本同定法は、 n 次元線形離散系のモデルの中から入出力の意味でもっともプラントに近いモデルを求めることになるが、この場合の重み係数は同定の目的によって適当に定めればよい。

4. 例 題

【例 1】 (28) 式のように記述される 1 次系のプラントに対して (28') 式のような 1 次係モデルを考える。

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1} &= -0.5x_i + u_i, \quad x_0 = 0 \text{ (既知)} \\ y_i &= x_i \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Fig. 2 Level surface of criterion function (eq. 9) for first order system (noises : 0, $w_{2i} = w_{2i} = 1$, $u_i = 1$, $N = 15$)

Fig. 3 Level surface of criterion function (eq. 9) for first order system ($\sigma_1^2=0.25 \times 10^{-2}$, $\sigma_2^2=0.4 \times 10^{-3}$, $w_{1i}=w_{2i}=1$, $u_i=1$, $N=15$)

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1}^m &= -kx_i^m + u_i^m, \quad x_0^m = 0 \\ y_i^m &= hx_i^m \end{aligned} \right\} \quad (28')$$

このプラントの入力 $u_i=1 (i=0, \dots, N-1)$ および出力 $y_i (i=1, \dots, N)$ が雑音なしで測定されたとする ($n_i=0, n_i=0$), $N=15$ の場合, 重み係数 $w_{1i}=w_{2i}=1$ としたときの評価関数 (9') 式,

$$\begin{aligned} \hat{J}'(h, k) &= \sum_{i=0}^{N-1} (v_i - \hat{u}_i^m)^2 w_{1i} \\ &+ \sum_{i=1}^N (z_i - h\hat{x}_i^m)^2 w_{2i} \end{aligned} \quad (9')$$

の値をいろいろの h, k の値に対して計算した結果を Fig. 2 に示す. また, 測定誤差 m_i, n_i が平均値零の正規乱数でその分散がそれぞれ, $\sigma_1^2=0.25 \times 10^{-2}$, $\sigma_2^2=0.4 \times 10^{-3}$ の場合, 同様にして行なった計算結果を Fig. 3 に示す. このとき, $\hat{h}=1.005$, $\hat{k}=0.515$ (真の値; $h=1, k=0.5$) となり (9') 式の最小点がややずれているのは, 短時間データの使用によるものと考えられる ($N=15$).

【例 2】 例 1 と同じプラントにおいて, $\sigma_1^2=0.1 \times 10^{-1}$, $\sigma_2^2=0.25 \times 10^{-2}$ ($\nu=4$), 入力 $u_i: M$ 系列, $N=30$ の場合, h, k, σ_2^2, ν を未知として, 3・3 の方法に従って格子探索を用いてこれらの推定を行なった結果, $\hat{h}=1.021$, $\hat{k}=0.511$, $\hat{\sigma}_1^2=0.446 \times 10^{-2}$, $\hat{\sigma}_2^2=0.178$

(a) comparison of u_i and $\hat{u}_i$

(b) comparison of y_i and $\hat{y}_i$

$N=30$, $\hat{h}=1.021$, $\hat{k}=0.511$, $\hat{\nu}=250$ ○—: true value
××: estimated value

Fig. 4 Computations of $\hat{u}_i$ and $\hat{y}_i$ for first order system when $\sigma_1^2=0.1 \times 10^{-1}$, $\sigma_2^2=0.25 \times 10^{-2}$, and input $: M$ -sequence

$\times 10^{-4}$, $\hat{\nu}=250$ となった. この値に対する $\hat{u}_i$ と u_i および $\hat{y}_i$ と y_i との比較をそれぞれ Fig. 4 (a), (b) に示す. 測定雑音の分散の推定値が真の値から大きくずれているのは, ここで得られた $\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2$ がそれぞれ $v_i - \hat{u}_i$ および $z_i - h\hat{x}_i$ の分散に相当すること,

