不確定性を含む非線形計画問題の研究†

室 津 義 定・大 場 史 憲

竹 森 弘 尚・伊 東 裕*

大阪府立大学工学部 堺市百舌鳥梅町 4-804

(昭和 46 年 6 月 18 日 受付)

A Study on Stochastic Nonlinear Programming Problems

Yoshisada MUROTSU, Fuminori OHBA, Hironao TAKEMORI and Hiroshi ITOH

(College of Engineering, University of Osaka Prefecture, Sakai)

(Received June 18, 1971)

There are many engineering problems which are reduced to the mathematical programming problem. The constraints and/or the objective function established are sometimes subjected to errors due to experiments or estimations, and thus are probabilistic in nature. In such a case, a stochastic approach must be adopted to make the program realistic by treating the constraints and/or the objective function as random variables. Thus we set up the problems 1) to minimize the expected value of the objective function under the chance-constraints on the constraints and 2) to minimize the expected value of the objective function under the chance-constraint on the objective function as well as on the constraints.

The constraints and the objective function are random variables, the distributions of which are not predetermined. Thus, the chance-constraints are not to be calculated directly. In this paper, a new approach is employed to transform the chance-constraints into the equivalent deterministic nonlinear constraints. Validity of this transformation is proved by using Tchebychev inequality. A possible algorithm to solve the problems is proposed and numerical examples are also provided to illustrate the given method.

1. ま え が き

数理計画問題に帰着される工学上の問題は数多くある。それらの制約条件および目的関数は、その性質上確定的な場合もあるが、実験や推定によって決定されるものも多い。したがって、それらには多かれ少なかれ不確定性を含んでいる。このような場合には、特定の場合（たとえば平均値など）に対して最適であっても、他の場合にはかならずしもそうとはならない。さらに重要なことは、最適解は通常境界上に存在するので、もしその制約式が、たとえば平均の意味で最良な実験式であれば、その制約条件は確率 0.5 でもって満たされないことになる¹⁾。また、目的関数としてコストや利益が選ばれた場合には、それらの変動が過大と

なり、計画に支障をきたすことも起こり得る。このような問題に対しては、制約式および目的関数を確率変数とみなして、確率的な取扱いが必要である。

不確定性を含む線形計画問題に対しては、かなり系統的研究がなされている^{2)~4)}。それらは、1) 不確定性を含む係数を平均値でおきかえる方法、2) 確率制約計画法⁵⁾に代表される安全側に計画する方法、および 3) 2 段決定問題に帰着させる方法、に分類される⁶⁾。しかし、非線形計画問題で、不確定性を考えた研究は少ない^{7)~10), 13)}。

この論文では、係数が不確定性を持つ非線形計画問題を、確率制約の問題として定式化し、その解法を与える。その結果、不確定性を含む非線形計画問題は、それと等価な確定的な非線形計画問題に帰着させて解くことができることを示す。さらに、数値例によって手法を説明し、その有用法を示す。

† 第 10 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 46・8)

* (現)川崎重工株式会社勤務。

2. 主 な 記 号

$(\bar{\cdot}) : (\cdot)$ の平均値

$\sigma_{(\cdot)} : (\cdot)$ の標準偏差

$\Delta(\cdot) \triangleq (\cdot) - (\bar{\cdot}) : (\cdot)$ の平均値からの変動

Prob. $[(\cdot)]$: 事象 $(\cdot)$ が起こる確率

$x : x_i$ を要素とする制御ベクトル

$a, c : a_i, c_i$ を要素とする係数ベクトル

$\phi(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t^2/2)} : \text{標準正規確率密度関数}$

$\Phi(t) \triangleq \int_{-\infty}^t \phi(\tau) d\tau : \text{標準正規分布関数}$

3. 問 題 の 記 述

まず、以下のような非線形計画問題を考える。すなわち、制約条件、

$$g_i(x, a) \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

のもとに、目的関数、

$$z = f(x, c) \quad (2)$$

を最小にする制御ベクトル x を求めよ。ただし、(1)、(2)式において、

$x = \text{col.}(x_i) = n$ 次元制御ベクトル

$a = \text{col.}(a_i) = q$ 次元係数ベクトル

$c = \text{col.}(c_i) = r$ 次元係数ベクトル

であり、 $g_i(\cdot, \cdot), f(\cdot, \cdot)$ は実数値関数で十分なめらかな関数であるとする。

次に、(1)、(2)式における係数 a, c が確定値でなく、既知の確率分布をもつ確率変数である場合を考えよう。このとき、次の問題を設定する。

【問題 1】『確率制約、

$$\text{Prob.}[g_i(x, a) \geq 0] \geq P_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

