バナッハ空間における条件付最適制御問題 の近似解法—内点法による考察—

小林 幹 夫・大 島 康 次 郎

東京大学生産技術研究所 東京都港区六本木 7-22-1

(昭和 46 年 7 月 24 日 受付)

An Approximate Method for Solving Constrained Optimal Control Problems Defined in Banach Space —Approach by Means of Interior Penalty Method—

Mikio KOBAYASHI and Yasujiro OSHIMA

(Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Minato-ku, Tokyo)

(Received July 24, 1971)

The purpose of this paper is to establish an approximate method for solving constrained optimal control problems defined in Banach space by means of an interior penalty method.

The constraints treated herein are described by equalities and inequalities. These constraints, the control variables and the state variables are defined in general real Banach space.

At first, the case in which the equality constraints and the inequality constraints are embedded in the penalty function to obtain the approximate solutions is considered, and it is shown that a series of the approximate solutions converges to the optimal solution weakly or strongly and a series of the approximate values of the cost functional converges to the optimal value.

Next, the case in which the inequality constraints are embedded only in the penalty function is treated. In this case, the results obtained for some functionals are symmetrical to the results obtained by the exterior penalty method. Especially the upper bounds for the optimal value of the cost functional are obtained, while the lower bounds are obtained generally by the exterior method.

1. 緒 言

拘束条件が課せられた最適制御問題を実際に解く手法として重み関数法がある。この手法は拘束条件が課せられていない問題を逐次解くことにより最適解に接近しようとする方法である。

近似解が不等式拘束条件を満足しながら最適解に近づくかあるいは必ずしも満足せずに近づくかということによって、この手法は2つに大別される。前者の性質を有する近似解法は内点法といわれ、後者の性質を有するそれは外点法といわれている。内点法に関する研究は、ユークリッド空間におけるプログラミングの問題を扱ったもの¹⁾、常微分方程式系における最適制御問題を扱ったもの²⁾など種々のものが発表されてい

る。

本論文はバナッハ空間における条件付最適制御問題を内点法により考察し、1つの近似解法を確立することを目的としている。

工学的見地から重み関数法に期待される最も重要なことは、与えられた拘束条件を必要に応じて重み関数に埋め込んで処理できるということである。しかしながら、内点法において用いられる重み関数は外点法におけるそれと異なり一般に不連続性を有しているので、不等式拘束条件が関数空間で定義される場合には上述のことを実現させるのはたいへん困難である。すなわち、ユークリッド空間の問題に対して開発された従来の手法をそのまま連続時間系の問題に拡張した場合、ある種の付加的条件なしには重み関数を導入し

た最適問題の解の存在性を保証できないのである。たとえば Lasdon らの手法²⁾においては“不等式拘束条件の記号が定義時間区間のある点で成立するならば、このときそれに対応した重み関数項の値は無限大になる”という仮定が必要である。これと類似の仮定をバナッハ空間における問題に持ち込むことは容易であるが、近似解法としてはこのとき外点法³⁾に比べわずらわしい制限が課せられることになり、与えられた拘束条件をすべて重み関数に埋め込むということは一般にできない。

本研究では、上述の観点に立ち、付加的条件なしにすべての拘束条件を重み関数に埋め込んで近似解を得るということに重点をおいて考察が進められる。なお本稿の後半においては、不等式拘束条件のみを重み関数に埋め込んだ場合の問題が扱われ、このとき、2, 3のはん関数に関して外点法と対称的な性質があることが簡単に述べられる。

ここで扱う拘束条件は等式および不等式で与えられるものである。それらの拘束条件、制御変数および状態変数は一般的な実バナッハ空間で定義される。

最適制御問題がバナッハ空間で定式化されたならば解析手法は制御系を記述する運動方程式の種類によって左右されないで、本手法は分布定数系、集中定数系および離散時間系等の広範囲の状態変数あるいは制御変数制限付最適制御問題に適用することができる。