短時間データの使用, また m_i と n_i が完全に独立でなくお互いに相関をもつことなどにより起因するもので, 測定データの個数 N が大きくなり $\hat{x}_i \rightarrow x_i$, $\hat{u}_i \rightarrow u_i$ になるにつれ, $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$ もそれぞれ σ_1^2 , σ_2^2 に近づくと考えられる. 次に ν の値を 1, 4 (真の値), 250 (最適推定値) と与えておいて, おおのの場合 h , k の推定を行なうと,

$$\nu=1 \text{ の場合, } \hat{h}=0.98, \hat{k}=0.49$$

$$\nu=4 \text{ " , } \hat{h}=0.99, \hat{k}=0.50$$

$$\nu=250 \text{ " , } \hat{h}=1.02, \hat{k}=0.51$$

となった. これより ν の値が $\hat{h}$, $\hat{k}$ の値にそれほど大きく影響しないことがわかる. また, $\nu=1$ および 4 の場合の $\hat{u}_i$, $\hat{y}_i$ の値も Fig. 4 の $\nu=250$ の場合とあまり相違がなかった.

【例 3】 (29) 式のように表わせる 2 次系プラントに対して, 同じく (29') 式の 2 次系モデルを考える.

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 0.85 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i, \\ x_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y_i &= [-0.25, 0.75]^T x_i \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1}^m &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x_i^m \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i^m, \quad x_0^m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y_i^m &= [h_1, h_2]^T x_i^m \end{aligned} \right\} \quad (29')$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0.25 \times 10^{-2}, u_i = 1, N = 30 \text{ の}$$

場合, h_1, k_1, x_0 を既知として, $w_{1i} = w_{2i}$

(a) comparison of u_i and $\hat{u}_i$

(b) comparison of y_i and $\hat{y}_i$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0.25 \times 10^{-2}$, $w_{1i} = w_{2i} = 1$, $N = 30$, $\circ$: true value, $\times$: estimated value

Fig. 5 Computations of $\hat{u}_i$ and $\hat{y}_i$ for second order system when h_1, k_1, x_0 are known

$$N=30, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0.25 \times 10^{-2}, \hat{h}_2 = 0.753, \hat{k}_2 = 0.842, w_{1i} = w_{2i} = 1$$

Fig. 6 Level surface of criterion function for second order system when h_1, x_0 are known

$=1$ にしたときの h_2, k_2 のいろいろの値に対する評価関数 (9') 式の値を Fig. 6 に示す. この場合, $\hat{h}_2 = 0.753$, $\hat{k}_2 = 0.842$ となった. この値に対する $\hat{u}_i$ ($\hat{u}_i^m$) と u_i および $\hat{y}_i$ ($\hat{y}_i^m$) と y_i との比較をそれぞれ Fig. 5 の (a), (b) に示す. $h_1 = -0.25$, $k_1 = 0.5$ のとき, k_2 と h_2 が,

$$k_2 = -\left(2h_2 + \frac{1}{4h_2}\right) \quad (30)$$

を満足する場合, すなわち Fig. 6 の点線で表わせる曲線上においては, モデルになる (29') 式の系が可観測とならず, 1 次系と等価になるため, 評価関数の値が大きくなるが, これが雑音および短時間データの使用によりずれて, Fig. 6 の上半部の山脈として表われ

たものと考えられる。

5. 結 論

以上、本報告では有限次元線形モデルを用いてプラントを同定するとき、雑音に汚されたプラントの入力信号と出力信号の測定データしか利用できない場合に対して有効な評価関数を提案した。この評価関数は、プラントの構造と入力信号、出力信号の測定誤差の統計的性質が既知の場合、最尤推定によって得られる評価関数と一致することが示された。また、与えられた評価関数の下での測定区間の入力および状態の推定を与えるアルゴリズムは最適追従制御問題の解を用いて求められることを示した。しかし、有限区間のデータを用いる場合評価関数がパラメータに関し一般には unimodel になる保証がないため、具体的なパラメータ同定アルゴリズムは与えられなかった。また、単時間の観測データを用いる場合、分散の推定値は真値と大きくずれているにもかかわらず、パラメータの推定値および入力と出力の推定値は良い精度のものがえられ、これらは重み係数の値にあまり影響されないことを例題によって示した。

今後、短い測定区間でも評価関数が unimodel になるような入力信号の設計法および、ここで提案した評価関数を最小化する具体的探索アルゴリズムなどに対する研究がなされねばならない。

