フロー・ショップとそのスケジュールの解析†

関 口 恭 毅・小 山 昭 一・三 浦 良 一

北海道大学工学部 札幌市北区北 13 条西 8 丁目

(昭和 46 年 12 月 6 日 受付)

Flow Shop and Analysis of the Schedules

Yasuki SEKIGUCHI, Shōichi KOYAMA and Ryōichi MIURA

(Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo)

(Received December 6, 1971)

A definite description of the flow shop scheduling problems and their analytic results are presented here.

A job shop can be regarded as consisting of three kinds of components, i.e. the work station, the intermediate pool and the transport way. The reverse flow shop is defined as a shop having a flow direction opposite to that of the primal flow shop.

It makes our problems more practical and more flexible to introduce two more concepts; one is the initial condition and the other is the terminal condition. They represent the desired shapes at the beginning and at the end of the Gantt chart of the solution, respectively. Also, a generalized objective function is adopted, which can be used to estimate the idling cost of any set of work stations, the rate of operations in the shop, etc.

On the basis of these ideas, two types of deterministic scheduling problems (the Primal Problems) and their Reverse Problems (the same types of problems concerned with the reverse flow shop) are defined.

The authors are sure that the separation of the definition of shops from that of problems makes it possible to systemize various job shop problems and to utilize scheduling theory for system design.

The main results can be stated briefly as follows.

(1) A theorem which gives one of the principal methods to get the lower bounds of a class of functions including the objective function adopted.

(2) Four theorems concerned with the properties of the solutions and the structures of our generalized primal problems.

(3) Two theorems stating the mutuality of the solutions of the primal and the reverse problems.

These results would be very useful for the construction of the effective algorithms for the solution of the scheduling problems.

1. 緒 言

システムの最適化問題においては、たとえばプラント配置、資源配分、ライン・バランシングなどのように最適な順列あるいは組合わせを求めることに帰着さ

れる場合が非常に多い。このような問題では、そのシステムの一般的記述の方法が不十分であり、かつ実用的な組合わせ理論の応用も未発達であることが問題の解決を困難にしていると思われる。

本論文では、最適な順列を求める問題の典型であるフロー・ショップ・スケジューリングを取り上げる。

† 第8回制御理論部会で一部発表 (昭 45-5)

Fig. 1 A schematic representation of (a) job shop and (b) flow shop

フロー・ショップはジョブ・ショップの中で最も扱いやすいシステムであって、これに関する論文も相当多数公表されている。しかし、これまでの研究では作業の開始条件や仕掛量に関する設定が画一的であり、また作業の終了条件についてはほとんど考慮されていない。これら諸点を改善することによって、より多くの現実の問題に適用可能な形に問題を設定できると考える。

いっぽう、最適スケジューリングはシステムの最適な運用を目指すものであると言えるが、それに先立って、どのようなシステムを採用するかが問題である。工学的な立場からすればいく種類かのシステムを比較検討して、これを決定することが必要であって、仕事場としてのショップを相互に比較する合理的な方法が望まれる。そのためには、スケジューリング問題を解決するだけでなく、一般的なショップの明確な記述法を確立し、これに基づいてショップの一般的性質を解明することが必要である。従来のフロー・ショップ問題の設定では仕事場であるショップとそこで処理される仕事とを混然と記述している。著者らは、ショップそのものの十分な定義を与えたとともに、ここで処理される仕事はショップと別個に規定しなければならないと考える。

以上の観点から本論文では、2. でショップの概念を明確にし、ショップおよび仕事に関する実用的な制約

の導入を可能にすることによって、一般的で応用し易い形に問題を設定する。3. においては前章で設定した問題の一般的性能を定理の形にまとめ、4. ~5. では溜り場容量ゼロおよび無限大とした具体的な場合のフロー・ショップの性質を詳細に検討している。これらの諸性質は、従来からの眼目である高効率の解法アルゴリズムの構成に有益であるばかりでなく、システム相互間の比較と最適設計への応用も考慮した、より広い視野からの解析を可能にするものであると考える。続いて 6. では解析の諸結果をまとめ、それに対する考察を述べる。

2. 問題の設定

2.1 一般的ジョブ・ショップとフロー・ショップ

従来、ショップの一般的規定は必ずしも明確ではない。著者らはこれを、いく種類かの作業場 (work station) と各作業場間の運搬径路 (transport way) および運搬径路の途中にある仕掛仕事の溜り場 (intermediate pool) から成ると規定するのが適当であるとする。このショップに与えられる仕事 (job) はいくつかの作業 (operation) から成っており、各作業はその種類によって適当な作業場で処理される。ある作業場へ作業が到着してもすぐにはその処理が開始されず、順番を待たねばならない場合がある。このような作業を格納するのが溜り場である (Fig. 1 (a)).

3つの構成要素のとり方によってジョブ・ショップの形態は種々に変化する。従来普通に“ジョブ・ショップ”といていたものは、上述の考え方によればショップ内の各作業場がすべて異なっており、運搬径路は任意の作業場間にあり、溜り場の容量には制限のないシステムであると考えられることができる。フロー・ショップは従来处理される仕事の性質により規定されてきたが、ここでは仕事の記述とは独立にジョブ・ショップの中で運搬径路が特殊なものであると考え、次のように定義する (Fig. 1 (b)).