2. 最適制御問題と解の存在性

ある集合 D の上で定義される実数値関数の集合とあるノルムによって構成されるバナッハ空間を B_i とする制御変数および状態変数をそれぞれ u および z で表わし、 $u \in B_1$ および $z \in B_2$ とする。写像、

$$z = z(u), B_1 \rightarrow B_2$$

は連続であるものとする。評価関数は、

$$f(z, u), f \in R^1 \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 R^1 は 1 次元ユークリッド空間を表わす。不等式および等式拘束条件は、

$$g(z, u) \leq 0, h(z, u) = 0, g \in B_3, h \in B_4 \quad (2)$$

で与えられる。ここで、 $g \leq 0$ は、

$$\text{ess sup}_D g_i \leq 0, i = 1, 2, \dots, m_3$$

を意味する。本稿では簡単のため、必要に応じて $f(z, u)$, $g(z, u)$ および $h(z, u)$ を $f(u)$, $g(u)$ および $h(u)$ あるいは f , g および h と同一視する。

最適制御問題はつぎようになる。

【問題 1】 (2) 式で与えられる拘束条件を満足し、(1) 式で与えられる $f(u, z)$ を最小にする $u_0 \in B_1$ を求めよ。

以下においては前提条件となる事項を $A(\quad)$ で表わす。

【A 1】 $f(u)$ および $g(u)$ は u に関して連続凸である。 $h(u)$ は u に関して連続であり定数項を除いて u に関して線形である。

【A 2】 B_1 は回帰的なバナッハ空間である。

【A 3】 $U \equiv \{u | g(u) \leq 0, h(u) = 0, u \in B_1\} \neq \emptyset$

【A 4】 $U_\nu \equiv \{u | f(u) \leq \nu, u \in U\}$ とする。ある ν に対して $U_\nu \neq \emptyset$ であり、 U_ν は有界である。

【補題 1】 条件 A 1~A 4 のもとで問題 1 の解が存在する。証明は文献 3) または 4) の場合と同様となるので省略する。

3. 近似解に関する諸性質

この章においては、近似解を得るために重み関数を導入した最適問題が設定され、近似解に関する性質が考察される。3.1 は与えられた拘束条件をすべて重み関数に埋め込んで扱うという一般的な手法により近似解を得ることを主目的としている。3.2 では不等式拘束条件のみを重み関数に埋め込んだ場合の手法を考え、外点法との対称性、殊に評価関数値の 1 つの限界を考察するのが目的である。

3.1 拘束条件をすべて重み関数に埋め込む場合

近似解を得るために 3 つの最適問題が設定され、これらの問題とその解に関するいくつかの性質が考察される。以下における問題 2 と問題 3 は問題 4 に対する補助的な問題であり、問題 4 は内点法により近似解を得るための主問題である。

つぎのような定義をしておく。

$$\left. \begin{aligned} U_\varepsilon &\equiv \{u | g(u) \leq -\varepsilon, h(u) = 0, u \in B_1\} \\ V_\varepsilon &\equiv \{u | g(u) \leq -\varepsilon, u \in B_1\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 $g(u) \leq -\varepsilon$ は、

$$\text{ess sup}_D g_i(u) \leq -\varepsilon, i = 1, 2, \dots, m_3$$

を意味し、 ε は正の定数である。

【A 5】 適当な ε に対して $U_\varepsilon \neq \emptyset$ である。

以下、補題 6 までの考察において条件 A 1~A 5 が満足されているものとする。この章における最初の補助的な問題はつぎようになる。

【問題 2】 U_ε の上で $f(u)$ を最小にする $u(\varepsilon)$ を求めよ。

【補題 2】 問題 2 の解が存在する。

【補題 3】 ある実数列を $\{\varepsilon_n\}$ とする。ここで、 $0 < \varepsilon_n < \varepsilon$ であり、 $\varepsilon_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ である。このとき、集合 $\{U_{\varepsilon_n}\}$ は U で稠密である。

【証明】 U の任意の要素を u とする。この補題を証明するには、任意の正の $\bar{\varepsilon}$ が与えられたときある整

数 N が存在して $n > N$ なるすべての n に対して,

$$\|u - u_n\| < \bar{\varepsilon}$$

を満足するような $u_n \in U_{\varepsilon_n}$ が存在することを示せば十分である。いま,

$$\|u_m - u\| < \bar{\varepsilon}/\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