終わりに、いろいろ御検討、御助言くださった査読委員のかたがたに感謝致します。

参 考 文 献

- 1) A. V. Balakrishnan, V. Peterka : Identification in

- Automatic Control System, Survey Paper, 4th Congress of IFAC (1969)
- 2) P. M. Lion : Rapid Identification of Linear and Nonlinear System, JACC, 605/614 (1966)
- 3) D. J. Sacrison : The Use of Stochastic Approximation, to Solve System Identification Problem, IEEE, Trans. on AC, **AC-12**, 513/567 (1967)
- 4) K. Furuta, J-G, Paquet : On the Identification of Time-Invariant Discrete Process, IEEE, Trans. on AC, **AC-15**, 153/155 (1970)
- 5) H. Cox : On the Estimation of State Variables and Parameters for Noisy Dynamic System, IEEE, Trans. on AC, **AC-9** 5/12 (1964)
- 6) K. J. Åström (D. Bahlin) : Numerical Identification of Linear Dynamic Systems from Normal Operating Records, IFAC Symp. on the Theory of Self Adaptive Control System, 97/111, Teddington (1965)
- 7) R. L. Kashap : Maximum Likelihood Identification of Stochastic Linear Systems, IEEE, Trans. on AC, **AC-15-1**, 25/34 (1970-Feb.)
- 8) D. Q. Mayne : Parameter Identification, Automatica, **3**, 245/255 (1966)
- 9) R. E. Kalman : Mathematical Description of Linear Dynamical Systems, SIAM Control, 1-2, 152/191 (1963)
- 10) A. E. Bryson & Y. C. Ho : Applied Optimal Control, Blaisdell (1969)
- 11) 古田・河 : 確定入力を用いる 荷重関数の最適同定法, 計測自動制御学会論文集, **7-6** 572/580 (1971)
- 12) 鞍掛 : 未知パラメータを含む線形系の推定, 計測自動制御学会論文集, **6-6**, 531/536 (1970)
- 13) K. J. Åström : On the Achievable Accuracy in Identification Problem, IFAC Symposium on Identification, No. 1.8 (1967)
- 14) A. Wald : Asymptotic Properties of the Maximum Likelihood Estimate of an Unknown Parameter of a Discrete Stochastic Process, Ann. Math. Statist., **19**, 40/48 (1948)

□ 付 録 □

(1) 式の拘束の下で、(A・1) 式の評価関数を最小にする問題は、入出力追従最適制御問題である。

$$J_D = \frac{1}{2} \left[\|x_0^m - \bar{x}_0^m\|^2 w_0 + \sum_{i=0}^{N-1} (v_i - u_i^m)^2 w_{1i} + \sum_{i=0}^N (z_i - h^T x_i^m)^2 w_{2i} \right] \quad (\text{A} \cdot 1)$$

J_D^* を,

$$J_D^* = J_D + \sum_{i=0}^{N-1} p_{i+1}^T (\Phi x_i^m + g u_i^m - x_{i+1}^m) \quad (\text{A} \cdot 2)$$

ただし、 $p_i (i=0, \dots, N-1)$: n 次元ラグランジュ乗数ベクトル

とすると、 J_D^* は、

$$J_D^* = \frac{1}{2} \|x_0^m - \bar{x}_0^m\|^2 w_0 + H_0 + \frac{1}{2} (z_N - h^T x_N^m) w_{2N} - p_N^T x_N^m + \sum_{i=1}^{N-1} (H_i - p_i^T x_i^m) \quad (\text{A} \cdot 3)$$

ただし、

$$H_i = \frac{1}{2}[(v_i - u_i^m)^2 w_{1i} + (z_i - \mathbf{h}^T \mathbf{x}_i^m)^2 w_{2i}] + \mathbf{p}_{i+1}^T (\Phi \mathbf{x}_i^m + \mathbf{g} u_i^m) \quad (\text{A} \cdot 4)$$

$$(\text{Hamiltonian}) \quad i=0, \dots, N-1$$

となり, u_i^m と $\mathbf{x}_i^m$ の最適値をそれぞれ $\hat{u}_i^m, \hat{\mathbf{x}}_i^m$ とすると, (A・5)~(A・7) 式を得る.

