多変数系の同定

古田 勝久・河 注 植*

東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

(昭和 46 年 11 月 29 日 受付)

Identification of Multivariable Systems

Katsuhisa FURUTA and Joo Shik HA

(Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo)

(Received November 29, 1971)

This paper presents an identification procedure for a multivariable system based on the system theory developed recently. In this procedure, the pulse transfer function is identified from the input and the output data, and the minimum dimensional realization is derived. Even in case that the input-output data are contaminated by noise, a slight modification of the method for noiseless case made it possible to identify the pulse transfer function, and to realize the system practically by defining the ε -practical controllability. This paper also clarifies that the minimal realization gives the so-called order of the system.

1. 緒 言

システム工学において最も重要なことは、対象とするシステムのモデル作りであり、これまでにいろいろのモデリングの手法が開発提案されている。これらの方法はいずれも対象とするシステムを機能の最小単位を表わすと考えられるサブシステムに分解し、各サブシステムの機能を単純化あるいは理想化して数学的に表現し、全体のシステムの数式モデルを作る。そして、このように作られた数式モデル中に含まれる未知

パラメータをシステムへの入出力データから固定し、モデル作りが行なわれると考えられてきた。すなわち Fig. 1 で与えられるような手順でモデルが作られてきた。これまで制御工学の同定理論においては主に Fig. 1 の 5. の階段であるパラメータ推定法の開発に重点が置かれてきた。

しかるに、最近の Kalman^{4),5)}による線形システム理論の発達、システムの入力-出力関係と、状態変数記述の関係を明確にし数式モデルが状態変数記述のとき状態方程式の係数行列中の、未知パラメータは

Fig. 1 Modelling process.

* 現在、韓国海洋大学勤務。

一意には決められないことを示した^{4)~6)}. そして入出力関係を満たす最小次元のシステムの状態変数記述を求める (minimal realization) 問題が, 広く研究され始めた^{4)~7)}.

本研究は, これら最近のシステム理論の成果を用いて, 与えられた入出力をもつ最小次元の多変数系を同定するアルゴリズムを求めることを目的としたものである. 2. では, 伝達関数と状態変数記述の基本的関係を述べた. 3. では, ノイズに汚されない入出力データが与えられるとき, これらを入出力とする. 仮定した次数の伝達関数をもつ多変数系が存在するための必要十分条件が与えられ, 同時に多変数系の未知パラメータを求めるアルゴリズムも与えられた. さらに求められた伝達関数を Mayne⁶⁾ の方法を改良した方法で, 最小次元状態変数記述できることを示した. 4. では, ノイズに汚されたデータが与えられる場合も著者の提案した同定法⁸⁾ を多変数系へ応用することによりノイズのない場合と同様にとり扱えることを示した. 5. では簡単な例題を用いて提案する同定法の有用性を示した.

2. 多変数系の表現

本報告で得られた結果を連続なシステムの同定に拡張することは容易であるが, 本報告では定常離散値系の同定問題だけについて考える. m 個の入力 $u \in R^m$ と p 個の出力 $y \in R^p$ をもつ定常線形離散値系 Σ は,

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

と表わすことができる. $x \in R^n$ をシステム Σ の状態 (state), n を Σ の次元といい, このようなシステムの表現をシステムの状態変数記述, あるいは内部記述という. ただし t は整数値をとり,

$F: n \times n, G: n \times m, H: p \times n$ 行列である.

単位時間推移オペレータを z とするとシステム Σ のパルス伝達関数 $R(z)$ は (1), (2) 式から,

$$R(z) = H(zI - F)^{-1}G \quad (3)$$

すなわち $\Sigma(F, G, H)$ が与えられるとき $R(z)$ は 1 個に与えられるが, $R(z)$ が与えられても $\{F, G, H\}$ は 1 個に決められない. $R(z)$ が与えられたとき (3) 式を満たす最小次元システム $\Sigma(F, G, H)$ を求める問題を最小次元実現問題という. このアルゴリズムはいろいろ提案されているが, 基本的に Gilbert の方法に基づいて, 特性方程式の根を求めなければならないものが多かった. 本報告では特性方程式の根を求めなくても良いアルゴリズムを導出し, それを定理 2 で示す.

