時間を乗じた 2 乗評価に対する定数線形系の 最適定数フィードバック制御†

嘉 納 秀 明

大阪大学工学部 吹田市山田上
(昭和 46 年 7 月 26 日 受付)

On the Optimal Constant Feedback Control for Linear Time-Invariant Systems with Time-Multiplied Quadratic Performance Indices

Hideaki KANOH

(Faculty of Engineering, Osaka University, Suita)
(Received July 26, 1971)

The optimal control of linear time-invariant systems relative to time-multiplied quadratic performance indices is discussed. The problem is posed with an additional constraint that the control vector is a linear time-invariant function of the output vector rather than of the state vector. The degree of optimality assigning a physically meaningful measure of the "quality" of control systems which are not optimal is proposed and applied to this problem.

The necessary condition for minimizing matrix of feedback gains is obtained in the form of algebraic equations. The second and fourth order systems are examined in detail as examples.

1. 緒 言

定数線形系,

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

に対して, 2 乗評価,

$$J_0 = \int_0^\infty (x'Qx + u'Pu) dt \quad (2)$$

(ここに Q, P は定数正値対称行列)

を最小にする u を求める問題は良く研究され, その解も良く知られている [文献 1 p.787]. すなわち, 最適解は初期状態 x_0 に依存しない定数フィードバックであり, 代数リカッチ方程式,

$$A'R + RA - RBP^{-1}B'R + Q = 0 \quad (3)$$

の解 R によって,

$$u^* = -P^{-1}B'Rx \quad (4)$$

として与えられる.

しかし一方, 従来の制御理論においてよく採用されてきた ITSE, ISTSE など時間の荷重をかけた誤差 2 乗積分評価は整定時間を小さくおさえること, 選択性

にすぐれていることが研究されている¹³⁾. したがってこの評価を多変数系に拡張した評価関数,

$$J_k = \int_0^\infty (t^k x'Qx + u'Pu) dt \quad (k=1, 2, \dots) \quad (5)$$

を最小にする u を求める問題の解析もまた必要である.

この問題に対してはすでに F. T. Man & H. W. Smith²⁾ が研究し, 最適操作量はあるリカッチ方程式の解による定数フィードバックであることを示したが, 不幸なことに, この計算は誤りであったことを反例をもって B. Ramaswami ら³⁾ が示した. この問題に対する最適解は初期状態によって定まる時間の関数となるフィードバックであろうと考えられる.

本論文は上記の問題に対して, 評価関数 J_0 をとった場合と同じように, 初期状態に依存しない定数フィードバックだけに操作量を限定するという拘束条件をつけ加えて, その中から J_k を最小にするフィードバック定数を求める問題を考える. この制約は制御装置の簡単化のために必要と考えられる.

従来の最適制御理論においては最適解のもつ性質だ

† 制御理論シンポジウムで発表 (昭46・5)

けがのべられ、最適でない制御方式または装置がどの程度最適でないかを判定したり、最適でない2つの制御方式のどちらがより良いものであるかを数量的にあらわすことは考えられていなかった。前述の問題は系(1)に対し評価関数(5)を最小にする $u^*(t)$ を求めることはやめて、最適ではないが、拘束の中では最良のものを選ばうとするものであるから、なんらかの方法を導入しなければ解決することができない。そのために制御性能指数というべき量を導入し、制御系がどの程度の制御性能をもつかを定量的に評価する。この制御性能指数は系がどの程度最適に近いを示すものでもあるので最適と呼ぶことにして最適定数フィードバックを決定することを考える。

いっぽう、系(1)に対し評価(2)を最小にする操作量は(4)式のようにすべての状態量を計測しフィードバックするものであるが、系の出力を y とし、 y による定数フィードバックだけに操作量を限定するという拘束条件をつけ加えて、その中から J_0 を最小にする問題は不完全フィードバック^{4)~7)}または出力フィードバック問題⁹⁾と呼ばれ研究されている。この問題もその限定のために最適ではない操作量の中から最良のものを求める問題となるので、最適を用いて解決できる⁹⁾。