【定義】(フロー・ショップ) ショップの入口からは1種類の作業場へのみ運搬径路があり、各種の作業場は他の1種類の作業場または出口への運搬径路しか持たず、しかも出口への運搬径路は1種類の作業場のみが持っているジョブ・ショップをフロー・ショップという。

以上はフロー・ショップの基本概念を明らかにする

ものであるが、問題を明確に設定するにはまだ不十分である。フロー・ショップ問題はショップの制約ばかりでなく仕事の与え方によっても種々に変化する。そこで次の 2 節では問題を単純化し、かつ厳密にするのに必要な、フロー・ショップと仕事に対する制約を述べる。2.4 以後で単に“フロー・ショップ”あるいは“仕事”というときは、おのおの 2.2 あるいは 2.3 の制約に従うものを指すものとする。

2.2 フロー・ショップに関する制約

(1) 各作業場は同時に 2 個以上の作業を処理することはない。(2) 各作業に対し、それを処理できる作業場は 1 つしかない。(3) 考えているスケジュールを作業場 p が実施できるようになる時刻 ϕ^p がわかつてい。 $\phi^p (p=1, 2, \dots, M)$ はスケジュールのガントチャートの出発点の形を決定するものであり、これを下記のように変形し、 T_0 を初期条件と呼ぶことにする。

$$T_0 = [0, \tau_0^2, \dots, \tau_0^M] \quad \text{ただし, } \tau_0^p = \phi^p - \phi^{p-1} \quad (1)$$

いっぽう、ガントチャートの終点の望ましい形を T_∞ で示すものとする。これは $T_\infty = [\tau_\infty^1, \tau_\infty^2, \dots, \tau_\infty^{M-1}, 0]$ の形で与えられるものとし、終了条件と呼ぶことにする。ここで τ_∞^p は作業場 p が作業場 $p+1$ よりも τ_∞^p だけ早くスケジュールを完了するのが望ましいことを示す。(4) 終了条件は自由であるか、あるいは確定的に与えられる。(5) 各作業場間で仕事の運搬に要する時間は無視できる。(6) 作業場は作業不能の状態になることがなく、必要な作業員は常に供給できるものとする。

2.3 仕事と作業に関する制約

(1) 仕事は同時に 2 つ以上の作業場で処理されることがない。(2) 仕事は処理の途中で取り消されることがなく必ず完成される。(3) 同一の仕事が複数個あってもすべて異なった種類の仕事であるとする。(4) スケジュールするすべての仕事が既知で、いつでも処理を開始できる。(5) 各作業の処理に要する時間は既知で、これには準備時間も含んでおり、スケジュールによって変化しない。(6) 各作業は開始されたら中断されることがなく完了される。(7) 各作業はそれに先行する作業がすべて完了してから開始される。(8) 各作業は先行する作業がすべて完了し、必要な作業場が使用中でなければいつでも処理を開始される。(9) 各仕事の納期は十分先であってスケジュールリングにさいして無視して良い。

2.4 記号

本論文ではフロー・ショップ内の作業場に入口から

出口に向かって通し番号を付し、仕事にも適当に通し番号を付すものとする。変数にそれがどの作業場または仕事に関するものかを示す必要のあるときには、作業場番号は p, q, r などで示して変数の右肩に付し、仕事の番号は i, j, k などで示して変数の右下に付すのを原則とする。次に主たる記号を列記する。

M : フロー・ショップ内の作業場の個数, N : スケジュールに組み入れる仕事の個数, W^p : 入口から数えて p 番目の作業場, $\{P\}_w, \{p_1, \dots, p_P\}_w: P$ 個の作業場の集合, $\{I\}_J, \{i_1, \dots, i_I\}_J: I$ 個の仕事の集合, J_i : 番号 i の仕事, $O(i, p): J_i$ の W^p での作業, $\tau_i^p: O(i, p)$ の処理に要する時間, $T_i = [\tau_i^1, \tau_i^2, \dots, \tau_i^M]: J_i$ の処理所要時間, $^st(i, p): \phi^1$ を原点にして測った $O(i, p)$ の開始時刻, $^et(i, p) \equiv ^st(i, p) + \tau_i^p: O(i, p)$ の終了時刻, $s^p: W^p$ で処理する仕事の順序 (= スケジュール), $i_s^p: W^p$ で i 番目に処理される仕事の番号, $s\{M \times N\}$: ショップ全体のスケジュール, 第 p 行が s^p である $M \times N$ のマトリクス, $\beta = [\beta^2, \beta^3, \dots, \beta^M]: \beta^p$ は W^{p-1} と W^p の間にある溜り場の容量であって、そこに格納できる最大の仕事個数を示す, S : 任意のフロー・ショップ, 作業場数や溜り場容量を明示する必要があるときは, $S(M), S(M, \beta)$ などと記す, S_I : すべての p に対し, $\beta^p = +\infty$ である S , S_{II} : すべての p に対し, $\beta^p = 0$ である S .

S で処理されるすべての仕事の技術的順序 R は同じでなければならないから、特にこれを示す必要はなく、各仕事は処理所要時間 T_i を与えれば確定する。 T_i は初期条件 T_0 、終了条件 T_∞ と同じ形式であるから、 T_0 と T_∞ はおのおの常にスケジュールの最初または最後に処理される仕事 J_0 および J_∞ と解釈することもできる。この場合 J_0 の開始および終了の時刻は次のように与えられる。

$$^st(0, 1) = 0, ^st(0, p) = \sum_{q=1}^{p-1} \tau_0^q, ^et(0, p) = ^st(0, p) + \tau_0^p$$

したがって $^st(0, p) = ^et(0, p-1)$ である。 J_∞ についても $^st(\infty, p), ^et(\infty, p)$ を考えることができるが、 J_0 のときと異なりスケジュールによって変化する。しかし、 T_∞ はスケジュール終了時のガントチャートの形を規定するものであって、 $^st(\infty, p) = ^et(\infty, p-1)$ なる関係は満たさなければならない。なお、 $^et(\infty, p) \equiv ^st(\infty, p) + \tau_\infty^p$ とする。

2.5 目的関数

フロー・ショップにおけるスケジュールの評価としては、総所要時間 (total required time) がよく用いられるが、これを最小にすることは、最後の作業場 W^M の遊び時間を最小にすることと等価である。こ

ここではこれを一般化した総遊び費用 C (total idling cost of S) を用いる。

$$C(S, s\{M \times N\}, T_0, T_\infty; \alpha)$$

$$= \sum_{p=1}^M [\alpha^p \cdot \sum_i I_i^p(S, s\{M \times N\}, T_0, T_\infty)] \quad (2)$$