および,

$$\alpha \varepsilon_m > \varepsilon_N$$

を満たす $u_m \in U_{\varepsilon_m}$ および N を選び,

$$u_\alpha = \alpha u_m + (1 - \alpha)u$$

とおく。このとき, A1 より,

$$h(u_\alpha) = \alpha h(u_m) + (1 - \alpha)h(u) = 0,$$

$$g(u_\alpha) \leq \alpha g(u_m) + (1 - \alpha)g(u)$$

$$\leq -\varepsilon \alpha_m$$

$$< -\varepsilon_N$$

が成立する。したがって, つぎの関係式が成立する。

$$u_\alpha \in U_{\varepsilon_N} \subseteq U_{\varepsilon_n} (n > N)$$

いっぽう, 関係式,

$$\begin{aligned} \|u - u_\alpha\| &= \alpha \|u - u_m\| \\ &< \alpha \cdot (\bar{\varepsilon}/\alpha) \\ &= \bar{\varepsilon} \end{aligned}$$

が得られる。

$$\text{【補題 4】} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f[u(\varepsilon_n)] = f(u_0)$$

【証明】 $U_{\varepsilon_n} \subseteq U_{\varepsilon_{n+1}}$ であるから,

$$f[u(\varepsilon_n)] \geq f[u(\varepsilon_{n+1})] \geq f(u_0)$$

が成立する。いっぽう, 補題 3 より, 任意の正の $\hat{\varepsilon}$ が与えられたとき $n > N$ なるすべての n に対して,

$$f(u_0) > f(\bar{u}) - \hat{\varepsilon}$$

を満たすような整数 N および $\bar{u} \in U_{\varepsilon_n}$ が存在する。したがって,

$$\begin{aligned} f[u(\varepsilon_n)] &\geq f(u_0) \\ &> f(\bar{u}) - \hat{\varepsilon} \\ &\geq f[u(\varepsilon_n)] - \hat{\varepsilon} \end{aligned}$$

が得られる。すなわち, すべての $n > N$ に対して,

$$f(u_0) \leq f[u(\varepsilon_n)] < f(u_0) + \hat{\varepsilon}$$

が成立する。

【補題 5】 $U_{\varepsilon_n, \nu} \equiv \{u | f(u) \leq \nu, u \in U_{\varepsilon_n}\}$ とする。このとき, $\{U_{\varepsilon_n, \nu}\}$ は U_ν で稠密である。ここで, ν はある定数である。

【補題 6】 $\{u(\varepsilon_n)\}$ の任意の部分列はある u_0 に弱収束する部分列を含む。

【証明】 適当な ν に対して, $u(\varepsilon_n) \in U_{\varepsilon_n, \nu}$ となる。 $U_\nu \supseteq U_{\varepsilon_n, \nu}$ であり, 条件 A4 より U_ν は有界だから $\{U_{\varepsilon_n, \nu}\}$ も有界となる。したがって, $\{u(\varepsilon_n)\}$ は有界であり, 条件 A2 より $\{u(\varepsilon_n)\}$ の任意の部分列は B_1 のある要素に弱収束する部分列を含む。 $\{u(\varepsilon_n)\}$ の任意の弱収束部分列の弱極限を u^* とする。 U_ν は閉凸

集合であるから $u^* \in U_\nu$ である。したがって,

$$f(u^*) \geq f(u_0) \quad (4)$$

が成立する。いっぽう, 関係式,

$$\begin{aligned} f(u_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f[u(\varepsilon_n)] \\ &= \varliminf_{n \rightarrow \infty} f[u(\varepsilon_n)] \\ &\geq f(u^*) \end{aligned} \quad (5)$$

が補題 4 および $f(u)$ の弱下半連続性から成立する。

(4) および (5) 式から,

$$f(u^*) = f(u_0)$$

が得られる。

最後の補助的な問題を考察するため, はん関数,

$$I_1(u, n) = f(u) + r_n M(u), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

を導入する。ここで, $r_n M(u)$ は重み関数項であり,

$$\left. \begin{aligned} 0 < r_n < r_{n+1} < \dots, \quad r_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty) \\ M(u) &= \|h(u)\|^c, \quad 1 \leq c < \infty \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

である。 c は (7) 式の第 2 行目の不等式を満足するある定数である。

【問題 3】 V_{ε_m} の上で $I_1(u, n)$ を最小にする $u_n^1(\varepsilon_m)$ を求めよ。ここで, V_{ε_m} は (3) 式によって定義される。

【A 6】 $V_{\varepsilon_m, n, \nu} \equiv \{u | I_1(u, n) \leq \nu, u \in V_{\varepsilon_m}\}$ とする。 $V_{\varepsilon_m, n, \nu}$ はおのおのの n および ν に対して有界である。