したがって本論文では系(1)に対して、評価(5)を最小にする出力フィードバック定数の決定を考える。この結果は、評価(5)は $k=0$ のとき評価(1)を含むということと、ここでもちいられる最適は2種類であるが、その1つがLevierらの出力フィードバック問題⁹⁾にもちいられた評価を特殊な場合として含むという意味で従来の研究の一般的拡張である。

2. 最適度の定義

最適度の一般的な定義は他の論文にゆずり⁹⁾、本論文で用いる2種類の最適度についてのべる。まず、系(1)に対して、出力と操作量を、

$$y = Cx \quad (6)$$

$$u = -Ky \quad (7)$$

とする。 C は与えられた定数行列、 K は決定されるべき定数行列である。このとき評価関数(2)を計算すると、

$$J_0 = x_0' S x_0 \quad (8)$$

ここに S は正値対称行列で、

$$S(A - BKC) + (A' - C'K'B)S + Q + C'K'PKC = 0 \quad (9)$$

より求められる*。ただし、系 $\dot{x} = (A - BKC)x$ は漸近安定であると仮定する。

(8)式のように J_0 は x_0 の関数として求められるが、最適度とは考えられうるすべての初期状態に対する制御を考えてそれを総合するような評価値を与えることであるから、 J_0 の初期状態の依存性をどのように脱するかが問題となる。そこで考えられる初期状態について2つの場合を想定しよう。

まず第1は初期状態の分布が正規分布である場合、その分布の確率密度関数を、

$$p(x_0) = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^n |G|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_0 - x_s)' G^{-1} (x_0 - x_s)\right) \quad (10)$$

とする。ここに x_s は初期状態分布の平均値、 G は共分散行列とする。このとき J_0 の期待値、

$$J_{0s1} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_0) x_0' S x_0 dx_0 = \text{tr}(SG) + x_s' S x_s \quad (11)$$

は制御系にあらゆる初期状態を考慮した1つの値を与えるのでこれを最適度にとれる。

第2に初期状態の分布が一樣である場合には、 J_0 の値が C 以下で制御される初期状態の集合 U_c を考え、 U_c の体積を大きくする制御系ほど最適に近いと規定する。すなわち、できるだけ多くの初期状態を J_0 の値が C 以下で制御できる制御系を最良と考えるわけである。 $J_0 \leq C$ となる U_c の体積 V_c は、

$$V_c = \int_{U_c} dx_0 \quad (U_c : (x_0 : x_0' S x_0 \leq C)) = \frac{\sqrt{\pi}^n}{P\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \frac{C^{n/2}}{\sqrt{|S|}} \quad (12)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}^n}{P\left(\frac{n}{2} + 1\right)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{(2\pi)^n}}{2 \cdot 4 \cdots n} & n : \text{偶数} \\ \frac{2\sqrt{(2\pi)^{n-1}}}{1 \cdot 3 \cdots n} & n : \text{奇数} \end{cases}$$

となり〔文献12〕, p.101 参照〕, $C^{n/2}$ に比例する。この比例定数の大きいものほど制御性能が良いことになるから、行列式 $|S|$ の値の小さいものほどよいといえる。このために $|S|$ を第2の場合の最適度と定め $J_{0s2} = |S|$ とする。

以上によって2つの場合に対する最適度 J_{0s1} , J_{0s2} を得た。

3. 問題の変換

本論文で扱う問題は、フィードバック系、

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0 \\ y = Cx \\ u = -Ky \end{cases} \quad (13)$$

* 後出のMacFarlaneの補助定理の $k=0$ の場合の関係を利用すると得られる。

に対して, 評価関数,

$$J_k = \int_0^\infty (t^k \mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} + u' \mathbf{P} u) dt \quad (5)$$

に関する制御性能を最良にする定数行列 $\mathbf{K}$ を求めることである. 評価関数 (5) はそのままでは扱うのに困難であるから, これと等価な (1) 式のタイプの評価関数に変換できれば扱いやすい. このために次の MacFarlane¹⁰⁾ による補助定理を用いる.