上式で $\alpha = [\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^M]$ であり α^p は W^p の単位遊び時間当たりの重みである。 $I_i^p(\cdot, \cdot, \cdot)$ は S で $s\{M \times N\}$ を T_0, T_∞ の下で実行するとき $O(i, p)$ の処理開始直前の W^p の単位遊び時間である。以下では $I^p(S, s\{M \times N\}, T_0, T_\infty)$ で I_i^p の i に関する総和を示す。この i に関する和は T_∞ : 自由のときは N まで、 T_∞ が確定的に与えられているときは、終了条件までとる。なお、 T_∞ : 自由のときは上式の () の中の T_∞ を省き、特に混乱のおそれがないときは $(S, s\{\cdot\}, T_0, T_\infty)$ そのものを省略することもある。 C の引数として S がはいっているのは、同じスケジュールであってもそれを実行するフロー・ショップによって C が変化するためである。

C は α^p を W^p の単位遊び時間当たりの費用にすれば総遊び費用となり、 $\alpha^p = 0$ for $p = 1, 2, \dots, M-1$, $\alpha^M = 1$ とすれば W^M の総遊び時間となって、総所要時間と同等になる。またすべての p に対して α^p を 1 にすると、 C を最小にすることはショップの稼働率を最大にすることと等価になる。このように α の与え方で (2) 式に種々の物理的意味を持たせることができ、ショップに注目した評価を考えるさいには非常に有用性がある。しかし、たとえば各仕事の完了時刻と納期の差を少なくしようというような仕事寄りの評価を行なうには不向きであると思われる。

ここで (2) 式をその特殊形として含む、より一般的な関数 F の性質を示す。これは (2) 式の下界の推定に有効である。

【定理 1】 関数 F が下の (3), (4) 両式を満たすなら、 (5) 式が成立する。ただし $1 \leq I \leq N$ である。

$$\begin{aligned} & F(S(M), s\{M \times N\}, T_0, T_\infty) \\ &= \sum_{p=1}^M F^p(S(M), s\{M \times N\}, T_0, T_\infty) \quad (3) \\ &= F(S(M), s_I, T_0, T_{0I}) + F(S(M), s_{N-I}, T_{0I}, T_\infty) \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & F(S(M), s\{M \times N\}, T_0, T_\infty) \\ & \geq F(S(M), s_I, T_0, T_{0I}) \\ & + \sum_{p=1}^M F^p(S(M^p), s^*\{m^p \times (N-I)\}, T_{0I}^p, T_\infty^p) \quad (5) \end{aligned}$$

ここで s_I, s_{N-I} は $s\{M \times N\}$ の I 列目までとそれ以後をおのおの示す。 $T_{0I} = [0, \tau_{0I}^1, \dots, \tau_{0I}^M]$ は s_I

の終了時刻から算出する s_{N-I} の初期条件である。 $s^*\{m^p \times (N-I)\}$ は W^p を含む m^p 個の作業場 ($2 \leq m^p \leq M$) $\{p-q+1, \dots, p-1, p, p+1, \dots, p+r\}_W$ のみを考慮し、評価として F の W^p に関する部分 F^p のみを考えたときの T_{0I}^p, T_∞^p の下で最適な $N-I$ 個の仕事のスケジュールである。

$$\text{ただし, } T_{0I}^p = [0, \tau_{0I}^{p-q+2}, \dots, \tau_{0I}^{p+r}],$$

$$T_\infty^p = [\tau_\infty^{p-q+1}, \dots, \tau_\infty^{p+r-1}, 0]$$

【証明】 あるスケジュール $s'\{M \times N\}$ についてある I で (5) 式が成立しないとする。 (3), (4) 式から、

$$\begin{aligned} & F(S(M), s'\{M \times N\}, T_0, T_\infty) = F(S(M), s_I', T_0, T_{0I}) \\ & + \sum_{p=1}^M F^p(S(M), s_{N-I}', T_{0I}, T_\infty) \quad (6) \end{aligned}$$

いっぽう、仮定から、

$$\begin{aligned} & F(S(M), s'\{M \times N\}, T_0, T_\infty) < F(S(M), s_I', T_0, T_{0I}) \\ & + \sum_{p=1}^M F^p(S(m^p), s^*\{m^p \times (N-I)\}, T_{0I}^p, T_\infty^p) \quad (7) \end{aligned}$$

(6) 式と (7) 式を比較すると少なくとも 1 つの p ($1 \leq p \leq M$) について次式が成立しなければならない。

$$F^p(S(M), s_{N-I}', T_{0I}, T_\infty)$$

$$< F^p(S(m^p), s^*\{m^p \times (N-I)\}, T_{0I}^p, T_\infty^p)$$

このことは m^p の値が何であっても s^* の定義に矛盾する。したがって背理法により (5) 式がすべてのスケジュールについて成立しなければならない。(証明終)

2.6 本論文で扱う問題の記述 (Fig. 2)

本論文では、 $P1(S, \alpha) = \{S; T_0, T_\infty; \{N\}_J; \alpha\}$, $P2(S, \alpha) = \{S; T_0; \{N\}_J; \alpha\}$ なる問題を扱う。 $P1(S, \alpha)$ は 2.2 の制約に従うフロー・ショップに 2.3 の制約を満たす N 個の仕事が与えられたとき、 T_0, T_∞, α の下で目的関数 (2) を最小にする問題であり、 $P2(S, \alpha)$ はその T_∞ が自由の場合である。これは (2) 式の i に関する和が N までである点のみが $P1$ と異なっている。以上の 2 つを原問題といい、これに対応する逆順序問題を次のように定義する。

$$P1(\bar{S}, \bar{\alpha}) = \{\bar{S}; \bar{T}_0, \bar{T}_\infty; \{N\}_J; \bar{\alpha}\} \quad (8)$$

$$P2(\bar{S}, \bar{\alpha}) = \{\bar{S}; \bar{T}_0; \{N\}_J; \bar{\alpha}\} \quad (9)$$