この節以下の考察において, 条件 A1~A6 が満足されているものとする。

【補題 7】 問題 3 の解が存在する。

【補題 8】 つぎの関係式が成立する³⁾。

$$(a) \quad I_1[u_n'(\varepsilon_m), n] \leq I_1[u_{n+1}'(\varepsilon_m), n+1]$$

$$(b) \quad \text{任意の } \bar{u} \in U_{\varepsilon_m} \text{ に対して,} \\ I_1[u_n'(\varepsilon_m), n] \leq f(\bar{u})$$

$$(c) \quad M[u_n'(\varepsilon_m)] \geq M[u_{n+1}'(\varepsilon_m)]$$

$$(d) \quad f[u_n'(\varepsilon_m)] \leq f[u_{n+1}'(\varepsilon_m)]$$

$$(e) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n M[u_n'(\varepsilon_m)] = 0$$

【補題 9】 固定された ε_m に対して $\{u_n'(\varepsilon_m)\}$ の任意の部分列はある $u(\varepsilon_m)$ に弱収束する部分列を含む。

【証明】 $l > n$ なるすべての整数 l に対して,

$$V_{\varepsilon_m, n, \nu} \supseteq V_{\varepsilon_m, l, \nu}$$

が成立する。条件 A6 より $V_{\varepsilon_m, n, \nu}$ は有界であるから $\{u_n'(\varepsilon_m)\}$ は有界である。したがって, $\{u_n'(\varepsilon_m)\}$ の任意の部分列は B_1 のある要素に弱収束する部分列を含む $\{u_n'(\varepsilon_m)\}$ の任意の弱収束部分列を $u^*(\varepsilon_m)$ とする。 V_{ε_m} は閉凸であるから $u^*(\varepsilon_m) \in V_{\varepsilon_m}$ である。補題 8 の (d) より, 関係式,

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} M[u_n'(\varepsilon_m)] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} M[u_n'(\varepsilon_m)] \\
&\geq M[u^*(\varepsilon_m)] \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

が得られる。 $u^*(\varepsilon_m)$ は (2) 式で与えられる等式拘束条件を満たすから、それは U_{ε_m} の要素である。したがって、つぎの不等式が得られる。

$$f[u^*(\varepsilon_m)] \geq f[u(\varepsilon_m)] \quad (8)$$

つぎに、数列 $\{f[u_n'(\varepsilon_m)]\}$ が極限をもち、

$$f[u^*(\varepsilon_m)] \leq f[u(\varepsilon_m)]$$

すなわち、

$$f[u^*(\varepsilon_m)] = f[u(\varepsilon_m)]$$

となることを示す。補題 8 の (b) より、すべての n に対して、

$$I_1[u_n'(\varepsilon_m)] \leq f[u(\varepsilon_m)]$$

が成立する。したがって、 $\{f[u_n'(\varepsilon_m)]\}$ は有界であり、補題 8 の (a) より非減小である。それゆえ、それは極限をもち、

$$\begin{aligned}
f[u(\varepsilon_m)] &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} f[u_n'(\varepsilon_m)] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} f[u_n'(\varepsilon_m)] \\
&\geq f[u^*(\varepsilon_m)] \quad (9)
\end{aligned}$$

が成立する。

$$\text{【補題 10】} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f[u_n'(\varepsilon_m)] = f[u(\varepsilon_m)]$$

さて、この章における主問題を考察するためには関数、

$$I(u, n) = f(u) + s_n L(u) + r_n M(n) \quad (10)$$

を導入する。ここで、

$$\left. \begin{aligned}
s_n &> s_{n+1} > \cdots, s_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\
L(u) &= \sum_{i=1}^{m_3} \langle 1/g_i(u), -1 \rangle
\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

である。この章における主問題、すなわち、内点法により近似解を得るために考察される問題はつぎのようになる。

【問題 4】 V_{ε_m} の上で $I(n, n)$ を最小にする $u_n(\varepsilon_m)$ を求めよ。

【注 1】 本稿においては、“不等式拘束条件がバナッハ空間で定義される”ということは“ $g(u) \leq 0$, $g(u) \in B_3$ ”を意味する。他の拘束条件に対しても同様である。 $B_3 \equiv R^{m_3}$ のときは先の条件を、

$$G(u) \equiv \text{ess sup}_D g(u) \leq 0, \quad G(u) \in R^{m_3}$$

とかきかえることにより、ユークリッド空間で定義される不等式拘束条件におきかえることができるが、このとき V_{ε_m} の点において $g(u)$ が u に関してフレッシュ微分可能であっても $G(u)$ は一般にフレッシュ微分可能ではないので、 $1/G_i(u)$ も微分可能ではない。