補助定理 (MacFarlane)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

のとき,

$$\begin{aligned} J_R &= \int_0^\infty t^k \mathbf{x}' \mathbf{Q}_0 \mathbf{x} dt \\ &= \int_0^\infty k! \mathbf{x}' \mathbf{Q}_k \mathbf{x} dt \\ &= k! \mathbf{x}_0' \mathbf{Q}_{k+1} \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

である. ただし, $\mathbf{Q}_r (r=1, k+1)$ は次式で求める.

$$\mathbf{A}' \mathbf{Q}_{r+1} + \mathbf{Q}_{r+1} \mathbf{A} + \mathbf{Q}_r = \mathbf{0} \quad (r=0, 1, \dots, k)$$

この補助定理によって, 評価関数 (5) は,

$$J_k = \int_0^\infty (k! \mathbf{x}' \mathbf{Q}_k \mathbf{x} + u' \mathbf{P} u) dt \quad (14)$$

に変換される. ここに $\mathbf{Q}_r (r=1, k)$ は次式で求められる.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}' - \mathbf{C}' \mathbf{K}' \mathbf{B}') \mathbf{Q}_{r+1} + \mathbf{Q}_{r+1} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{C}) + \mathbf{Q}_r &= \mathbf{0} \\ (r=0, 1, \dots, k-1) \end{aligned} \quad (15)$$

J_k の値はさらに,

$$J_k = \mathbf{x}_0' \mathbf{S}_k \mathbf{x}_0 \quad (16)$$

として求められる. $\mathbf{S}_k$ は次式の解である.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}' - \mathbf{C}' \mathbf{K}' \mathbf{B}') \mathbf{S}_k + \mathbf{S}_k (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{C}) + k! \mathbf{Q}_k \\ + \mathbf{C}' \mathbf{K}' \mathbf{P} \mathbf{K} \mathbf{C} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (17)$$

したがって, 前節で定義した 2 種類の最適度を,

$$J_{ks1} = \text{tr}(\mathbf{S}_k \mathbf{G}) + \mathbf{x}_s' \mathbf{S}_k \mathbf{x}_s \quad (18)$$

$$J_{ks2} = |\mathbf{S}_k| \quad (19)$$

ととることができる. これによって問題は (13) の系と (15), (17) 式のもとで, J_{ks1} または J_{ks2} を最小にする定数行列 $\mathbf{K}$ を求めることである.

この問題についての一般的考察を行なうまえに, 具体的性質を知るために 2 次系における数値例を計算してみる. 系は,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (20)$$

とし, 評価を,

$$J_k = \int_0^\infty \left[t^k \mathbf{x}' \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + w u^2 \right] dt \quad (k=1, 2, \dots) \quad (21)$$

ととる.

$$u = -K_1 x_1 - K_2 x_2 \quad (22)$$

とすると, J_{ks1}, J_{ks2} は K_1, K_2 の関数となり, パラメータ平面 K_1-K_2 でそれぞれの等高線を描くことができる. Fig. 1, 2, 3 は $a_1=a_2=q_1=1, q_2=0, w=0.1, \mathbf{x}_s=\mathbf{0}, \mathbf{G}=\begin{bmatrix} 1.0 & 0.9 \\ 0.9 & 1.0 \end{bmatrix}$ の場合の J_{ks1} の等高線を $k=1, 5, 10$ の場合について描いたものである. k の増加につれて J_{ks1} の曲面は最小点を底として急峻になってくる. Fig. 4 は k と J_{ks1}, J_{ks2} の最小点との関係を示している. $k=0$ の場合においては, 完全フィードバックの場合 $\mathbf{x}_s, \mathbf{G}$ のいかんを問はず J_{0s1}, J_{0s2} 最小値は同一であったが⁹⁾, $k \geq 1$ においてはこの関係は失なわれる. Fig. 5 は Fig. 4 の J_{ks1} の最小値に対応する系の特性根の移動であり, k が増加するにつれて実数部のみが左に移動する. すなわち, 減衰の大きい特性根が選ばれ, 整定時間が小さくおさえられる.