最小次元実現問題は, システムの構造, すなわち controllability, observability と深い関連がある. これらの概念は,

【定義 1】⁴⁾ (controllability) システム Σ の任意の時刻 t_0 における状態 x_0 を時刻 $t(>t_0)$ で零状態にする入力 u が存在するとき x_0 を controllable な状態という. 状態空間 R^n のすべての状態が controllable なとき, Σ が completely controllable という.

【系 1】⁴⁾ システム Σ が completely controllable であるための必要十分条件は,

$$\text{Rank}[G, FG, \dots, F^{n-1}G] = n \quad (4)$$

【定義 2】⁴⁾ (observability) 零入力のシステム Σ に対し任意の時刻 t_0 の状態 x_0 が, t_0 から $t(>t_0)$ までの時間区間の出力から一意に与えられるとき x_0 は observable な状態であるという. 状態空間 R^n のすべての状態が observable なとき Σ が completely observable という.

【系 2】⁴⁾ システム Σ が, completely observable であるための必要十分条件は,

$$\text{Rank}[H^T, F^T H^T, \dots, F^{n-1} H^T] = n \quad (5)$$

一般の completely controllable でないシステム Σ の状態 x に関しては,

【系 3】⁴⁾ 状態 x が $W \triangleq [G, FG, \dots, F^{n-1}G]$ の値域の 1 点ならばかつこのときに限り x は controllable である.

【定義 1'] 状態 x が WW^T の零空間の 1 点のとき, このときに限り x は uncontrollable という.

【系 4】⁴⁾ 状態 x が $M \triangleq [H^T, F^T H^T, \dots, F^{n-1} H^T]$ の値域の 1 点ならば, かつこのときに限り x は observable である.

【定義 2'] 状態 x が MM^T の零空間の 1 点のときこのときに限り x は unobservable という.

すなわち, 一般のシステム Σ は,

【定理 1】(Kalman⁴⁾) システム Σ は, 正則な $n \times n$ 行列 T により, 状態空間の基底を変えると,

$$x = Tx' \quad (6)$$

$$x'(t+1) = \begin{bmatrix} F^{11} & F^{12} & F^{13} & F^{14} \\ 0 & F^{22} & 0 & F^{24} \\ 0 & 0 & F^{33} & F^{34} \\ 0 & 0 & 0 & F^{44} \end{bmatrix} x'(t) + \begin{bmatrix} G^1 \\ G^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (7)$$

$$y(t) = [0, H^2, 0, H^4] x'(t) \quad (8)$$

ただし, $x'^T = (x_1'^T, x_2'^T, x_3'^T, x_4'^T)$

$x_1': n_1', x_2': n_2', x_3': n_3', x_4': n_4'$ vectors ($n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$), x_1' は controllable だが unobser-

nable な状態, x_2' は controllable かつ observable な状態, x_3' は uncontrollable, unobservable な状態, x_4' は uncontrollable だが observable な状態.

このとき (7), (8) 式で記述されるシステムの伝達関数 $R(z)$ は,

$$R(z) = H^2(Iz - F^{22})^{-1}G^2 \quad (9)$$

で与えられる。(定理 1 終)

いっぽう, パルス伝達関数 $R(z)$ が与えられるとき, 状態変数記述でどのように表わされるかを考える. $R(z)$ のすべての要素 $r_{ij}(z)$ の分母の z の多項式の最小公倍式が $1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_l z^{-l}$ になるとき $R(z)$ を $R(z, l)$ で表わす. $R(z, l)$ は,

$$R(z, l) = \frac{1}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_l z^{-l}} [\Gamma_1 z^{-1} + \dots + \Gamma_l z^{-l}] \quad (10)$$

ただし, $\Gamma_i: p \times m$ matrix $i=1, \dots, l$ Γ_i は,

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} \gamma_{i1}^T \\ \gamma_{ip}^T \end{bmatrix} \quad (11)$$

と表わす.

【定理 2】 $R(z, l)$ が与えられるとき最小次元実現が存在し, 最小次元実現を求めるアルゴリズムが存在する.