概念的にはこのような G を用いて問題 4 を考え得るわけであるが、数値計算法としてこの配法に類するものを利用しようとしているならば、近似解を実際に得るということは非現実的となる。このことは、たとえば、連続時間系の状態変数制限問題の近似解を得るという問題に対する本質的な解決にはならないことを意味する。

【補題 11】 問題 4 の解が存在する。

【証明】 $\bar{V}_{\varepsilon_m, n, \nu} \equiv \{u | I(u, n) \leq \nu, u \in V_{\varepsilon_m}\}$ とする。適当な ε_m および ν に対して $\bar{V}_{\varepsilon_m, n, \nu} \neq \emptyset$ となる。

$$\bar{V}_{\varepsilon_m, n, \nu} \subseteq \bar{V}_{\varepsilon_m, n, \nu}$$

であるから、条件 A6 より $\bar{V}_{\varepsilon_m, n, \nu}$ は有界である。さらに、 $I(u, n)$ は $\bar{V}_{\varepsilon_m, n, \nu}$ の上で u に関して連続であり凸であるから、 $\bar{V}_{\varepsilon_m, n, \nu}$ は有界閉凸集合である。したがって補題 1 の場合と同様の議論から問題 4 の解が存在する。

【補題 12】 固定された ε_m に対して $\{u_n(\varepsilon_m)\}$ の任意の部分列はある $u(\varepsilon_m)$ に弱収束する部分列を含む。

【証明】 $l > n$ なるすべての l に対して $V_{\varepsilon_m, n, \nu} \supseteq V_{\varepsilon_m, l, \nu}$ であり、 $\bar{V}_{\varepsilon_m, n, \nu} \subseteq V_{\varepsilon_m, n, \nu}$ であるから $\{\bar{V}_{\varepsilon_m, n, \nu}\}$ は補題 9 の証明部分より有界となる。したがって $\{u_n(\varepsilon_m)\}$ は有界である。

$u^*(\varepsilon_m)$ を $\{u_n(\varepsilon_m)\}$ の任意の弱収束部分列の弱極限とする。補題 9 の場合と同様の議論から、

$$M[u^*(\varepsilon_m)] = 0$$

および、

$$f[u^*(\varepsilon_m)] \geq f[u(\varepsilon_m)] \quad (12)$$

が得られる。

つぎに、 $\{f[u_n(\varepsilon_m)]\}$ が極限をもち、

$$f[u^*(\varepsilon_m)] \leq f[u(\varepsilon_m)]$$

すなわち、

$$f[u^*(\varepsilon_m)] = f[u(\varepsilon_m)]$$

となることを示す。つぎの不等式が成立する。

$$\begin{aligned}
I[u_n(\varepsilon_m), n] &> I_1[u_n(\varepsilon_m), n] \\
&\geq I_1[u_n'(\varepsilon_m), n] \quad (13)
\end{aligned}$$

補題 8 の (d) および補題 10 より、 $I_1[u_n'(\varepsilon_m)]$ は $f[u(\varepsilon_m)]$ に収束するから、任意の正の $\hat{\varepsilon}$ が与えられたときある整数 N が存在して、 $n > N$ なるすべての n に対して、

$$I_1[u_n'(\varepsilon_m), n] > f[u(\varepsilon_m)] - \hat{\varepsilon} \quad (14)$$

が成立する。

いっぽう、 $U_{\varepsilon_m} \subseteq V_{\varepsilon_m}$ であるから、

$$\begin{aligned}
I[u_n(\varepsilon_m), n] &\leq I[u(\varepsilon_m), n] \\
&= f[u(\varepsilon_m)] + s_n L[u(\varepsilon_m)] \quad (15)
\end{aligned}$$

が得られる。ある整数 N_1 を選び、 $n > N_1$ なるすべて

の n に対して,

$$s_n L[u(\varepsilon_m)] < \hat{\varepsilon} \quad (16)$$

を成立させることができる. したがって, (12)~(16)

式から,

$$f[u(\varepsilon_m)] - \hat{\varepsilon} < I[u_n(\varepsilon_m), n] < f[u(\varepsilon_m)] + \hat{\varepsilon}$$

となる. これらの関係式から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[u_n(\varepsilon_m)] = f[u(\varepsilon_m)],$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n L[u_n(\varepsilon_m)] = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n M[u_n(\varepsilon_m)] = 0$$

となる. けっきょく,

$$\begin{aligned} f[u(\varepsilon_m)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} f[u_n(\varepsilon_m)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f[u_n(\varepsilon_m)] \\ &\geq f[u^*(\varepsilon_m)] \end{aligned} \quad (17)$$

が成立する.