4. J_{ks1} および J_{ks2} が最小をとるための必要条件

一般の場合について, $\mathbf{K}$ の要素の関数である J_{ks1}, J_{ks2} が最小となるための条件について求める. 最小のためには $\mathbf{K}$ の要素 K_{ij} についての微分が 0 となる必要があるから,

$$\begin{cases} \frac{\partial J_{ks1}}{\partial K_{ij}} = \text{tr} \left(\mathbf{G}_1 \frac{\partial \mathbf{S}_k}{\partial K_{ij}} \right) = 0 \\ \frac{\partial J_{ks2}}{\partial K_{ij}} = \text{tr} \left(\mathbf{S}_k^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_k}{\partial K_{ij}} \right) | \mathbf{S}_k | = 0 \end{cases} \quad (23)$$

ただし, $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G} + \mathbf{x}_s \mathbf{x}_s'$ となり, いずれも $\frac{\partial \mathbf{S}_k}{\partial K_{ij}}$ を計算することが必要となるので, (15), (17) 式を K_{ij} で微分する.

Fig. 1 The contour lines of J_{ks1}/J_{ks1}^* for $k=1$

 Fig. 2 The contour lines of J_{ks1}/J_{ks1}^* for $k=5$

 Fig. 3 The contour lines of J_{ks1}/J_{ks1}^* for $k=10$

 Fig. 4 Minimum points of J_{ks1} and J_{ks2} for $k=1\sim 10$

 Fig. 5 Poles of feedback system corresponding to minimizing feedback for J_{ks1}

$$(A' - C'K'B') \frac{\partial Q_{r+1}}{\partial K_{ij}} + \frac{\partial Q_{r+1}}{\partial K_{ij}} (A - BKC) - C' \frac{\partial K'}{\partial K_{ij}} B' Q_{r+1} - Q_{r+1} B \frac{\partial K}{\partial K_{ij}} C + \frac{\partial Q_r}{\partial K_{ij}} = 0 \quad (r=0, 1, \dots, k-1) \quad (24)$$

$$(A' - C'K'B') \frac{\partial S_k}{\partial K_{ij}} + \frac{\partial S_k}{\partial K_{ij}} (A - BKC) + C' \frac{\partial K'}{\partial K_{ij}} (PKC - B'S_k) + (C'K'P - S_k B) \frac{\partial K}{\partial K_{ij}} C + k! \frac{\partial Q_k}{\partial K_{ij}} = 0 \quad (25)$$

(24) と (25) 式の解は、

$$\frac{\partial Q_{r+1}}{\partial K_{ij}} = \int_0^\infty e^{(A' - C'K'B')\tau} \left(-C' \frac{\partial K'}{\partial K_{ij}} B' Q_{r+1} - Q_{r+1} B \frac{\partial K}{\partial K_{ij}} C + \frac{\partial Q_r}{\partial K_{ij}} \right) e^{(A - BKC)\tau} d\tau \quad (26)$$

$$\frac{\partial S_k}{\partial K_{ij}} = \int_0^\infty e^{(A' - C'K'B')\tau} \left(C' \frac{\partial K'}{\partial K_{ij}} (PKC - BS_k) + (C'K'P - S_k B) \frac{\partial K}{\partial K_{ij}} C + k! \frac{\partial Q_k}{\partial K_{ij}} \right) e^{(A - BKC)\tau} d\tau \quad (27)$$