ここで $\bar{S}$ は作業場の配列が S と逆の順序のものであり、 $\bar{\alpha} = [\bar{\alpha}^M, \dots, \bar{\alpha}^2, \bar{\alpha}^1] = [\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^M]$ で $\bar{\alpha}^p$ は W^p に対する $\bar{S}$ での重みである。 $\bar{S}$ に対する仕事であるから J_i は $\bar{T}_i = [\tau_i^M, \tau_i^{M-1}, \dots, \tau_i^1]$ の形となる。(8) では $\bar{T}_0 = [0, \tau_\infty^{M-1}, \dots, \tau_\infty^1]$, $\bar{T}_\infty = [\tau_0^M, \tau_0^{M-1}, \dots, \tau_0^1, 0]$ であり、(9) では $\bar{T}_0 = [0, \tau_0^2, \dots, \tau_0^M]$ とする。なお (8) と同様に (9) でも $\bar{T}_0$: 自由、 $\bar{T}_\infty =$

minimize eq. (2) for $\alpha, T_0, (T_\infty)$

(a) the primal problem

minimize eq. (2) for $\bar{\alpha}, \bar{T}_0, (\bar{T}_\infty)$

(b) the reverse problem

Fig. 2 Schematic representations of the primal and reverse problems

$[\tau_0^M, \dots, \tau_0^2, 0]$ とするとこれは (8) とまったく同じに扱えることがわかっている。

著者らは問題の設定にさいし、 S に対して溜り場の容量制限、初期条件、終了条件を新に導入した。これらは従来の研究ではほとんど考慮されていないが、現実のショップを考えるととうぜんモデルに導入すべきであるとする。これによって問題が明確になるばかりでなく、ある意味で問題が単純化されることが以下の解析で明らかになる。さらにたとえば、原³⁾の Cyclic Sequencing の問題をいくつかの P1 の集合に変形することによってより良い近似解が得られるようにもできる。逆順序問題の正確な定義および解析は従来ほとんど見られないが、この問題の意義については 6. で述べる。

3. フロー・ショップ全般の性質

ジョブ・ショップの最適スケジュールの決定には仕事のたかだか $(N!)^M$ 個の順列を探索すれば良いことがわかっている²⁾。フロー・ショップではこれを $(N!)^{M-2}$ 個まで減らして良い^{*1}。

【定理 2】(Johnson-Roy の定理) P1(S, α) および P2(S, α) では評価を悪化させずに $s^1 = s^2, s^{M-1}$

*1 P2($S_I, [0, 0, \dots, 0, 1]$) に関するこの性質は文献 4) p. 91 に引用されているが、その詳細については触られていない。原典は文献 5) であるが入手しにくい。ここでは筆者ら独自の命題とその証明を述べる。また、文献 1) では P2($S_I(3), [0, 0, 1]$) に関してこの性質が証明されている。

$= s^M$ とできる。

【証明】 Fig. 3 参照。 s^{M-1} と s^M を最初から対照して行くと、 k 番目で初めて $k_{s^{M-1}} \neq k_{s^M}$ であって、 $k_{s^{M-1}} = k + l_{s^M}$, $k_{s^M} = k + j_{s^{M-1}}$ であるとする。 $J_{k+l_{s^M}} \rightarrow J_{k_{s^M}}$, $J_{j_{s^M}} \rightarrow J_{k+l_{s^M}}$ ($k \leq i \leq k+l-1$) と置き換えたスケジュール $\bar{s}^M$ (他の部分は s^M と同じ) を作る。 $J_{k_{s^M}} (= J_{k+l_{s^M}})$ を $s^1(k_{s^M}, M)$ に開始すると $k+l_{s^M}$ から $k+l_{s^M}$ までの仕事は s^M のときと同時刻があるいは直前の仕事が終了した時刻に処理開始できるので、 $k+l_{s^M}$ は $k+l_{s^M}$ と同じ時刻に終了できる。これで評価を悪化させずに k 番目までは s^{M-1} と s^M を同じにできた。この操作の繰返しによって $s^{M-1} = s^M$ とできる。 $s^1 \neq s^2$ のときは s^1 のほうを上と同様にして変更していけば良い^{*2}。なお、この証明では 2.3 の制約 (3) を使っていないので仕事はこれを満たしてなくとも良い。

Fig. 3 Partial Gantt chart of schedule s

上の定理により、 $M \leq 3$ の S では $N!$ 個の順列だけを考慮すれば良いことがわかる。また $s^p \neq s^q$ となるのは溜り場の容量がすべてゼロのときは不可能であるから S_{II} では $s^1 = s^2 = \dots = s^M$ でなければならない。

次の定理は T_∞ を与えられた問題では評価関数の重み α はたとえばアルゴリズムに都合良いように決めて良いことを示している。

【定理 3】 P1(S, α) では解集合 $\{s^*\}$ は、 α の値の変化には無関係に一定である。ただし、 $\alpha \neq 0$ 。

【証明】 $\alpha^M = 1$ で他の α^p はすべてゼロのときの最適スケジュールを s^* で、その集合を $\{s^*\}$ で示す。この s^* に対する簡単なガントチャートを Fig. 4 に示す。 $D_{s^*, p} \equiv s^1(\infty, p) - e^1(0, p)$ であり、初期条件と終了条件の定義から $e^1(0, p) = s^1(0, p+1)$, $e^1(\infty, p) = s^1(\infty, p+1)$ でなければならない。 s^* の定義から $D_{s^*, M}$ は実現可能な最小値である。 $q(1 \leq q \leq M-1)$ に対し、任意の $s \in \{s^*\}$ により $D_s^q < D_{s^*, q}$ であるとする。上述の T_0 と T_∞ の性質から $D_s^M < D_{s^*, M}$ でなければならない、矛盾を生ずる。したがって $D_{s^*, q}(1 \leq q$