【証明】 (10) 式で伝達関数が与えられる多変数系は次の observable standard form で記述される.

$$F = \begin{bmatrix} O_p & \dots & O_p & -\alpha_l & I_p \\ I_p & & & \vdots & \\ O_p & \dots & O_p & -\alpha_2 & I_p \\ O_p & \dots & O_p & -\alpha_1 & I_p \end{bmatrix} \quad (12.1)$$

$$G = \eta^{-1} \times \begin{bmatrix} \Gamma_l \\ \vdots \\ \Gamma_1 \end{bmatrix} \quad (12.2)$$

$$H = \eta [O_p, \dots, O_p, I_p] \quad (12.3)$$

ただし, O_p は $p \times p$ の zero matrix, I_p は $p \times p$ の identity matrix (12) 式で与えられるシステム, F, G, H は系 2 より completely observable である. このシステム Σ の状態空間で controllable な部分空間は系 3 より $W = [G, FG, \dots, F^{n-1}G]$ の値域である. W の定義域を U とし, Σ の状態空間を X_S とすれば,

$$W: U \rightarrow X_S \quad (13)$$

$W^T W$ の零でない固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_0}$ とし, それに対応する正規固有ベクトルを $v_1, v_2, \dots, v_{n_0}$ とする.

$$W^T W v_i = \lambda_i v_i \quad i=1, \dots, n_0 \quad (14)$$

すると $W W^T$ も $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_0}$ を固有値としてもち, 対応する正規固有ベクトルを $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_0}$ とすると,

$$W W^T \omega_i = \lambda_i \omega_i \quad i=1, \dots, n_0 \quad (15)$$

(14), (15) 式から,

$$\omega_i = \lambda_i^{-(1/2)} W v_i \quad (16)$$

すなわち,

$$\text{Range}(W) = \text{Range}(W W^T) \quad (17)$$

$$X_S = \text{Range}(W) \oplus \text{Null}(W W^T) \quad (18)$$

と表わされる. $\text{Rank}[W] = n_0$ であるから $\text{Range}(W)$ を張る n_0 個の正規直交基底 $S = (\omega_1, \dots, \omega_{n_0})$ を選ぶ. 同様に $\text{Null}(W W^T)$ を張る $n - n_0$ 個の S に対して正規直交な基底 $\omega_{n_0+1}, \dots, \omega_n$ を考える.

$$T = [\omega_1, \dots, \omega_n] \quad (19)$$

とすると T を基底として表わした状態 x' は,

$$x = T x' \quad (20)$$

で表わされる. $\text{Range}(W)$ は F で invariant な空間であるから,

$$x'(t+1) = \begin{bmatrix} F_0 & F^{12} \\ 0 & F^{22} \end{bmatrix} x'(t) + \begin{bmatrix} G_0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (21)$$

$$y(t) = [H_0, H^2] x'(t) \quad (22)$$

と表わされる. $x'^T = (x_3'^T, x_2'^T)$ とすると x_3' は n_0 vector の controllable かつ observable な状態, x_2' は $n - n_0$ vector の observable だが uncontrollable の状態である. $S^T = V$ とすると,

$$V S = I_{n_0} \quad (23)$$

$$F_0 = V F S \quad (24.1)$$

$$G_0 = V G \quad (24.2)$$

$$H_0 = H S \quad (24.3)$$

しかるに定理 1 より $\{F_0, G_0, H_0\}$ は $R(z, l)$ の最小次元実現になっている。(定理 2 終)

定理 2 によって一般に勝手に l を選んで $R(z, l)$ でシステムを同定すると controllable かつ observable な状態以外に uncontrollable あるいは unobservable な状態を導入することになることがわかる. すなわち同定したモデルを用いて制御あるいは観測に使用できない. それゆえ最小次元実現で入出力が規定されるシステムを表現することが望ましい.

3. 入力出力が与えられる場合の同定法

本章では入力データ $\{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$, 出力データ $\{y(0), \dots, y(N)\}$ が与えられる場合の実現問題を考える. 定理 2 からこれらを入出力としてもつシステムの伝達関数を求めれば, 内部記述が求まることが示された. それゆえ, まず入力出力データが与えられた場合にこれらを満たすと仮定した l に対する伝達関数 $R(z, l)$ が存在するかどうか問題となる. この問題に対して次の主定理をうる.