とかけるから [文献 12, p.175 参照],

$$\text{tr} \left(H \frac{\partial S_k}{\partial K_{ij}} \right) = \text{tr} \left(F_0 \left(C' \frac{\partial K'}{\partial K_{ij}} (PKC - BS_k) + (C'K'P - S_k B) \frac{\partial K}{\partial K_{ij}} C \right) + k! \frac{\partial Q_k}{\partial K_{ij}} \right) \quad (28)$$

となる。ここに H は J_{ks1} を考えるときは $H=G_1$ となり、 J_{ks2} を考えるときは $H=S_k^{-1}$ ととる。また F_0 は、

$$F_0 = \int_0^\infty e^{(A - BKC)\tau} H e^{(A' - C'K'B')\tau} d\tau$$

ゆえに、

$$(A - BKC)F_0 + F_0(A' - C'K'B') + H = 0 \quad (29)$$

を満たす。(28) 式右辺第2項 $\text{tr} \left(F_0 \frac{\partial Q_k}{\partial K_{ij}} \right)$ を計算する。(26) 式から、

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left(F_0 \frac{\partial Q_k}{\partial K_{ij}} \right) \\ &= \text{tr} \left(F_1 \left(-C' \frac{\partial K'}{\partial K_{ij}} B' Q_k - Q_k B \frac{\partial K}{\partial K_{ij}} C \right) + F_1 \frac{\partial Q_{k-1}}{\partial K_{ij}} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left(F_l \frac{\partial Q_{k-l}}{\partial K_{ij}} \right) \\ &= \text{tr} \left(F_{l+1} \left(-C' \frac{\partial K'}{\partial K_{ij}} B' Q_{k-l} - Q_{k-l} B \frac{\partial K}{\partial K_{ij}} C \right) + F_{l+1} \frac{\partial Q_{k-l-1}}{\partial K_{ij}} \right) \quad (l=1, 2, \dots, k-2) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left(F_{k-1} \frac{\partial Q_1}{\partial K_{ij}} \right) \\ & = \text{tr} \left(F_k \left(-C' \frac{\partial K'}{\partial K_{ij}} B' Q_1 - Q_1 B \frac{\partial K}{\partial K_{ij}} C \right) \right) \quad (32) \end{aligned}$$

ここに $F_1, F_2, \dots, F_k$ は,

$$F_r(A' - C'K'B') + (A - BKC)F_r + F_{r-1} = 0 \quad (r=1, 2, \dots, k) \quad (33)$$

によって求められる。いま,

$$\begin{cases} M = (PKC - B'S_k)F_0C' \\ M_r = B'Q_{k-r+1}F_rC' \quad (r=1, 2, \dots, k) \end{cases} \quad (34)$$

とおけば, m_{ij}, m_{stj} をおのおの M, M_s の (i, j) 要素として,

$$\text{tr} \left(H \frac{\partial S_k}{\partial K_{ij}} \right) = 2 \left(m_{ji} - k! \sum_{s=1}^k m_{stj} \right) \quad (35)$$

となる。このことは任意の i, j について成り立つから,

$$M - k!(M_1 + M_2 + \dots + M_k) = 0 \quad (36)$$

が J_{ks1}, J_{ks2} が最小となるための必要条件である。ゆえに以上をまとめると次のようになる。

出力フィードバック系 (13) において, 評価関数 (5) に関して (18) または (19) で定義される最適値 J_{ks1} または J_{ks2} が $K=K^*$ において最小になるためには K^* は次の方程式を満たすことが必要である。

$$(A' - C'K'B')Q_{r+1} + Q_{r+1}(A - BKC) + Q_r = 0 \quad (r=0, 1, \dots, k-1) \quad (15)$$

$$(A' - C'K'B')S_k + S_k(A - BKC) + C'K'PKC + k!Q_k = 0 \quad (17)$$

$$(A - BKC)F_0 + F_0(A' - C'K'B') + H = 0 \quad (29)$$

$$(A - BKC)F_{r+1} + F_{r+1}(A' - C'K'B') + F_r = 0 \quad (r=0, 1, \dots, k-1) \quad (33)$$

$$PKCF_0C' - B'S_kF_0C' - k!B' \left(\sum_{s=1}^k Q_{k-s+1}F_s \right) C' = 0 \quad (36)'$$