*2 S_I だけを考える時は $s^1 = s^2$ とできることの証明は、 $s^{M-1} = s^M$ とできることの証明より容易でより一般的な評価についてできるが、一般の S を考慮するときはそのような差はなくなる。

constr. $e_t(0, q) = e_t(0, q+1)$, $e_t(\infty, q) = e_t(\infty, q+1)$

Fig. 4 The span D_{s^*} from T_0 to T_{∞}

$\leq M-1$) も実現可能な最小値でなければならない。ゆえに任意の α に対して $\{s^*\}$ は最適スケジュールの集合であり、 $\{s^*\}$ に含まれないスケジュールは α の値がなんであっても最適にはなり得ない。

4. I 形と II 形のフロー・ショップの性質

4.1 $M=2$ の I 形フロー・ショップの性質

Johnson は $P2(S_I(2), [0, 1])$ で $T_0=[0, 0]$ の場合に最適スケジュールとなる十分条件を導き、それを満たすスケジュールを作るアルゴリズムを与えたり。ここでは同じ条件式が任意の $P1(S_I(2), \alpha)$ および $P2(S_I(2), \alpha)$ に対して最適性の十分条件となることを示す。

【定理 4】 $P1(S_I(2), \alpha)$, $P2(S_I(2), \alpha)$ では (10) 式の成立することが最適スケジュールであるための十分条件である。ただし、(10) 式は $1 \leq j \leq N-1$ なるすべての j について成立しなければならない。

$$\min(\tau_{j_s}^1, \tau_{j+1_s}^2) \leq \min(\tau_{j_s}^2, \tau_{j+1_s}^1) \quad (10)$$

【証明】 $P2(S_I(2), \alpha)$ では W^1 の遊び時間 I^1 は常にゼロにできるから、 I^2 の最小化だけを考えれば良い。このとき I^2 は (11), (12) 式によって与えられる。

$$I^2 = \max_{1 \leq u \leq N} \{ \max_{1 \leq u \leq N} K_u(s), \tau_0^2 \} - \tau_0^2 \quad (11)$$

$$K_u(s) = \sum_{j=1}^u \tau_{j_s}^1 - \sum_{j=1}^{u-1} \tau_{j_s}^2 \quad (12)$$

したがって、 $\max K_u(s)$ を最小化すれば I^2 は最小値になる。つまり Johnson の条件が十分条件である。

$P1(S_I(2), \alpha)$ では I^2 は次のように書ける。

$$I^2 = \max \left\{ \sum_{j=1}^N (\tau_j^1 - \tau_j^2) + \tau_0^1, \max_{1 \leq u \leq N} K_u(s), \tau_0^2 \right\} - \tau_0^2 \quad (13)$$

$\{\cdot\}$ の中の第 1 項は定数であるからやはり、Johnson の条件が満たされれば I^2 は最小になる。したがって $\alpha=[0, 1]$ なら最適性の十分条件になる。これと定理 3 を用いれば任意の α に対して、Johnson の条件が十分条件となることがわかる。

(10) 式の関係が推移的であることから、定理 4 を用いて容易に次の 2 つの系を証明できる。

【系 4-1】 $P1(S_I(2), \alpha)$ あるいは $P2(S_I(2), \alpha)$

の (10) 式を満たす解を $s^* \{2 \times N\}$ とするとき、 $\{N\}_J$ から $\{n\}_J = \{J_{i_{1s^*}}, J_{i_{2s^*}}, \dots, J_{i_{ns^*}}\}_J$ ($i_k < i_{k+1}$ とする) を除いた $\{N-n\}_J$ に対する同じ問題の解は (14) である。

$$\begin{aligned} s^* \{2 \times (N-n)\} \\ = [1_{s^*}, \dots, i_1-1_{s^*}, i_1+1_{s^*}, \dots, i_n-1_{s^*}, i_n+1_{s^*}, \dots] \end{aligned} \quad (14)$$

【系 4-2】 $P1(S_I(2), \alpha)$ あるいは $P2(S_I(2), \alpha)$

の (10) 式を満たす解を $s^* \{2 \times N\}$ とするとき、 J_{N+1} を加えた $\{N+1\}_J$ に対する同じ問題の解は、 s^* の次式が成立する位置に J_{N+1} を割込ませたものである。なお、(15) が $j=N$ で成立するときは s^* の最後に、(16) が $j=0$ に対して成立するときは s^* の先頭に、おのこの J_{N+1} を割込ませるものとする。

$$\min(\tau_{j_s}^1, \tau_{N+1_s}^2) < \min(\tau_{j_s}^2, \tau_{N+1_s}^1) \quad (15)$$

$$\min(\tau_{j+1_s}^2, \tau_{N+1_s}^1) \leq \min(\tau_{j+1_s}^1, \tau_{N+1_s}^2) \quad (16)$$

【系 4-1】 はスケジュール実行中に仕事の取り消しがあった場合や、Branch and Bound 法を用いるさいの下界の推定などに利用できる。【系 4-2】は Johnson の方法とは異なる最適スケジュールの構成法を示すとともに、仕事の割込みがあった場合にも有効である。

4.2 $M=2$ の II 形フロー・ショップの性質

【定理 5】 $P1(S_{II}(2), \alpha)$, $P2(S_{II}(2), \alpha)$ では下の 3 つのうちのどれを仮定してスケジュール s の評価を計算しても同じ値を得る。

$$e_t(j-1_s, 2) = e_t(j+1_s, 1) \quad (17)$$

$$s_t(j+1_s, 1) = s_t(j_s, 2) \quad (18)$$

$$s_t(j_s, 2) = e_t(j_s, 1) \quad (19)$$

【証明】 S_{II} では W^1 と W^2 の間に仕事が溜ることを許さないから、 $M=2$ の場合は W^1 が J_{j+1_s} を開始するには、 W^1 が J_{j_s} を W^2 が J_{j-1_s} をおのこの完了していることが必要である。いっぽう、 W^2 が J_{j_s} を開始するには W^2 が J_{j-1_s} を W^1 が J_{j_s} をおのこの完了していることが必要である。よって W^1 も W^2 もできるだけ早く仕事を開始するものとして (20) 式が成立する。

$$\begin{aligned} s_t(j+1_s, 1) &= e_t(j_s, 2) \\ &= \max\{e_t(j_s, 1), e_t(j-1_s, 2)\} \end{aligned} \quad (20)$$

① $e_t(j_s, 1) \geq e_t(j-1_s, 2)$ のとき：(20) 式から $s_t(j_s, 2) = e_t(j_s, 1)$ (Fig. 5(b)).