【主定理】 入出力データ $\{u(i): i=0, \dots, N-1\}$ $\{y(i): i=0, \dots, N\}$ が与えられるとき, これが伝達関

数 $R(z, l)$ をもつシステムの入力出力であるための必要十分条件は,

$$Q_N^l = \frac{1}{N-l+1} \sum_{i=l}^N L_i^l T L_i^l \quad (25)$$

なる行列の固有値に零があり、それに対応する固有ベクトルの第 1 成分が零でないことである。

ただし,

$$L_i^l = [y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-l}, u_{i-1}, \dots, u_{i-l}] \quad (26)$$

$$u_{i-l} = \begin{bmatrix} -u^T(t-i) & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -u^T(t-i) & & & & & \\ \vdots & & 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & -u^T(t-i) \end{bmatrix} \quad (27)$$

$p \times mp$ matrix

【証明】(必要条件であること) 与えられたデータが, $R(z, l)$ の入力出力であるならば,

$$y(t) = R(z, l) u(t) \quad (t=0, \dots, N) \quad (28)$$

$$\phi^T = (1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l, r_{11}^T, r_{12}^T, \dots, r_{lp}^T) \quad (29)$$

とすると (28) 式から,

$$L_i^l \phi = 0 \quad t=l, \dots, N \quad (30)$$

(30) 式に $L_i^l T$ をかけ和をとると,

$$\sum_{i=l}^N L_i^l T L_i^l \phi = (N-l+1) Q_N^l \phi = 0 \quad (31)$$

(31) 式から ϕ は Q_N^l の固有値零に対応する固有ベクトルであり (29) 式の ϕ の定義より ϕ の第 1 要素は零でない。

(十分条件であること) Q_N^l が固有値に零があり、それに対応する固有ベクトル ϕ の第 1 要素が零でないとする,

$$\sum_{i=l}^N L_i^l T L_i^l \phi = 0 \quad (32)$$

(32) 式に ϕ^T をかけると,

$$\sum_{i=l}^N \|L_i^l \phi\|^2 = 0 \quad (32)'$$

(32)' から,

$$L_i^l \phi = 0 \quad t=l, \dots, N \quad (33)$$

ϕ の第 1 要素 ϕ_1 で ϕ を割ったものを ϕ とすると,

$$\phi = \phi / \phi_1 \quad (34)$$

$$L_i^l \phi = 0 \quad t=l, \dots, N \quad (35)$$

すなわち $\alpha_1 = \phi_2, \alpha_2 = \phi_3, \dots, \alpha_l = \phi_{l+1}$,

$$r_i = \begin{bmatrix} \phi_{(i-1)p m + l + 2}, \dots, \phi_{(i-1)p n + l + m + 1} \\ \phi_{i p m + l - m + 2}, \dots, \phi_{i p m + l + 1} \end{bmatrix}$$

とすると (35) 式から入力出力は (10) 式の伝達関数を満たす。(主定理終)

【系 5】 主定理の条件が満足されるとき, 伝達関数 $R(z, l)$ の未知パラメータ ϕ は,

$$\phi = \phi / \phi_1 \quad (36)$$

で与えられる。ただし ϕ は Q_N^l の零固有値に対する固有ベクトルで ϕ_1 はその第 1 要素。

主定理と系 5 から入力出力データが与えられるとき $R(z, l)$ がある l に対し存在するかどうか, 存在すればその未知パラメータがきめられる。もしある l に対し, 主定理の条件が満足しない場合, 満足するまで l を増やせばよい。次に主定理の条件を満たす $R(z, l)$ が与えられても, この $R(z, l)$ が uncontrollable and/or unobservable な状態を表現している可能性があるとき,

$$R(z, l) = R(z, l') \quad l' \leq l$$

なる l' が存在する。(36) 式の最小の l' に対する $R(z, l')$ は定理 2 から,

$$R(z, l') = H_0(zI - F_0)^{-1} G_0 \quad (37)$$

以上から $R(z, l)$ が存在するとき, 系 5 より ϕ を求め次に定理 2 から最小次元実現システム $\sum_0(F_0, G_0, H_0)$ を同定する。 $\sum_0$ のまま制御あるいは観測のモデルとして使用しても良いし (37) 式から $R(z, l')$ を求めても良い。