上の条件は $k=0$ の場合を含んでおり, このときは (15), (33) 式は不要になる。(17), (29), (36)' の方程式の組は Levier ら⁸⁾ が $k=0$ の場合に対して, J_{ks1} について, $G=I, x_s=0$ として求めた必要条件を含む。

5. J_{ks1} または J_{ks2} の最小を求める 数値計算

J_{ks1}, J_{ks2} の最小を求めるには必要条件から, F_s, Q_s ($s=0, 1, \dots, k$) S_k, K を求めればよいことになる。これらの連立方程式は非線形の上未知数の数も多いので解くのはくりかえし演算を用いる必要があり, [8, p. 47] または [9] で用いられている方法と全く同様にくりかえし公式が得られるが, 著者は数値計算としては, K に適当な初期値を与え, (15), (17) 式から

S_k を求め, これによって J_{ks1}, J_{ks2} の値を計算し, Zangwil¹¹⁾ の改良した Powell 法による微分を用いない共役こう配法を用いた。これによれば, KC の要素がつくるパラメータ空間での極値探索となる。

5.1 4 次系の定数出力フィードバック問題

Fig. 6 に示すように 1 次遅れ要素が 4 個結合した 4 次系を考える。このとき出力として 4 つの要素の状態変数のうちどれをとるかによってフィードバックの効果がどのように変わるかを検討してみる。このとき系の方程式は,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_2}{T_2} & -\frac{1}{T_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_3}{T_3} & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_4}{T_4} & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{A_1}{T_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (38)$$

となり, 操作量は,

$$u = -(K_1x_1 + K_2x_2 + K_3x_3 + K_4x_4) \quad (39)$$

である。評価関数を,

Fig. 6 4 th order constant feedback system

Table 1 The degree of optimality of output feedback control for 4 th order system

No.	Nun. of F. B.	K_1	K_2	K_3	K_4	J_{ks1}
1	4	0.85	0.91	0.51	0.10	2.69
2	3	0.84	0.89	0.58	*	2.71
3	3	0.76	1.15	*	0.30	2.85
4	3	1.32	*	0.97	-0.032	3.19
5	3	*	1.03	0.23	0.035	3.21
6	2	0.64	1.20	*	*	3.04
7	2	1.33	*	0.95	*	3.20
8	2	1.58	*	*	0.46	3.99
9	2	*	1.01	0.26	*	3.22
10	2	*	1.15	*	0.15	3.28
11	2	*	*	0.68	-0.18	5.02
12	1	1.62	*	*	*	4.65
13	1	*	1.17	*	*	3.37
14	1	*	*	0.50	*	5.24
15	1	*	*	*	0.19	7.03
16	0	*	*	*	*	8.25

 Fig. 7 Relations of J_{k81} to k in various output feedback systems

 Fig. 8 Relations of J_{k82} to k in various output feedback systems

$$J_k = \int_0^\infty (t^k (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + u^2) dt \quad (40)$$

にとり, J_{k81} に対しては, 初期状態の分布として平均値, 共分散行列をそれぞれ, $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$, $\mathbf{G} = \mathbf{I}$ ととる. $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1.0$ の場合について数値計算例を示す. まず Table 1 は出力としてとり出す状態量の数と位置との関係を J_{k81} について計算したもの $k=2$ の場合の結果である. これによれば, x_3, x_4 をフィードバックするよりも x_1, x_2 のフィードバックの効果のほうが大きいことがわかる. また3個の状態量をフィードバックするには No. 2 が, 2個では No. 6 が, 1個では No. 13 が J_{k81} を最小にするものである. このように, 出力の位置と数に対してなんらかの拘束または測定コストが課せられているときは, 最適性を用いてその中で最良のものを選ぶことができる.