のもとで、目的関数の期待値 $\bar{z}$ を最小にする x を求めよ。ただし、 P_i は与えられた定数である。』

【問題 2】『確率制約 (3) と、目的関数の変動に対する確率制約、

$$\text{Prob.}[z \geq \beta \bar{z}] \leq P_z \quad (4)$$

のもとで、目的関数の期待値 $\bar{z}$ を最小にする x を求めよ。ただし、 β および P_z は考えられた定数である。』

問題 1 と 2 の違いは、目的関数が最適値から変動する確率を考慮しているかないかだけである。

問題が意味を持つために次の仮定をしておく。まず、集合、

$$X_i = \{x | \text{Prob.}[g_i(x, a) \geq 0] \geq P_i\} \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

$$X_z = \{x | \text{Prob.}[z \geq \beta \bar{z}] \leq P_z\} \quad (6)$$

を定義する。問題 1 に対しては、集合、

$$X_c = \bigcap_{i=1}^m X_i \quad (7)$$

が空でないと仮定する。また、問題 2 に対しては、集合、

$$X_t = X_c \cap X_z \quad (8)$$

が空でないと仮定する。

4. 問 題 の 定 式 化

前章に設定された問題では、制約式および目的関数は分布が未知の確率変数となる。そこで、それらの分布を、エルミート多項式を用いて正規分布のまわりに直交関数展開表示する。そうすると、確率制約 (3)、(4) はかなり複雑な非線形制約式となる。そこで以下では、補助変数を導入することにより、平均値と標準偏差だけを用いた確率制約式に変換することを考える。まず、確率変数 $g_i(x, a)$ (以下簡単のために変数 (x, a) を省略する) を次のように標準化する。

$$g_{is} = \frac{g_i - \bar{g}_i}{\sigma_{g_i}} \quad (9)$$

いま、 g_i の平均値まわりの k 次モーメントを μ_{ki} で表わすと、標準化された確率変数 g_{is} の平均値、標準偏差および平均値まわりの k 次モーメントは、それぞれ、0, 1 および $\mu_{ki}/\sigma_{g_i}^k$ となる。また、制約条件 (1) は、

$$g_{is} \geq -\bar{g}_i/\sigma_{g_i} \quad (10)$$

となる。

いま、 g_{is} の分布関数を $F_i(g_{is})$ とすると、確率制約 (3) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{Prob.}[g_i \geq 0] &= \text{Prob.}[g_{is} \geq -y_i] \\ &= 1 - F_i(-y_i) \\ &\geq P_i \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $x_i \triangleq \bar{g}_i/\sigma_{g_i}$ とおいた。

次に、分布関数 F_i を評価することを考える。一般に、標準化された確率変数 g_{is} の分布関数 $F_i(g_{is})$ は、エルミート多項式を用いることによって、標準正規分布のまわりに次のように展開できる¹¹⁾。

$$F_i(g_{is}) = \Phi(g_{is}) + \frac{c_{3i}}{3!} \Phi^{(3)}(g_{is}) + \frac{c_{4i}}{4!} \Phi^{(4)}(g_{is}) + \dots \quad (12)$$

ここに、 Φ : 標準正規分布。

$$c_{3i} = -\mu_{3i}/\sigma_{g_i}^3 = -\tau_{1i}, \quad \tau_{1i}; \text{ ひずみ度} \quad (13)$$

$$c_{4i} = \mu_{4i}/\sigma_{g_i}^4 - 3 = \tau_{2i}, \quad \tau_{2i}; \text{ とがり度} \quad (14)$$

$\Phi^{(k)}$; Φ の k 次導関数であり、 $k-1$ 次エルミート多項式 H_{k-1} で次のように表わされる。

$$\Phi^{(k)}(g_{is}) = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{2\pi}} e^{-(g_{is}^2/2)} \cdot H_{k-1}(g_{is}) \quad (15)$$

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(3)}(g_{is}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(g_{is}^2 - 1)e^{-(g_{is}^2/2)} \\ \Phi^{(4)}(g_{is}) &= \frac{g_{is}}{\sqrt{2\pi}}(3 - g_{is}^2)e^{-(g_{is}^2/2)} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

このようにして、(12)式において、5次以上の微小項を無視すると、確率制約(11)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{Prob.}[g_i \geq 0] &= 1 - F_i(-y_i) \\ &= \Phi(y_i) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}4!}e^{-(y_i^2/2)} \cdot (c_{4i}y_i^3 + 4c_{3i}y_i^2 \\ &\quad - 3c_{4i}y_i - 4c_{3i}) \\ &\geq P_i \end{aligned} \quad (17)$$