4. ノイズに汚されたデータが与えられる場合

前章で有限長の入力出力データが与えられる場合この入力出力関係を満たす最小次元システムを同定する方法を述べた。しかし, 一般の同定問題においては, 入力 $u(t)$, 出力 $y(t)$ は,

$$v(t) = u(t) + \mu(t) \quad (38)$$

$$z(t) = y(t) + \nu(t) \quad (39)$$

とノイズ $\mu(t)$, $\nu(t)$ に汚されたデータ $\{v(t) : t=0, \dots, N-1\}$ $\{z(t) : t=0, \dots, N\}$ が与えられる。 $\mu(t)$, $\nu(t)$ を平均値零, 分散 σ^2 の互いに独立なエルゴード性をもつ白色雑音と仮定する。

$$E(\mu_i(t)) = E(\nu_j(t)) = 0 \quad i=1, \dots, m, j=1, \dots, p \quad (40)$$

$$E(\mu(t) \mu^T(\tau)) = \sigma^2 I_m \delta_{t\tau}, \quad E(\nu(t) \nu^T(\tau)) = \sigma^2 I_p \delta_{t\tau} \quad (41)$$

ただし, E は数学平均を示す。

(26) 式の L_i^l と同じように,

$$\tilde{L}_i^l \triangleq [z_i, z_{i-1}, \dots, z_{i-l}, V_{i-1}, \dots, V_{i-l}] \quad (42)$$

ただし,

$$V_{i-l} = \begin{bmatrix} -v^T(t-i) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -v^T(t-i) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -v^T(t-i) \end{bmatrix} \quad (43)$$

すると L_i^l と $\tilde{L}_i^l$ は次の関係を満たす。

$$E(L_i^l T L_i^l) = E(\tilde{L}_i^l T \tilde{L}_i^l) - \sigma^2 I \quad (44)$$

ただし,

$$A = \begin{bmatrix} p & & 0 \\ & \ddots & \\ & & p1 \\ 0 & & & 1 \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 1 \\ \vdots & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad ((1+l) \cdot plm) \times ((1+l) \cdot plm) \text{ 行列}$$

$l+1$ 個

すなわち $\tilde{L}_t^l$ が与えられれば $E(\tilde{L}_t^{lT} \tilde{L}_t^l)$ を求めることができる. 仮定から,

$$E(\tilde{L}_t^{lT} \tilde{L}_t^l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-l+1} \sum_{t=l}^N \tilde{L}_t^{lT} \tilde{L}_t^l \quad (45)$$

すなわち十分大きな N に対して,

$$\frac{1}{N-l+1} \sum_{t=l}^N \tilde{L}_t^{lT} \tilde{L}_t^l - \sigma^2 A \triangleq \bar{Q}_N^l \equiv Q_N^l \quad (46)$$

σ^2 が既知の場合 $\bar{Q}_N^l$ の最小固有値に対応する固有ベクトルから系 5 を用いて未知パラメータを求める. 十分大きな l に対しても N が有限なら最小固有値は零にはならないが, 実際には最小固有値が十分小さければ, 主定理を満たしていると考えて良い. このようにして求めた $R(z, l)$ から定理 2 と同様の方法で, 実際の観点からの最小次元実現を求める. これには ϵ -approximately controllable⁹⁾ と類似の ϵ -practically controllable なる考え方を導入する.

【定義 3】 $WW^T(MM^T)$ の ϵ より大きい固有値に対応する固有ベクトルによって張られる部分空間の要素を ϵ -practically controllable (ϵ -practically observable) という.