【補題 13】 固定された ε_m に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[u_n(\varepsilon_m)] = f[u(\varepsilon_m)]$$

が成立する.

近似解の収束性に関してはつぎの定理で述べられる.

【定理 1】 適当な整数列 $\{\bar{n}\} \subseteq \{n\}$ および $\{\bar{m}\} \subseteq \{m\}$ を選んだとき,

$$w - \lim_{\bar{m} \rightarrow \infty} [w - \lim_{\bar{n} \rightarrow \infty} u_n(\varepsilon_{\bar{m}})] = u_0$$

となる. ここで, $w - \lim$ は弱極限を表わす. 最適解が多数ある場合は, 定理 1 の等式の右辺の u_0 はそれらのうちのある最適解を意味する.

定理の証明は, 補題 6 および補題 12 より明らかであろう.

【系】 $f(u) = \|u\|^2 + F(u)$ とし, B_1 をヒルベルト空間とする. さらに, $F(u)$ は u に関する連続凸はん関数とする. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\varepsilon_m)] = u \quad (18)$$

となる.

【証明】 $f(u)$ は狭義の連続凸はん関数であるから, u_0 , $u(\varepsilon_m)$ および $u_n(\varepsilon_m)$ は唯一である. まず,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u(\varepsilon_m) = u_0 \quad (19)$$

が成立することを示す. 補題 6 から,

$$w - \lim_{m \rightarrow \infty} u(\varepsilon_m) = u_0$$

である. いま, $\{m\}$ の任意の部分列をあらためて $\{\bar{m}\}$ とする. $\{u(\varepsilon_m)\}$ は有界であるから $\{\|u(\varepsilon_{\bar{m}})\|^2\}$ および $\{F[u(\varepsilon_{\bar{m}})]\}$ がそれぞれ R^1 の要素に収束するように整数列 $\{\bar{m}\} \subseteq \{m\}$ を選ぶことができる. このとき補題 4 およびはん関数 $\|u\|^2$, $F(u)$ の弱下半連続性から,

$$f(u_0) = \lim_{\bar{m} \rightarrow \infty} f[u(\varepsilon_{\bar{m}})]$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\bar{m} \rightarrow \infty} \|u(\varepsilon_{\bar{m}})\|^2 + \lim_{\bar{m} \rightarrow \infty} F[u(\varepsilon_{\bar{m}})] \\ &\geq \|u_0\|^2 + F(u_0) \\ &= f(u_0) \end{aligned}$$

が成立する. 上の関係式において, 等号が成立するのは,

$$\lim_{\bar{m} \rightarrow \infty} \|u(\varepsilon_{\bar{m}})\|^2 = \|u_0\|^2$$

および,

$$\lim_{\bar{m} \rightarrow \infty} F[u(\varepsilon_{\bar{m}})] = F(u_0)$$

が成立するときに限る. したがって,

$$\lim_{\bar{m} \rightarrow \infty} \|u(\varepsilon_{\bar{m}})\| = \|u_0\|$$

が得られる. すなわち, 元の $\{m\}$ に対して,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u(\varepsilon_m)\| = \|u_0\|$$

となり, (19) 式が成立する⁵⁾.

つぎに, $\{n\}$ の任意の部分列をあらためて $\{n\}$ とする. 補題 12 から,

$$w - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\varepsilon_m) = u(\varepsilon_m)$$

となる. さらに, 上と同様の議論により, ある整数列 $\{\bar{n}\} \subseteq \{n\}$ に対して,

$$\lim_{\bar{n} \rightarrow \infty} \|u_n(\varepsilon_m)\| = \|u(\varepsilon_m)\| \quad (20)$$

が得られ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\varepsilon_m) = u(\varepsilon_m) \quad (21)$$

となる. (19) および (21) 式から (18) 式が得られる.

【注 2】 定理 1 において, $u(\varepsilon_m)$ および $u_n(\varepsilon_m)$ が唯一ならば,

$$w - \lim_{m \rightarrow \infty} w - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\varepsilon_m) = u_0$$

となる.