同様に、確率制約(4)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{Prob.}[z \geq \beta z] &= 1 - F_z(-y_z) \\ &= 1 - \Phi(y_z) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}4!}e^{-(y_z^2/2)} \cdot (c_{4z}y_z^3 \\ &\quad - 4c_{3z}y_z^2 - 3c_{4z}y_z + 4c_{3z}) \\ &\leq P_z \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{ここに、} y_z \triangleq (\beta - 1)\bar{z}/\sigma_z \quad (19)$$

とおいた。

特別の場合として、確率変数 g_i が正規分布である場合は、 c_{3i} 、 c_{4i} は 0 となるので、(17)式は次のようになる。

$$\Phi(y_i) \geq P_i \quad (20)$$

ここで、確率 P_i を標準正規分布関数 Φ によって、

$$P_i \triangleq \Phi(\lambda_i) \quad (21)$$

と表わすと、(20)式は、

$$\Phi(y_i) \geq \Phi(\lambda_i) \quad (22)$$

となる。 Φ は単調増加関数であるから、

$$y_i = \bar{g}_i/\sigma_{g_i} \geq \lambda_i \quad (23)$$

を得る。

したがって、 g_i が正規分布である場合には、確率制約(3)は、次の確定的非線形制約式と等価であることがわかる。

$$\bar{g}_i - \lambda_i \sigma_{g_i} \geq 0 \quad (24)$$

ここに、

$$\lambda_i = \Phi^{-1}(P_i) \quad (25)$$

同様に、確率制約(4)は、次式に変換できる。

$$(\beta - 1)\bar{z} - \lambda_z \sigma_z \geq 0 \quad (26)$$

ただし、

$$\lambda_z = \Phi^{-1}(1 - P_z) \quad (27)$$

上のように、 g_i および z が正規確率分布を持つ場合としては、次のように正規確率変数を加算的に含む場合が考えられる。すなわち、

$$g_i(x, a) = \sum_{j=1}^s a_{ij} g_{ij}(x) \quad (28)$$

$$f(x, c) = \sum_{j=1}^r c_j f_j(x) \quad (29)$$

ここに、 a_{ij} および c_j は正規確率変数である。このとき、(24)、(26)式は、次のようになる。

$$\sum_{j=1}^s \bar{a}_{ij} g_{ij}(x) - \lambda_i \left[\sum_{j,k=1}^s \overline{Aa_{ij} Aa_{ik}} g_{ij}(x) g_{ik}(x) \right]^{1/2} \geq 0 \quad (30)$$

$$(\beta - 1) \sum_{j=1}^r \bar{c}_j f_j(x) - \lambda_z \left[\sum_{j,k=1}^r \overline{Ac_j Ac_k} f_j(x) f_k(x) \right]^{1/2} \geq 0 \quad (31)$$

これらは、従来の結果から容易に導かれるものである¹³⁾。次に、 g_i および z が一般の分布をしている場合を考える。この場合は、正規分布のときのように、厳密な意味で(24)、(26)式のように変換できない。しかし、 λ_i, λ_z を(25)、(27)のように選んで、(24)、(26)の確定制約式を考えることは、(17)、(18)式において第2項目すなわち3次以上のモーメントの項を無視した第1近似としての意味を持つ。したがって、与えられた確率制約(3)、(4)を満たす真の最適解を見出すためには、 λ_i, λ_z を補助変数として、5. に述べるように調整すればよい。このような解法が可能なことは、次の事実からわかる。

【定理】 条件 $\lambda_i \geq 1/\sqrt{1 - P_i} \quad (i=1, 2, \dots, m)$ (32)

$$\lambda_z \geq 1/\sqrt{P_z} \quad (33)$$

の下に、確定的非線形制約式(24)、(26)は、確率制約(3)、(4)の十分条件となる。すなわち、 λ_i, λ_z を調整するさい、その上限はそれぞれ、 $1/\sqrt{1 - P_i}$ 、 $1/\sqrt{P_z}$ である。

【証明】 制約式(24)を満たす x の集合を、

$$X_i' = \{x | \bar{g}_i - \lambda_i \sigma_{g_i} \geq 0\} \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (34)$$

とする。 $x \in X_i'$ なる x に対して次の不等式が成立つ。

$$\begin{aligned} \text{Prob.}[g_i \geq 0] &= 1 - \text{Prob.}[g_i < 0] \\ &\geq 1 - \text{Prob.}[g_i - \bar{g}_i < -\lambda_i \sigma_{g_i}] \end{aligned} \quad (35)$$