$$\mathbf{p}_i = -(z_i - \mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}}_i^m) \mathbf{h} w_{2i} + \Phi^T \mathbf{p}_{i+1} \quad (i=1, \dots, N-1) \quad (\text{A} \cdot 5)$$

$$\hat{u}_i^m = v_i - w_{1i}^{-1} \mathbf{g}^T \mathbf{p}_{i+1} \quad (i=0, \dots, N-1) \quad (\text{A} \cdot 6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1}^m = \Phi \hat{\mathbf{x}}_i^m + \mathbf{g} v_i - w_{1i}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{p}_{i+1} \quad (i=0, \dots, N-1) \quad (\text{A} \cdot 7)$$

また, 境界条件は,

$$\Phi^T \mathbf{p}_1 + (w_0 \mathbf{I}_n + w_{20} \mathbf{h} \mathbf{h}^T) \hat{\mathbf{x}}_0^m = w_{20} z_0 \mathbf{h} + w_0 \bar{\mathbf{x}}_0^m \quad (\text{A} \cdot 8)$$

$$\mathbf{p}_N = -w_{2N} (z_N - \mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}}_N^m) \mathbf{h} \quad (\text{A} \cdot 9)$$

ただし, $\mathbf{I}_n$: n 次の単位行列

となる. 次に, $\mathbf{R}_i$ を n 次の対称正定行列, $\mathbf{b}_i$ を n -ベクトルとして,

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{R}_i \hat{\mathbf{x}}_i^m - \mathbf{b}_i \quad (i=1, \dots, N) \quad (\text{A} \cdot 10)$$

とおき, (A・5), (A・7), (A・10) 式から $\mathbf{p}_{i+1}, \hat{\mathbf{x}}_{i+1}^m, \mathbf{p}_i$ を消去して得られる $\hat{\mathbf{x}}_i^m$ についての恒等式から,

$$\mathbf{R}_i = w_{2i} \mathbf{h} \mathbf{h}^T + \Phi^T \mathbf{R}_{i+1} (\mathbf{I}_n + w_{1i}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{i+1})^{-1} \Phi \quad (7)$$

$$\mathbf{b}_i = w_{2i} \mathbf{h} z_i + \Phi^T (\mathbf{I}_n + w_{1i}^{-1} \mathbf{R}_{i+1} \mathbf{g} \mathbf{g}^T)^{-1} (\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{R}_{i+1} \mathbf{g} v_i) \quad (i=1, \dots, N) \quad (8)$$

を得る. また, 境界条件は (A・9), (A・10) 式から,

$$\mathbf{R}_N = w_{2i} \mathbf{h} \mathbf{h}^T, \quad \mathbf{b}_N = w_{2i} \mathbf{h} z_i \quad (9)$$

となる. 次に (A・10) 式を (A・6), (A・7) 式に代入すると $\hat{u}_i^m, \hat{\mathbf{x}}_i^m$ は,

$$\hat{u}_i^m = v_i - w_{1i}^{-1} \mathbf{g}^T (\mathbf{R}_{i+1} \hat{\mathbf{x}}_{i+1}^m - \mathbf{b}_{i+1}) \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1}^m = (\mathbf{I}_n + w_{1i}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{i+1})^{-1} (\Phi \hat{\mathbf{x}}_i^m + \mathbf{g} v_i + w_{1i}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{b}_{i+1}) \quad (i=0, \dots, N-1) \quad (5)$$

で与えられる. また, $\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{b}_1$ を (A・8) 式に代入して, これと, (5) 式の $i=0$ の場合とから $\hat{\mathbf{x}}_0^m$ を求めると (6) 式のようになる.

$$\hat{\mathbf{x}}_0^m = \mathbf{M}_{21}^{-1} (w_{10}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{b}_1 + \mathbf{g} v_0) + \mathbf{M}_{22}^{-1} (\Phi^T \mathbf{b}_1 + w_{20} \mathbf{h} z_0 + w_0 \bar{\mathbf{x}}_0^m) \quad (6)$$

$$\text{ただし, } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n + w_{10}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_1 & -\Phi \\ \Phi^T \mathbf{R}_1 & w_0 \mathbf{I}_n + w_{20} \mathbf{h} \mathbf{h}^T \end{bmatrix} : 2n \times 2n \text{ 行列, } \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^{-1} & \mathbf{M}_{12}^{-1} \\ \mathbf{M}_{21}^{-1} & \mathbf{M}_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$