近似解に対応した評価関数値の収束に関してはつぎの定理で述べられる.

$$\text{【定理 2】 } \lim_{m \rightarrow \infty} [\lim_{n \rightarrow \infty} f[u_n(\varepsilon_m)]] = f(u_0)$$

この定理の証明は, 補題 12 および補題 13 より明らかであろう.

この節の残りの部分においては, 近似解を得るための本手法の主な特徴を述べるとともにじゃっかんの説をする.

従来の内点法をバナッハ空間の問題にあてはめて考えるとき, $V_0(\varepsilon=0)$ の上で $I(u, n)$ の最小化問題を考えるわけであるが, このとき $I(u, n)$ に含まれている重み関数項 $L(u)$ が不連続関数となるので解の存在が不明となる. このようなことは外点法においては惹起されず内点法特有のものであるが, このままでは最適制御問題の近似解法にとって最も重要な近似解の

最適解への収束性および近似解を代入したときの評価関数値の最適値への収束性を保証することが困難である。それゆえ、まず解の存在を保証する工夫をすることが必要であり、たとえば、Lasdon らの仮定²⁾に類似したものを導入するのが1つの解決方法であろう。しかしながら、このような仮定をバナッハ空間における問題にもち込むことは容易であっても実際の問題に直面したとき、仮定が成立しているかどうか明確にするのがわずらわしく、逆に明確にできる範囲の問題だけを扱おうとすれば、取扱われる問題の種類を限定することになる。したがって、従来の手法をそのままバナッハ空間の問題に拡張しても、本稿で扱っているような拘束条件をすべて重み関数に埋め込んで扱うことはできないのである。

これに対し、本研究では V_0 の代わりに V_ε が用いられているので $L(u)$ の不連続性が避けられており、前述のような付加的条件なしに与えられた拘束条件をすべて重み関数に埋め込んで扱うことができる。

一般に、重み関数法は従来の解析的手法で厳密解が得られない場合あるいはいわゆる間接法によって近似解を得ることが困難な場合に特に有力であり、与えられた拘束条件をすべて重み関数に埋め込むことができるということはこの手法に課せられるべき最も重要なことからである。

問題4の解を得るための各々の近似計算ステップにおいて、不等式、

$$g_i(u^l) \leq -\varepsilon_m, \quad i=1, 2, \dots, m_3 \quad (22)$$

を保持することが必要である。ここで、 l はくり返し計算のステップ数を表わす。ある問題によってはこのことは容易であろうし、また他のある問題では容易でないであろう。後者の場合は、以下に述べるように問題1を整理しなおすことにより、困難性はいちおう除去される。基本的な考えは、古典変分学あるいは ε 法などにおけるように制御系の運動方程式を等式拘束条件とみなすという考え方に立脚している。本手法では必要に応じて、運動方程式ばかりでなく終端条件、境界条件および初期条件等を等式あるいは不等式拘束条件とみなして扱ってさしつかえない。まず新しい等式拘束条件、

$$h_0(\tilde{u}) \equiv z - z(u) = 0$$

を導入する。ここで、 $\tilde{u} \equiv \{z; u\}$ であり、 $\tilde{u}$ は新しい制御(独立)変数である。なお、このとき $z(u)$ の線形性が要求される。 D の各点において、

$$g(z, u) \equiv g(\tilde{u}), \quad R^{m_1} \times R^{m_2} \rightarrow R^{m_3}$$

となり、不等式、

$$g_i(\tilde{u}^l) \leq -\varepsilon_m, \quad i=1, 2, \dots, m_3$$

を満足させることは容易となる。

つぎに、1つの具体例を述べる。運動方程式が、

$$d/dt \cdot z = Az + Bu \quad (23)$$

で与えられた場合を考える。積分オペレータ S を導入する。新しい等式拘束条件は、

$$h_0(\tilde{u}) \equiv z - c - S(Az + Eu) = 0$$

となる。ここで、 c は積分定数を表わす。

ここで注意すべきことは、内点法においては本手法に限らず、運動方程式を等式拘束条件として重み関数に埋め込んだ場合得られる近似解は一般に等式拘束条件 $z=z(u)$ を厳密には満足していないので、不等式、

$$g_i(\tilde{u}^l) \leq -\varepsilon_m, \quad i=1, 2, \dots, m_3$$

を厳密に満足していても、不等式、

$$g_i[z(u^l), u^l] \leq -\varepsilon_m, \quad i=1, 2, \dots, m_3 \quad (24)$$

を満足するとは限らないということである。しかしながら、このような場合でも近似解が得られることには変わらない。すなわち、定理1、系および定理2等が $\tilde{u}_n(\varepsilon_m)$ の要素 $u_n(\varepsilon_n)$ に対しても成立する。なお、さらに付加された前提条件のもとで、(24)式を満足する解が得られることを保証することができると考えられるが本稿では詳しい考察は割愛する。