ここで、Tchebychev の不等式を用いると、

$$\text{Prob.}[g_i - \bar{g}_i < -\lambda_i \sigma_{g_i}] \leq 1/\lambda_i^2 \quad (36)$$

がいえるから、条件(32)から、

$$\text{Prob.}[g_i \geq 0] \geq 1 - 1/\lambda_i^2 \geq P_i \quad (37)$$

がいえる。次に、(26)を満たす x の集合を、

$$X_z' = \{x | (\beta - 1)\bar{z} - \lambda_z \sigma_z \geq 0\} \quad (38)$$

とする。 $x \in X_z'$ なる x に対して次の不等式が成立つことが、前と同様にしてわかる。

$$\begin{aligned} \text{Prob}[z \geq \beta z] &= \text{Prob.}[z - \bar{z} \geq (\beta - 1)\bar{z}] \\ &\leq \text{Prob.}[z - \bar{z} \geq \lambda_z \sigma_z] \\ &\leq 1/\lambda_z^2 \end{aligned}$$

* (21)式の λ_i を形式的に(25)のように表現する。この値は解析的には与えられないが、標準正規分布関数表あるいは直接数値計算により容易に求められる。

$$\leq P_z \quad (39)$$

これで定理が証明された。

上の定理から、変換された確定制約に対する可能領域 $X_c' = \bigcap_{i=1}^m X_i'$ および X_z' は、2. に定義した、確率制約に対する可能領域 X_c および X_z の部分集合になっていることがわかる。すなわち、

$$X_c' \subset X_c \quad (40)$$

$$X_z' \subset X_z \quad (41)$$

また、 $X_i' = X_c' \cap X_z'$ とすると、

$$X_i' \subset X_i \quad (42)$$

となる。

ここで注意すべきことは、一般に、最適解は可能領域の境界上に存在するので、 λ_i, λ_z を(32), (33)のように選んで、可能領域を X_c' あるいは X_i' として計算すると、安全側の解になりすぎる。そこで、次章に示すように λ_i, λ_z を調整して、可能領域 X_c', X_i' を X_c, X_i にまで広げなければならない。

5. 計算アルゴリズム

前章において、確率制約(3), (4)は、確定制約(24), (26)のように変換できることを示した。また、 λ_i, λ_z を(25), (27)のように選んで、与えられた確率制約に対する第1近似とすることができることを述べた。この章では、この第1近似から出発して、 λ_i, λ_z を調整し、与えられた確率制約を満たす最適解を求めるアルゴリズムを示す。

まず準備として、前章に述べた手法を遂行するに当たって必要な諸量を計算しておく、次のようである。

$$\begin{aligned} g_i(x, \bar{a}) &= g_i(x, \bar{a}) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^q \left(\frac{\partial^2 g_i}{\partial a_j \partial a_k} \right) \overline{\Delta a_j \Delta a_k} \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{j,k,l=1}^q \left(\frac{\partial^3 g_i}{\partial a_j \partial a_k \partial a_l} \right) \overline{\Delta a_j \Delta a_k \Delta a_l} \\ &+ \frac{1}{24} \sum_{j,k,l,m=1}^q \left(\frac{\partial^4 g_i}{\partial a_j \partial a_k \partial a_l \partial a_m} \right) \overline{\Delta a_j \Delta a_k \Delta a_l \Delta a_m} \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{g_i}^2 &= \sum_{j,k=1}^q \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_j} \right) \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_k} \right) \overline{\Delta a_j \Delta a_k} + \sum_{j,k,l=1}^q \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_j} \right) \left(\frac{\partial^2 g_i}{\partial a_k \partial a_l} \right) \overline{\Delta a_j \Delta a_k \Delta a_l} + \frac{1}{12} \sum_{j,k,l,m=1}^q \left[3 \left(\frac{\partial^2 g_i}{\partial a_j \partial a_k} \right) \left(\frac{\partial^2 g_i}{\partial a_l \partial a_m} \right) \right. \\ &\left. + 4 \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_j} \right) \left(\frac{\partial^3 g_i}{\partial a_k \partial a_l \partial a_m} \right) \right] \overline{\Delta a_j \Delta a_k \Delta a_l \Delta a_m} - \frac{1}{4} \sum_{j,k,l,m=1}^q \left(\frac{\partial^2 g_i}{\partial a_j \partial a_k} \right) \left(\frac{\partial^2 g_i}{\partial a_l \partial a_m} \right) \overline{\Delta a_j \Delta a_k \cdot \Delta a_l \Delta a_m} + \dots \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \mu_{3i} &= \sum_{j,k,l=1}^q \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_j} \right) \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_k} \right) \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_l} \right) \overline{\Delta a_j \Delta a_k \Delta a_l} \\ &+ \frac{3}{2} \sum_{j,k,l,m=1}^q \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_j} \right) \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_k} \right) \left(\frac{\partial^2 g_i}{\partial a_l \partial a_m} \right) \overline{(\Delta a_j \Delta a_k \Delta a_l \Delta a_m - \Delta a_j \Delta a_k \cdot \Delta a_l \Delta a_m)} + \dots \end{aligned} \quad (45)$$