Fig. 7, Fig. 8 は k と J_{k81}, J_{k82} との関係を示したものであり, 出力の位置と数についての組合せが良いかということを示すとともに, k の増加にしたがって

 Fig. 9 Poles of 4th order feedback system corresponding to minimizing feedback for J_{k81}

 Fig. 10 Poles of 4th order feedback system corresponding to minimizing 4th order feedback J_{k81}

各組合せに対する最適度が分離してゆくことを示し、 k を大きくすることが評価の感度を高めていることがわかる。Fig. 9, Fig. 10 は完全フィードバックすなわち No. 1 について、 J_{RS1} , J_{RS2} を最小にするフィードバックがなされた場合の系の特性根と k との関係を示している。2 次系の場合同様実数部が k の増加とともに左に移動するのがみられる。このことは時間を乗じた評価関数は整定時間を小さくし、選択性にすぐれているという古典理論での結論が多変数系でも成り立つことを示すものである。

6. 結 言

時間のかかった 2 乗評価による定数線形系の最適制御問題を操作量を定数出力フィードバックに限定して、最良のフィードバック係数を求めることを考えた。このために、かならずしも最適でない制御方式が最適からどの程度ずれたものかを定量的に評価する最適度の概念を用いて解析を行なった。最良のフィードバック係数が満たすべき必要条件が得られたが、これは従来結果を含むような拡張した形であることを示した。2 次系および 4 次系について数値例を示し、フィードバックの数と位置の関係、乗ずる時間の次数の影響、特性根の位置などについて具体的に性質を明らかにした。

これらの数値計算は京都大学大型計算センターにて行なったものである。

終わりに臨み、日ごろ懇篤なる指導と助言をいただいている大阪大学増淵正美教授に深厚なる謝言を表するとともに、資料の整理、数値計算に協力いただいた同学大学院生岩見秀文君の労を謝す。

参 考 文 献

- 1) M. Athans & P. L. Falb : Optimal Control, p. 787, McGraw-Hill (1966)
- 2) F. T. Max & H. W. Smith : Design of Linear Regulators Optimal for Time-Multiplied Performance Indices, IEEE Trans. **AC-14**, 527/529 (1969)
- 3) B. Ramaswami & K. Ramar : Comments on "Design of Linear Regulators Optimal for Time-Multiplied Performance Indices", IEEE Trans. **AC-15**, 497 (1970)
- 4) Z. V. Rekasius : Optimal Linear Regulators with Incomplete State Feedback, IEEE Trans **AC-12**, 296/299 (1967)
- 5) K. P. Dabke : Suboptimal Linear Regulators with Incomplete State Feedback, IEEE Trans. **AC-15**, 384/386 (1970)
- 6) K. P. Dabke : Linear Control with Incomplete State Feedback and Known Initial-state Statistics, Internatl. J. Control, **11-1**, 133/141 (1970)
- 7) K. P. Dabke : Suboptimal Linear Regulators with Incomplete State Feedback, IEEE Trans. **AC-15**, 120/122 (1970)
- 8) W. S. Levine & M. Athans : On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gain for Linear Multivariable Systems, IEEE Trans. **AC-15**, 44/48 (1970)
- 9) 嘉納 : 最適制御問題における最適度について, 日本機械学会論文集 **38-311**, (1972)
- 10) A. G. J. MacFarlane : The Calculation of Functional of the Time and Frequency Response of a Linear Constant Coefficient Dynamical System, Quart. J. Mech & Applied Math., Vol. 16-part 2, 259/271 (1963)
- 11) W. I. Zangwill : Minimizing a Function without Calculating Drivative, Computor J. Vol. 10, 293/296 (1967)
- 12) R. Bellman : Introduction to Matrix Analysis, P. 101 p. 175, McGraw-Hill (1960)
- 13) 増淵 : 最適制御入門, p. 15/17 (オーム社)