この考え方は, 時刻 0 で零状態にあるシステムは時刻 t では,

$$x(t) = \sum_{i=1}^t F^{t-i} G u(i-1) \quad (47)$$

Caley-Hamilton の定理から¹⁰⁾,

$$x(t) = \sum_{i=1}^n F^{t-i} G u_i = W u \quad (47)'$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad m \times n \text{ vector を } U \text{ の要素とする.}$$

WW^T の零でない固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_{n'}$ としそれに対応する正規固有ベクトルを $\omega_1, \dots, \omega_{n'}$ とし WW^T の零空間と張る線形独立ベクトルを $\omega_{n'+1}, \dots, \omega_n$ とする. $W^T W$ の固有値も (14), (15) 式から $\lambda_1, \dots, \lambda_{n'}$ となり, 対応する正規固有ベクトルを $v_1, \dots, v_{n'}$ とし $W^T W$ の零空間を張る線形独立ベクトルを $v_{n'+1}, \dots, v_{nm}$ とする.

$$x = (\omega_1, \dots, \omega_n) x^1 \quad (48)$$

$$u = (v_1, \dots, v_{nm}) u' \quad (49)$$

と x, u の基底を変えると,

$$x(t) = (\omega_1, \dots, \omega_n) x' = W(v_1, \dots, v_{nm}) u' \quad (50)$$

(16) 式から,

$$x'(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{n'}^{1/2} & & \\ & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} u' \quad (51)$$

$$\text{しかるに, } \lambda_{n_0+1}, \dots, \lambda_{n'} < \epsilon \quad (52)$$

なるとき,

$$x_i^2 \leq \epsilon \|u'\|^2 \quad i = n_0+1, \dots, n' \quad (53)$$

(53) 式から ϵ が小さいとき x_i ($i = n_0+1, \dots, n'$) は他の状態変数に比べ実際の見地より practically uncontrollable と考えて良い.

また ϵ -practically observability についても同様の議論ができる. これに対し次の定義 6 をする.

【定義 6】 ϵ -practically controllable, observable なる状態だけでシステムを表現したものを ϵ -minimal realization という.

【定理 3】 ϵ -minimal realization は, MM^T のすべての固有値が ϵ 以上になるように η をまず定め, 次にこのように定められた W に対し $\lambda(WW^T) > \epsilon$ を満たす正規固有ベクトル $\omega_1, \dots, \omega_{n_0}$ から,

$$S_0 = [\omega_1, \dots, \omega_{n_0}] \quad (54)$$

$$V_0 = \begin{bmatrix} \omega_1^T \\ \vdots \\ \omega_{n_0}^T \end{bmatrix} \quad (55)$$

とするとき,

$$F_0 = V_0 F S_0, \quad G_0 = V_0 G, \quad H_0 = H S_0 \quad (56)$$

で与えられる.

証明は定理 2 と定義 5 の説明より明らかである.

(46) 式の σ^2 が未知のとき十分大きく l をとり

$A^{-1} \frac{1}{N-l+1} \sum_{t=l}^N \tilde{L}_t^{lT} \tilde{L}_t^l$ の最小固有値の固有ベクトルから, F_0, G_0, H_0 を求め, $l+1$ の場合に求めた F_0 の次元と比べ, $l+1$ のときのほうの F_0 の次元が大きければ $l+2$ をとる操作をする. l と $l+1$ が F_0 の次元が同じとき, $A^{-1} \frac{1}{N-l+1} \sum_{t=l}^N \tilde{L}_t^{lT} \tilde{L}_t^l$ の最小固有値が近似的に σ^2 であることが (46) 式からわかる.

5. 例 題

これまで多変数系の同定法を提案したが, この方法をはっきり示すため単一変数系へ応用した場合を例に示す.

【例題 1】 (57) 式のパルス伝達関数を持つシステムのノイズに汚されない入出力データ $\{u(t), y(t), t=0, \dots, 48\}$ が与えられた.

$$R(z) = \frac{0.75z^{-1} - 0.25z^{-2}}{1 - 0.85z^{-1} + 0.5z^{-2}} \quad (57)$$

このとき Q_{33} の固有値が零で第 1 要素が 1 の固有ベクトル ϕ は,

$$\phi^T = (1, 5.525, 80.286, -23.014, 3.313, 23.111, 0.75, 4.531, 62.310, 13.365, -11.556) \quad (58)$$