$$\mu_{4i} = \sum_{j,k,l,m=1}^q \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_j} \right) \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_k} \right) \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_l} \right) \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_m} \right) \overline{\Delta a_j \Delta a_k \Delta a_l \Delta a_m} + \dots \quad (46)$$

ただし、上の各式において、 $\Delta a_j \triangleq a_j - \bar{a}_j$ とおいた。また、偏微係数は、平均値 $a_j = \bar{a}_j$ に対して評価する(以下同じ)。上式は g_i に関するものであるが、 z に関しては、 g_i を f で、 a_j を c_j で置きかえると全く同様の式が得られる。

特に、 a_j が独立な正規確率変数である場合には、次のように簡単な表示式が得られる。このときは、 a_j の平均値と分散が与えられると容易に計算することができる。

$$\bar{g}_i = g_i(x, \bar{a}) + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 g_i}{\partial a_j^2} \overline{\Delta a_j^2} + \frac{1}{8} \sum_{j,k} \frac{\partial^4 g_i}{\partial a_j^2 \partial a_k^2} \overline{\Delta a_j^2 \Delta a_k^2} \quad (47)$$

$$\sigma_{g_i}^2 = \sum_j \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_j} \right)^2 \overline{\Delta a_j^2} + \sum_{j,k} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_i}{\partial a_j \partial a_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_j} \right) \left(\frac{\partial^3 g_i}{\partial a_j \partial a_k^2} \right) \right\} \overline{\Delta a_j^2 \Delta a_k^2} \quad (48)$$

$$\mu_{3i} = 3 \sum_{j,k} \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_j} \right) \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_k} \right) \left(\frac{\partial^2 g_i}{\partial a_j \partial a_k} \right) \overline{\Delta a_j^2 \Delta a_k^2} \quad (49)$$

$$\mu_{4i} = 3 \sum_{j,k} \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_j} \right)^2 \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_k} \right)^2 \overline{\Delta a_j^2 \Delta a_k^2} \quad (50)$$

ただし、上式において a に関する4次モーメントの項まで採用した。また、上式は g_i に関するものであるが、 z に関しても、 g_i を f で、 a_j を c_j で置きかえると全く同様の式が得られる。

以上の準備のもとに計算手順を考察しよう。まず第1近似として、 $\lambda_i^{(1)}, \lambda_z^{(1)}$ を、制約式および目的関数

が正規分布するものとして決定する。すなわち、第1近似を(25), (27)式から、

$$\lambda_i^{(1)} = \Phi^{-1}(P_i) \quad (51)$$

$$\lambda_z^{(1)} = \Phi^{-1}(1 - P_z) \quad (52)$$

に選ぶ。

$\lambda_i^{(1)}, \lambda_z^{(1)}$ の値が定まると、確定制約、

$$\bar{g}_i - \lambda_i^{(1)} \sigma_{gi} \geq 0 \quad (53)$$

$$(\beta - 1) \bar{z} - \lambda_z^{(1)} \sigma_z \geq 0 \quad (54)$$

の下に、 $\bar{z}$ を最小にする制御ベクトル $x^{(1)}$ を求める。その方法としては、Random Search 法、SUMT¹²⁾、こう配法、共役こう配法、Newton Raphson 法などをうまく組合せたものを考えればよい。このようにして、第1近似最適解 $x^{(1)}$ が求まると、(17)、(18)式から、制約を満たす確率、

$$P_i^{(1)} = \text{Prob.}[g_i \geq 0] \quad (55)$$

$$P_z^{(1)} = \text{Prob.}[z \geq \beta \bar{z}] \quad (56)$$

を計算する。これらの値を指定された確率 P_i 、 P_z と比較し、確率制約が満足されているかどうかを判定する。満足されていないものに対しては、補助変数を調整する。すなわち、次のステップで調整すべき補助変数は、