② $e_t(j_s, 1) < e_t(j-1_s, 2)$ のとき：Fig. 5(a) のようになり、 J_{j_s} の W^1 での開始を $e_t(j-1_s, 2) - e_t(j_s, 1)$ だけ遅らせて $s_t(j_s, 2) = e_t(j_s, 1)$ としても I_{j+1}^1 が I_j^1 のところにはいるだけで評価は悪化しな

Fig. 5 Relations between the starting and the ending time of operations in $S_{II}(2)$

い。

同様に①、②の場合とも $e_t(j+1_s, 1) = e_t(j-1_s, 2)$ ともできることが容易にわかる。

(17) は W^2 での開始時刻を、(19) は W^1 での開始時刻を、(18) の場合より評価が悪化しないようにできるだけ遅らせる場合に相当する。特に (19) の場合を利用すると $S_{II}(2)$ でのスケジューリング問題が巡回セールスマン問題の変形となる。このことから $M \geq 3$ の場合でも M があまり大きくなければ、巡回セールスマン問題の解法を利用して S_{II} に対するかなり良い近似解が得られるものと推測される。

5. 原問題と逆順序問題の解の関係

【定理 6】 $P1(S, \alpha)$ のスケジュール s が時刻 $e_t(j_s, p)$ に $O(j_s, p)$ を開始するものであるとき、 $\bar{s}$ は各作業を次の (21) 式で決まる時刻に開始すれば、その逆順序問題のショップ $\bar{S}$ で常に実施できる。

$$e_t(j_s, p) = e_t(\infty, M) - e_t(N-j+1_s, p) \quad (21)$$

【証明】 S ではあるスケジュール s が実行される時、作業を行なう時刻について (22) 式が成立しなければならない。

$$e_t(j_s, p) \leq \min \{e_t(j+1_s, p), e_t(j_s, p+1), e_t(j+2-\beta_s^p, p-1)\} \quad (22)$$

ただし、 $1 \leq p \leq M$, $1 \leq j \leq N$, $q > M$ あるいは $k > N$ の場合

$$e_t(k_s, q) = +\infty$$

いっぽう、 s と逆順序のスケジュール $\bar{s}$ を $\bar{S}$ で実行できるための条件は (23) 式となる。

$$e_t(j_s, p) \geq \max \{e_t(j_s, p+1), e_t(j-1_s, p), e_t(j-2-\beta_s^p, p-1)\} \quad (23)$$

ただし、 $1 \leq p \leq M$, $1 \leq j \leq N$, $q > M$ あるいは $k < 1$ の場合 $e_t(k_s, q) = 0$

$e_t(j_s, p) \equiv e_t(j_s, p) - \tau_{j_s}^p$ の置き換えを行ない、 $e_t(\infty, M)$ から (22) 式の両辺を引き、 $j_s = N-j+1_s$ であ

ることを考慮して (23) 式と対照すれば、(21) 式によって決定される開始時刻が (23) 式を満足することが明らかになる。また、この時刻に間に合うように所要の仕事を作業場に入れる必要があるが、これは $\bar{S}$ で $\bar{s}$ を実行するときの可能な最早時刻に行なえば良い。

(21) 式で開始時刻を決定すると $D_s^p = D_{\bar{s}}^p$ となる。したがって $P1(S, \alpha)$ の解集合 $\{s^*\}$ と逆順序のスケジュールの集合 $\{\bar{s}^*\}$ は常に $P1(\bar{S}, \bar{\alpha})$ の解すべての集合となる。 $\{\bar{s}^*\}$ に含まれない解 $\bar{s}'$ があるとなると上と裏返しの推論により、 $\{s^*\}$ が原問題のすべての解を含んでいるという仮定に矛盾する。したがって次の定理を得る。

【定理 7】 $P1(S, \alpha)$ の解集合を $\{s^*\}$ とするとき、 s^* と逆順序のスケジュールの集合 $\{\bar{s}^*\}$ は $P1(\bar{S}, \bar{\alpha})$ の解集合となる。

次に $P2'(S_I(M), [0, 0, \dots, 0, 1])$ とその逆順序問題 $P2'(\bar{S}_I(M), [0, 0, \dots, 0, 1])$ の関係を論ずる。ダッシュは $s^1 = s^2 = \dots = s^M$ なるスケジュールの中で最適なものを求める問題であることを意味するものとする。 S_I では一般に、 $s^1 = s^2$, $s^{M-1} = s^M$ とできることが前述の Johnson-Roy の定理で示されており、さらに S_I に関してはこの制約を課した問題が一般には考えられているので、以下ではこの問題を考察する。

あるスケジュール s (ただし $s^1 = s^2 = \dots = s^M$) を S_I で実行するとき I^M は次式で与えられる。

$$I^M \equiv \sum_{j=1}^M I_{j_s}^M = \max_{0 \leq u_2 \leq \dots \leq u_M \leq N} \left\{ \sum_{q=2}^M K_{u_q}^q(s) \right\} \quad (24)^{*3}$$

ただし、

$$K_{u_q}^q(s) \begin{cases} \equiv \sum_{j=1}^{u_q} \tau_{j_s}^{q-1} - \sum_{j=0}^{u_q-1} \tau_{j_s}^q & \text{for } 1 \leq u_q \leq N \\ \equiv 0 & \text{for } u_q = 0 \end{cases} \quad (25)$$

このことは数学的帰納法により証明することができる。

同様に、 s と逆順序のスケジュール $\bar{s}$ を $\bar{S}_I$ で実行すると、

$$I^1 \equiv \sum_{j=1}^N I_{j_s}^1 = \max_{0 \leq w_{M-1} \leq \dots \leq w_1 \leq N} \left\{ \sum_{q=1}^{M-1} K_{w_q}^q(\bar{s}) \right\} \quad (26)$$