すなわち入出力データから 5 次のシステム,

$$R(z, 5) = \frac{\phi_7 z^{-1} + \phi_8 z^{-2} + \phi_9 z^{-3} + \phi_{10} z^{-4} + \phi_{11} z^{-5}}{1 + \phi_2 z^{-1} + \phi_3 z^{-2} + \phi_4 z^{-3} + \phi_5 z^{-4} + \phi_6 z^{-5}} \quad (57)'$$

が同定された。(57)' 式の observe canonical form は $\eta=1$ に対し,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\phi_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\phi_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\phi_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\phi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\phi_2 \end{pmatrix} \quad (59 \cdot 1)$$

$$G = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{10} \\ \phi_9 \\ \phi_8 \\ \phi_7 \end{pmatrix} \quad (59 \cdot 2) \quad H^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (59 \cdot 3)$$

$W =$

$$\begin{pmatrix} -11.556 & -17.333 & -8.956 & 1.054 & 5.374 \\ 13.365 & 14.041 & -18.617 & -8.804 & 1.825 \\ 62.310 & 30.626 & -5.123 & -19.667 & -14.156 \\ 4.531 & 2.095 & -0.485 & -1.460 & -0.998 \\ 0.75 & 0.388 & -4.563 & -0.233 & -0.175 \end{pmatrix} \quad (60)$$

WW^T の固有値は 5851.707, 958.6566, 0, 0, 0, である。零でない 2 つの固有値に対応する正規固有ベクトルを ω_1, ω_2 とし $S = [\omega_1, \omega_2]$ とすると, $V = S^T$ は,

$$S^T = \begin{pmatrix} -0.232 & 0.112 & 0.963 & 0.0694 & 0.0117 \\ 0.488 & 0.872 & 0.0157 & 0.0067 & -0.0006 \end{pmatrix} \quad (61)$$

(59), (61) 式を (24) 式に代入すると,

$$F_0 = \begin{pmatrix} 0.4013 & 0.8836 \\ -0.3621 & 0.4486 \end{pmatrix} \quad G_0 = \begin{pmatrix} 64.528 \\ 7.023 \end{pmatrix} \quad H_0^T = \begin{pmatrix} 0.0117 \\ -0.0006 \end{pmatrix} \quad (62)$$

(62) 式で $[F_0, G_0, H_0]$ の与えられるシステムの伝達関数は,

$$H_0[Iz - F_0]^{-1}G_0 = \frac{0.75z^{-1} - 0.25z^{-2}}{1 - 0.85z^{-1} + 0.5z^{-2}} \quad (63)$$

をうる。

【例題 2】 例題 1 と同じ (57) 式の伝達関数をもつシステムの, 分散 $\sigma^2 = 0.05^2$ のノイズで汚された入

出力データ $\{v(t), z(t), t=0, \dots, 48\}$ が与えられた。

分散を未知とし $\frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N \tilde{L}_t^T \tilde{L}_t$ の最小固有値 0.001394 に対する第 1 要素が 1 の固有ベクトルは,

$$\phi^T = (1, 1.1846, 0.8327, 0.3900, 0.080, 0.5311, 0.7625, 1.2801, 1.0603, 0.3321, -0.2566) \quad (64)$$

(64) 式から (57)', (59) 式と同様にパルス伝達関数を求められ, このシステムを実現する observe canonical form $[F, G, H]$ が求められる。 $\eta=1$ のとき MM^T の固有値は 6.512, 3.4514, 1.2058, 0.3161, 0.1167 であるから $\varepsilon=0.01$ のとき $\eta=1$ として良い。このときの W は,

$$W = \begin{pmatrix} -0.2566 & -0.4049 & -0.2002 & 0.0109 & 0.1353 \\ 0.3321 & -0.3176 & -0.4351 & -0.1986 & 0.0313 \\ 1.0603 & 0.0347 & -0.4646 & -0.4271 & -0.0992 \\ 1.2801 & 0.4259 & -0.2790 & -0.4475 & -0.2149 \\ 0.7625 & 0.3769 & -0.2051 & -0.2548 & -0.1457 \end{pmatrix} \quad (65)$$