1) $P_i^{(1)} < P_i$ 、 $P_z^{(1)} < P_z$ に対応する λ_i または λ_z 、

2) 制約として効いている制約式に対応する λ_i または λ_z である。

1)、2)に対する調整には、次の方法を用いればよい。すなわち、第 k ステップの λ_i 、 λ_z を $\lambda_i^{(k)}$ 、 $\lambda_z^{(k)}$ とすると、第 $k+1$ ステップの $\lambda_i^{(k+1)}$ 、 $\lambda_z^{(k+1)}$ を次式によって求める。

$$\Phi(\lambda_i^{(k+1)}) - \Phi(\lambda_i^{(k)}) = P_i - P_i^{(k)} \quad (57)$$

これは次のように書きかえられる。

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_i^{(k+1)}) &= P_i + (P_i - P_i^{(1)}) + (P_i - P_i^{(2)}) + \dots \\ &\quad \dots + (P_i - P_i^{(k)}) \end{aligned} \quad (58)$$

すなわち、

$$\lambda_i^{(k+1)} = \Phi^{-1} \left\{ (k+1)P_i - \sum_{j=1}^k P_i^{(j)} \right\} \quad (59)$$

ただし、 $\lambda_i < 0$ としても意味がないので、

$$(k+1)P_i - \sum_{j=1}^k P_i^{(j)} \leq 0.5 \quad (60)$$

のときは、 $\lambda_i = 0$ とおけば良い。また、前節の定理により、

$$(k+1)P_i - \sum_{j=1}^k P_i^{(j)} \geq \Phi(1/\sqrt{1-P_i}) \quad (61)$$

のときは、 $\lambda_i = 1/\sqrt{1-P_i}$ と選べば十分である。

同様にして、

$$\lambda_z^{(k+1)} = \Phi^{-1} \left\{ 1 - (k+1)P_z + \sum_{j=1}^k P_z^{(j)} \right\} \quad (62)$$

ただし、

$$\lambda_z = \begin{cases} 0 & : 1 - (k+1)P_z + \sum_{j=1}^k P_z^{(j)} \leq 0.5 \\ \frac{1}{\sqrt{P_z}} & : 1 - (k+1)P_z + \sum_{j=1}^k P_z^{(j)} \geq \Phi(1/\sqrt{P_z}) \end{cases} \quad (63)$$

このようにして、 $\lambda_i^{(k+1)}$ 、 $\lambda_z^{(k+1)}$ が求まると、第1ス

テップと同じ計算を繰返す。

以上の計算手順にしたがって、確率制約(3)、(4)が満たされ、制約として効いている制約式の確率が制約値に達するまでステップを繰返す。

6. 数 値 例

制約式および目的関数が次のように与えられているものとする。

$$g_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2^3 - a_4 \geq 0 \quad (64)$$

$$g_2 = a_5 x_1 + a_6 x_2^2 - a_7 \geq 0 \quad (65)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (66)$$

$$z = c_1 x_1^2 + c_3 x_2^2 \quad (67)$$

上式で、係数 a_i および c_i が、独立な正規確率変数であるとする。このとき、3. に与えた問題1および2を考える。

制約(64)に対する確率制約を、等価な確定制約式に変換すると次のようになる。

$$\begin{aligned} G_1 &= \bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2^3 - \bar{a}_4 + \frac{1}{2} \bar{a}_2 x_2^3 (\ln x_2)^2 \left\{ \overline{\Delta a_3^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (\ln x_2)^2 (\overline{\Delta a_3^2})^2 \right\} - \lambda_1 \left[\overline{\Delta a_1^2} x_1^2 + \overline{\Delta a_2^2} x_2^2 \overline{\Delta a_3^2} \right. \\ &\quad \left. + \overline{\Delta a_3^2} (\bar{a}_2 x_2^3)^2 (\ln x_2)^2 + \overline{\Delta a_4^2} \right. \\ &\quad \left. + 2(\ln x_2)^2 x_2^2 \overline{\Delta a_3^2} \overline{\Delta a_2^2} \overline{\Delta a_3^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} (\overline{\Delta a_3^2})^2 \{ \bar{a}_2 x_2^3 (\ln x_2)^2 \}^2 \right]^{1/2} \geq 0 \end{aligned} \quad (68)$$

制約(65)は、正規確率変換を加算的に含む場合であるから、次のようになる。

$$\begin{aligned} G_2 &= \bar{a}_5 x_1 + \bar{a}_6 x_2^2 - \bar{a}_7 - \Phi^{-1}(P_2) \left[\overline{\Delta a_5^2} x_1^2 \right. \\ &\quad \left. + \overline{\Delta a_6^2} x_2^4 + \overline{\Delta a_7^2} \right]^{1/2} \geq 0 \end{aligned} \quad (69)$$