ただし、 $K_{w_q}^q(\bar{s})$

$$\begin{cases} \equiv \sum_{j=1}^{w_q} \tau_{j_s}^{q+1} - \sum_{j=1}^{w_q-1} \tau_{j_s}^q - \tau_0^{M-q+1} & \text{for } 1 \leq w_q \leq N \\ \equiv 0 & \text{for } w_q = 0 \end{cases} \quad (27)$$

*3 この式は $0 \leq u_2 \leq \dots \leq u_M \leq N$ を満足する $M-1$ 個の整数 $u_2, u_3, \dots, u_M$ を適当に定めたときに得られる、 $\sum_{q=2}^M K_{u_q}^q(s)$ の最大値を I^M とすることを意味する。

$$\begin{aligned}
& \text{さて, } \sum_{j=0}^N \tau_{js}^M - \sum_{j=1}^N \tau_{js}^{M-1} - \tau_0^M \equiv A \quad (\text{一定}) \quad \text{に} \quad \sum_{q=2}^{M-1} \left(- \sum_{j=0}^N \tau_{js}^q + \sum_{j=0}^N \tau_{js}^{q-1} \right) \equiv 0 \quad \text{を加えて} \quad u_2, u_3, \dots, u_M \quad (1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_M \leq N) \quad \text{で分割して適当に変形すると,} \\
& \left\{ \left(\sum_{j=u_M}^N \tau_{js}^M - \sum_{j=u_{M-1}+1}^N \tau_{js}^{M-1} - \tau_0^{M-1} \right) \right. \\
& \quad + \left(\sum_{j=u_{M-1}}^N \tau_{js}^{M-1} - \sum_{j=u_{M-2}+1}^N \tau_{js}^{M-2} - \tau_0^{M-2} \right) + \\
& \quad \left. \dots + \left(\sum_{j=u_2}^N \tau_{js}^2 - \sum_{j=u_2+1}^N \tau_{js}^1 - \tau_0^1 \right) \right\} - \sum_{q=2}^M K_{uq}^q(s) \equiv A \quad (28)
\end{aligned}$$

左辺第1項の τ_0^{M-q+1} と τ_0^q ($2 \leq q \leq M-1$) を入れ換え、 $\sum_{j=u_q}^N \tau_{js}^q = \sum_{j=1}^{N-u_q+1} \tau_{js}^q$ であることを利用し、 $N - u_q + 1 = w_{q-1}$ とおくと次式を得る。

$$\begin{aligned}
& \sum_{q=1}^{M-1} K_{uq}^q(\bar{s}) \equiv A + \sum_{q=2}^M K_{uq}^q(s) \\
& \left(\text{ただし, } \begin{array}{l} 1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_M \leq N \\ w_{q-1} = N - u_q + 1 \end{array} \right) \quad (29)
\end{aligned}$$

(24) 式の右辺の最大値が $u_{m-1} = \dots = u_3 = u_2 = 0$, $u_m \geq 1$ ($3 \leq m \leq M$) でのみ実現されるときは (30) 式が成立しなければならず、(26) 式にも同様のことがいえる。

$$\begin{aligned}
& \max_{0 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{m-1} \leq u_m} \left\{ \sum_{q=2}^{m-1} K_{uq}^q(s) \right\} < 0 \\
& \left(\text{ただし, } \sum_{j=2}^{m-1} u_j \neq 0 \right) \quad (30)
\end{aligned}$$

原問題の解 s^* について、

$$\begin{aligned}
& \tau_{1s^*}^p \geq \tau_0^{p+1} \quad \text{および} \quad \tau_{Ns^*}^{M-p+1} \geq \tau_0^{p+1} \\
& (1 \leq p \leq M-1) \quad (31)
\end{aligned}$$

が成立すれば、(30) 式および (26) 式に対する同様の式が成立しないので、(24)、(26) 両式の右辺の最大値は $u_2 \geq 1$, $w_{M-1} \geq 1$ での実現される。このとき (29) 式の両辺で $\max$ をとると、

$$\begin{aligned}
& \max_{1 \leq w_{M-1} \leq \dots \leq w_1 \leq N} \left\{ \sum_{q=1}^{M-1} K_{wq}^q(\bar{s}^*) \right\} \\
& \equiv A + \max_{1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_M \leq N} \left\{ \sum_{q=2}^M K_{uq}^q(s^*) \right\} \\
& = \min_s \left[A + \max_{1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_M \leq N} \left\{ \sum_{q=2}^M K_{uq}^q(s) \right\} \right] \quad (32)
\end{aligned}$$

したがって、 $\bar{s}^*$ は逆順序問題の解となる。特に (33) 式が成立するときには (31) 式が常に成立するから、原問題の解と逆順序のスケジュールはすべて、逆順序問題の解となる。

$$\min_{1 \leq j \leq N} (\tau_j^p, \tau_j^{M-p+1}) \geq \tau_0^{p+1} \quad (1 \leq p \leq M-1) \quad (33)$$

【定理 8】 $P2'(S_I, [0, \dots, 0, 1])$ の解 s^* と逆順のスケジュール $\bar{s}^*$ は、 s^* について (31) 式が成立する

ときその逆順序問題の解となる。特に、(33) 式が成立する問題では原問題の解と逆順序のスケジュールは常に逆順序問題の解となる。

$M=2$ の場合には (34) 式が成立すれば $\bar{s}$ は逆順序問題の解となる。

$$\min(\tau_{js}^2, \tau_{j+1\bar{s}}^1) \leq \min(\tau_{j\bar{s}}^1, \tau_{j+1s}^2) \quad (34)$$

$j\bar{s} = N - j + 1_s$ に注意すれば、(10) 式を満たすスケジュールと逆順序のスケジュールが (34) 式を満たすことは明らかである。したがって次のことがいえる。

【定理 9】 $P2(S_I(2), \alpha)$ の Johnson の十分条件 (10) を満たす解と逆順序のスケジュールは $P2(\bar{S}_I(2), \bar{\alpha})$ の解である。