WW^T の固有値は 4.544, 0.672, 0.00207, 0.000215, 0.000089 であるから $\varepsilon=0.01$ より大きい固有値に対応する正規固有ベクトルを ω_1, ω_2 とし $S = [\omega_1, \omega_2]$ は前の例題同様 $V = S^T$ であり,

$$S^T = \begin{pmatrix} -0.1340 & 0.1824 & 0.5647 & 0.6839 & 0.4026 \\ 0.5536 & 0.6563 & 0.3562 & -0.1673 & -0.3286 \end{pmatrix} \quad (66)$$

定理 3 より (66) 式を用いて ε -practically minimal realization を求めると,

$$F_0 = \begin{pmatrix} 0.2530 & 1.0455 \\ -0.3248 & 0.5783 \end{pmatrix} \quad (67 \cdot 1)$$

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1.8765 \\ -0.0109 \end{pmatrix} \quad (67 \cdot 2)$$

$$H_0 = [0.4026, 0.3286] \quad (67 \cdot 3)$$

(67) 式より同定されたシステムの伝達関数は,

$$H_0(Iz - F_0)^{-1}G_0 = \frac{0.759z^{-1} - 0.242z^{-2}}{1 - 0.8313z^{-1} + 0.4859z^{-2}} \quad (68)$$

(57) 式と比較し, (68) 式は良好な同定結果を与えている。以上より $R(z, l)$ を主定理と系 5 から求め, 定理 2 を用いて最小次元実現あるいはデータにノイズのある場合は ε -最小次元実現が求められることを示した。 ε の選び方としてはなんら定量的な方法はこれまで与えなかったがたとえば,

$$\varepsilon = \frac{1}{100} \min \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n_0}\} \quad (69)$$

などが考えられるであろう。

また最小次元実現から伝達関数を求めることにより、これまでむずかしかった次数の決定も容易に行なえることがわかる。

6. 結 論

最近の実現問題の成果を用いて、多変数系の実際的同定法を与えた。その結果同定されたシステムの構造に注意を払うべきであることがわかった。これは、これまでのパラメータ推定に重点をおいた同定法では求められなかったことがらであり、「次元が大きければ大きいほど正確なモデル」といわれたものが、実は uncontrollable unobservable な状態をもつ制御にも観測に使えないモデルを与えることになることを示した。特にこれまで発達した実現理論を実際に応用するため、 ϵ -practically controllability, ϵ -practically observability と ϵ -minimal realization なる概念を導入し、これまでのパラメータ推定に重点を置いた同定法をシステムの構造を考慮することにより、次数の決定まで含んだ実際的同定法に改善する方向を示した。これらの結果はシステム理論を実際に活用する道を示したといえるであろう。

終わりに本研究について御討論くださったフロリダ大学の R. E. Kalman 教授に感謝致します。またこの研究をするに当たり昭和 46 年度松永研究助成金を一

部使用させていただきました。ここに明記して感謝致します。

参 考 文 献

- 1) K. J. Åström & P. Eykhoff : Identification and Process Parameter Estimation, Preprint of 2nd IFAC Symp. on Identification (1970)
- 2) A. V. Balakushran & V. Deterka : Identification in a Automatic Control Systems, Survey Paper at 4th Congress of IFAC (1969)
- 3) A. P. Sage & J. L. Melsa : System Identification, Academic Press (1971)
- 4) R. E. Kalman et al. : Topics in Mathematical System Theory McGraw Hill (1969)
- 5) E. G. Gilbert : Controllability and Observability in Multivariable Control Systems, SIAM Control, 1-2, 128/151 (1963)
- 6) D. Q. Mayne : Computational Procedure for the Minimal Realization of Transfer-function Matrix, Rroc. IEE, 115-9, Sept. 1363/1368 (1968)
- 7) B. L. Ho & R. E. Kalman : Effective Construction of Linear State-Variable Models from Input/Output Functions, Regelungs Technik 14, Jahrg Heft 12, 545/548 (1966)
- 8) K. Furuta & J. G. Daquet : On the Identification of Time-Invariant Discrete Process, IEEE-AC, 15-1, 153/155 (1970)
- 9) H. A. Antosiewicz : Linear Controllability in [Functional Analysis and Optimization] Academic Press (1966)
- 10) L. A. Zadeh C. A. Desoer : Linear System Theory, McGraw Hill, 498/499 (1963)