目的関数の確率制約は、次のように変換される。

$$\begin{aligned} G_z &= (\beta - 1) \left[\bar{c}_1 x_1^2 + \bar{c}_3 x_2^2 + \frac{1}{2} \bar{c}_1 x_1^2 (\ln x_1)^2 \left\{ \overline{\Delta c_2^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} (\ln x_1)^2 (\overline{\Delta c_2^2})^2 \right\} \right] - \lambda_z \left[\overline{\Delta c_1^2} x_1^2 \overline{\Delta c_2^2} \right. \\ &\quad \left. + \overline{\Delta c_2^2} \{ \bar{c}_1 (\ln x_1)^2 x_1^2 \}^2 + \overline{\Delta c_3^2} x_2^4 \right. \\ &\quad \left. + 2(x_1^2 \overline{\Delta c_1^2} \ln x_1)^2 \overline{\Delta c_1^2} \overline{\Delta c_2^2} + \frac{3}{2} (\overline{\Delta c_2^2})^2 \right. \\ &\quad \left. \times \{ \bar{c}_1 (\ln x_1)^2 x_1^2 \}^2 \right]^{1/2} \geq 0 \end{aligned} \quad (70)$$

次に、(13)、(14)式で与えられる係数を計算するために、 g_1 および z の3次および4次のモーメントを計算すると次のようになる。

$$\mu_{31} = 3 \bar{a}_2 x_2^3 \bar{a}_3 (\ln x_2)^2 \overline{\Delta a_3^2} \{ 2 \overline{\Delta a_2^2} + \bar{a}_2^2 (\ln x_2)^2 \overline{\Delta a_3^2} \} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \mu_{41} &= 3 \{ x_1^2 \overline{\Delta a_1^2} + x_2^2 \overline{\Delta a_3^2} \overline{\Delta a_2^2} + (\bar{a}_2 x_2^3)^2 (\ln x_2)^2 \overline{\Delta a_3^2} \\ &\quad + \overline{\Delta a_4^2} \}^2 \end{aligned} \quad (72)$$

$$\mu_{3z} = 3\bar{c}_1 x_1^3 \bar{c}_2^2 (\ln x_1)^2 \bar{\Delta} c_2^2 \{2\bar{\Delta} c_1^2 + \bar{c}_1^2 (\ln x_1)^2 \bar{\Delta} c_2^2\} \quad (73)$$

$$\mu_{4z} = 3\{x_1^2 \bar{\Delta} c_1^2 + (\bar{c}_1 x_1 \bar{c}_2)^2 (\ln x_1)^2 \bar{\Delta} c_2^2 + x_2^4 \bar{\Delta} c_3^2\}^2 \quad (74)$$

さて次に、係数の平均値および標準偏差が次の場合について、具体的な計算を行なってみよう。

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= 1, \sigma_{a_1} = 0.1, \bar{a}_2 = 1, \sigma_{a_2} = 0.1, \bar{a}_3 = 1, \\ \sigma_{a_3} &= 0.1, \bar{a}_4 = 1, \sigma_{a_4} = 0.1, \bar{a}_5 = 1, \sigma_{a_5} = 0.1, \\ \bar{a}_6 &= -1, \sigma_{a_6} = 0.1, \bar{a}_7 = 0, \sigma_{a_7} = 0.1, \bar{c}_1 = 1, \\ \sigma_{c_1} &= 0.1, \bar{c}_2 = 2, \sigma_{c_2} = 0.2, \bar{c}_3 = 2, \sigma_{c_3} = 0.2 \end{aligned}$$

まず、各係数を平均値でおきかえた場合を考える。このとき、制約領域は Fig. 1 の斜線部である。最適解を計算すると Table 1 のようになる。このとき、最適解は、 $g_1(x, \bar{a}) = 0$ の上にあり、 $g_1(x, a) \geq 0$ を満たす確率は約 0.5 であることがわかる。次に、問題 1 を考える。確率制約値を、 $P_1 = P_2 = 0.75, 0.9, 0.95$ として計算した結果を Table 2 に示す。このとき、

Fig. 1 Feasible region

Table 1

	x_1^*	x_2^*	$\bar{z}^*$	P_1	P_2	P_z	G_1	G_2	G_z
authors' algorithm	0.6665	0.3336	0.667	0.506	1	0.133	$8.7 \cdot 10^{-5}$	$5.6 \cdot 10^{-1}$	$6.7 \cdot 10^{-2}$
exact solution	2/3	1/3	2/3	—	—	—	—	—	—