$P2(S, [0, \dots, 0, 1])$ と $P2(\bar{S}, [0, \dots, 0, 1])$ の関係については、 $T_0 = \bar{T}_0 = 0$ の場合には両者の解が互いに逆順序であることを定理 7 を用いて容易に示すことができる。

6. 結果のまとめと考察

2. ではショップの概念を明確にし、溜り場容量、初期条件、終了条件の諸点で一般化した問題を定義した。これによって、従来の研究対象の主なものの特殊性が明らかになるとともに、前後のスケジュールとの調整を行なうことも可能になり(初期条件・終了条件)、さらに溜り場容量の異なるフロー・ショップ間の比較を行うための基礎が与えられた。

3. ~ 5. では一般化した問題を種々の面から解析して次のような結果を得た。

- (1) 目的関数の下界に関する定理 (定理 1)。
- (2) Johnson-Roy の定理が一般のフロー・ショップにおいても成立すること (定理 2)。
- (3) T_0 と T_∞ がともに与えられた任意のフロー・ショップでの問題の解集合は、目的関数の重み α が変化しても不変である (定理 3)。
- (4) Johnson の S_I での 2 段問題に対する解法は任意の初期条件、終了条件に対して有効であることの証明 (定理 4) とこの定理の仕事数が増減する場合への応用 (系 4-1, 2)。この方法で得られる解と逆の順序のスケジュールは逆順序問題の解となること (定理 9)。
- (5) S_{II} での 2 段問題を巡回セールスマン問題と同値になるように変形できることを保証する定理 (定理 5)。
- (6) 任意のフロー・ショップでの T_0 と T_∞ がともに与えられた問題の解はその逆順序問題の解と逆の順序であり、両者の目的関数値は等しいこと (定理 6, 7)。

(7) 原問題と逆順序問題の解が互いに逆の順序であるという関係は、終了条件自由のときは一般には成立せず、ある条件下でのみ成立する (定理 8)。

(2), (4) は従来の研究結果が一般化した問題についても成立することを示したものであり、他のものは新に証明したものである。また, (24) 式は Johnson の式¹⁾ の一般化である。フロー・ショップはジョブ・ショップの中で最も扱い易いシステムであるが、一般的な解法は求められていない。現在のところ Branch and Bound 法が不十分ながら適当であるとされている。これを適用するさいには、性質 (1) から目的関数の下界は原問題をいくつかの 2 段階問題に分割することによって計算でき、そのさい、性質 (4) は Job-Based-Bound の従来⁶⁾ より高精度な推定を可能にする。性質 (5) は S_{II} での問題を巡回セールスマン問題の解法を利用して解く方向を示唆しており、著者らの計算実験ではかなり有望な結果が出ている。

逆順序問題に関しては、 $P2(S_I, [0, 0, \dots, 0, 1])$ の $T_0 = [0, 0, \dots, 0]$ の場合には原問題と逆順序問題の間に対称性 (最適解が互いに逆の順序であること) があり、原問題を解くのに有益であることが知られていたが⁶⁾、これは定理 8 の式 (33) が成立する場合であり、5. の最後に述べた一般の S の P2-問題とその逆順序問題の関係の特殊な場合でもある。完全に対称性があるのは終了条件が与えられた場合である (定理 7)。フロー・ショップの流れの向きを逆にしても工程上不都合がない場合は (a) 終了条件自由のときは原問題の解がわかれば、(32) 式を用いて簡単にどちらの向きを採るべきかを決定でき、(b) 終了条件が与えられる場合はどちらを採っても同じであるなど、この対称性はシステム設計のさいにも有益である。

7. 結 言

著者らはジョブ・ショップ・システムを規定するに当たり溜り場の概念を、また問題設定に当たっては初期条件、終了条件を導入し、さらに目的関数としてショップの稼働率も評価できるより一般的な評価を考えると実際のな場合を多く包含できる形に問題を規定し、このようなスケジューリング問題の重要な性質を

いくつか明らかにすることができた。

著者らはまた、フロー・ショップ問題を明確に記述するにさいして、ショップの構成に注目したフロー・ショップの定義と問題簡単化のための制約とを分離して考察したが、このような立場をとって初めてシステム設計にスケジューリング理論を利用することが可能になり、さらに定理 5 のように種々のスケジューリング問題相互の関連を明確にできると考える。

本論文で扱った問題は種々の抽象化、一般化を行なったものであるから、現場で起こる個々の問題に対して、ここで行なった解析をそのまま通用できない場合が多いと思われる。しかし、ラインで多種少量生産を行なうときにはライン設計の指針として、あるいは工場のシステム化などのさいに目安をつける基準として、本論文で述べた理想化システムの解析が必ず有益なものであると信ずる。

本論文では解析の結果のみを述べ、最適スケジュールを求める実際的手法についてはほとんど論及しなかったけれども、上述の諸結果を利用すれば最適スケジュールを求めるかなり効率良いアルゴリズムを構成することができる。この点については続報で発表する予定である。

参 考 文 献

- 1) S. M. Johnson: Optimal Two and Three Stage Production Schedules and Setup Times Included, Naval Res. Log. Quart. 1, 61/68 (1954)
- 2) B. Gittler and G. L. Thompson: Algorithms for Solving Production-Scheduling Problems, Opns. Res. 8, 487/503 (1960)
- 3) 原: Cyclic Sequencing とその近似解法, 経営科学, 10-3, 141/147 (1967)
- 4) Z. A. Lomnicki: A "Branch-and-Bound" Algorithm for the Exact Solution of the Three Machine Scheduling Problem, Opnl. Res. Quart., 16, 89/100 (1965)
- 5) B. Roy: Cheminement et Connexité dans les Graphs-Applications aux Problèmes d'Ordonnancement, METRA, Série Speciale No.1, Société d'Economie et de Mathématiques Appliquées, Paris
- 6) G. B. McMahon and P. G. Burton: Flow-Shop Scheduling with the Branch-and-Bound Method, Opns. Res. 15, 473/481 (1967)