Table 2

P_1, P_2	x_1^*	x_2^*	$\bar{z}^*$	P_1^*	P_2^*	P_z^*	G_1	G_2	G_z
0.750	0.7238	0.3652	0.792	0.750	1	0.125	$4.8 \cdot 10^{-6}$	$5.1 \cdot 10^{-1}$	$7.9 \cdot 10^{-2}$
0.900	0.7750	0.3998	0.921	0.900	1	0.111	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$4.5 \cdot 10^{-1}$	$8.6 \cdot 10^{-2}$
0.950	0.8061	0.4223	1.007	0.950	1	0.104	$5.1 \cdot 10^{-7}$	$4.1 \cdot 10^{-1}$	$1.0 \cdot 10^{-1}$

Table 3

P_1, P_2	P_z	x_1^*	x_2^*	$\bar{z}^*$	P_1^*	P_2^*	P_z^*	G_1	G_2	G_z
0.900	0.200	0.7750	0.3998	0.921	0.900	1	0.111	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$4.5 \cdot 10^{-1}$	$8.6 \cdot 10^{-2}$
0.900	0.100	0.7720	0.4711	1.041	0.961	1	0.100	$2.1 \cdot 10^{-1}$	$3.9 \cdot 10^{-1}$	$9.2 \cdot 10^{-7}$

G_1 が制約として効いているので、確率 P_1^* は指定された制約値をとる。 G_2 は制約として効いていないので P_2^* は制約値より大きくなっている。最適解の移動の様子を Fig. 1 に示す。図から、制約値が増すにつれて、より安全側の計画になることがわかる。次に、問題 2 を考える。 $\beta = 1.1, P_1 = P_2 = 0.9$ として、 $P_z = 0.2, 0.1$ の場合の結果を Table 3 に示す。 $P_z = 0.2$ のときは、 G_1 が制約として効き、 G_z は効いていないので、解は Table 2 と同じになっている。 $P_z = 0.1$ のときは、 G_z が制約として効いているので、 P_z^* は制約値に達している。

7. む す び

この論文では、不確定性を含む非線形計画問題を確率制約の手法によって取り扱った。制約式が満たされるべき確率を指定する場合および制約式の確率制約の他に目的関数の変動に対する確率制約を課した場合について、目的関数の期待値を最小にする最適計画問題を設定し、その解法を与えた。その結果、問題は確定非線形計画問題に帰着させて解くことができることを示すとともに、その計算アルゴリズムを与えた。さらに、数値例によって手法を説明し、その有用性を示した。なお、確率制約を変換した非線形制約式の関数の性質など研究すべき残された問題点は少くないが、これらは今後の課題としたい。

最後に、数値計算に協力された本学学生 坂井 末広（現三菱電機）安倍勉（現本学大学院）の両君に感謝する。なお、数値計算には、本学計算センター Tosbac-3400 を用いた。

参 考 文 献

- 1) 岩田・室津・岩壺：最適加工条件の設定に及ぼす因子誤差の影響，昭和 46 年度精機学会春季大会学術講演前刷，81/82
- 2) G. B. Dantzing : Linear Programming and Extensions, 499/512, McGraw-Hill (1963)
- 3) G. Hadlay : Nonlinear and Dynamic Programming, 159/184, Addison-Wesley (1964)
- 4) Y. Murotsu, F. Ohba and I. Ozawa : On a Solution of Stochastic Linear Programming, Proceedings of the Twentieth Japan National Congress for Applied Mechanics (1970)
- 5) A. Charnes & W. W. Cooper : Chance-Constrained Programming, Management Sci., 6, 73/79 (1960)
- 6) A. Madansky : Methods of Solution of Linear Programs under Uncertainty, Opns. Res., 10, 4, 463/471 (1962)
- 7) O. L. Mangasarian & J. B. Rogan : Inequalities for Stochastic Nonlinear Programming Problems, Opns. Res., 12, 143/154 (1964)
- 8) G. H. Symonds : Chance-Constrained Equivalents of Some Stochastic Programming Problems, Opns. Res., 16, 1152/1159 (1968)
- 9) D. N. Levedev : Concave-Convex Problems of Stochastic Programming under Conditions of Indeterminacy, Engineering Cybernetics, 1, 7/14 (1969)
- 10) A. Prekopa : On Probabilistic Constrained Programming, Proc. of the Princeton Symposium on Mathematical Programming, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1970)
- 11) H. Cramer : Mathematical Methods of Statistics, 221, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1963)
- 12) J. Kowalik & M. R. Osborne : Methods for Unconstrained Optimization Problems, 84/94, Elsevier (1968)
- 13) Y. Murotsu, F. Ohba and H. Itoh : On a Solution of Stochastic Nonlinear Programming Problems, Bulletin of University of Osaka Prefecture, Series A, 20-1 (1971)