3.2 不等式拘束条件のみを重み関数に埋め込む場合

内点はある集合の内部の点のあつまりを意味するものであり、外点はその集合の外部の点のあつまりを意味するものである。したがって、等式拘束条件に対して内点という概念を厳密にあてはめることは一般に困難であるが、ここではこれらの概念をじゃっかんゆるめて、拘束条件を満足するような u のとり得る領域を内点とよび、他の領域を外点とよぶことにする。すなわち、いわゆる内点と境界点との和集合をここでは内点とよぶことにする。この考え方に従えば、すべての拘束条件を重み関数に埋め込んだ外点法³⁾は1つの典型的なものであろう。しかし、本稿の3.1の内点は典型的なものではなく、変形された内点法ともいうべきものであろう。典型的なものは初期にプログラミングの分野で開発された重み関数に等式拘束条件が埋め込まれていない種類のものである。

この節では、典型的な内点法を考察するため、等式拘束条件がもともと与えられていない問題あるいは与えられていてもそれを厳密に満足しながら近似解を求めていく場合の問題を考える。この場合内点法と外点法はまったく対称的な手法となるので、得られる結果も対称的になるであろうということがとうぜん期待される。

ここでは、近似解に対応するはん関数値の性質に重

点において簡単に考察することにする。

以下、等式拘束条件が与えられていないものとして議論を進めていく。

【補題 14】 つぎの関係式が成立する。

$$(a) \quad I[u_n(\varepsilon_m), n] > I[u_{n+p}(\varepsilon_{m+q}), n+p]$$

$$(b) \quad I[u_n(\varepsilon_m), n] > f(u_0)$$

$$(c) \quad L[u_n(\varepsilon_m)] \leq L[u_{n+1}(\varepsilon_m)]$$

$$(d) \quad f[u_n(\varepsilon_m)] \geq f[u_{n+1}(\varepsilon_m)]$$

ここで、 $p > 0$ および $q \geq 0$ である。

【証明】

$$\begin{aligned} (a) \quad I[u_n(\varepsilon_m), n] &= f[u_n(\varepsilon_m)] + s_n L[u_n(\varepsilon_m)] \\ &> f[u_n(\varepsilon_m)] + s_{n+p} L[u_n(\varepsilon_m)] \\ &\geq f[u_{n+p}(\varepsilon_m)] \\ &\quad + s_{n+p} L[u_{n+p}(\varepsilon_m)] \\ &\geq f[u_{n+p}(\varepsilon_{m+q})] \\ &\quad + s_{n+p} L[u_{n+p}(\varepsilon_{m+q})] \\ &= I[u_{n+p}(\varepsilon_{m+q}), n+p] \end{aligned}$$

(b) $s_n L[u_n(\varepsilon_m)] > 0$ であり、 $u_n(\varepsilon_m) \in U$ であるから、

$$\begin{aligned} I[u_n(\varepsilon_m), n] &= f[u_n(\varepsilon_m)] + s_n L[u_n(\varepsilon_m)] \\ &> f[u_n(\varepsilon_m)] \\ &\geq f(u_0) \end{aligned}$$

(c) つぎの不等式が成立する。

$$\begin{aligned} f[u_n(\varepsilon_m)] + s_n L[u_n(\varepsilon_m)] &\leq f[u_{n+1}(\varepsilon_m)] + s_n L[u_{n+1}(\varepsilon_m)] \\ f[u_{n+1}(\varepsilon_m)] + s_{n+1} L[u_{n+1}(\varepsilon_m)] &\leq f[u_n(\varepsilon_m)] + s_{n+1} L[u_n(\varepsilon_m)] \end{aligned}$$

これらの不等式の辺々を加え合わせ、整理すると、

$$(s_n - s_{n+1}) \{L[u_n(\varepsilon_m)] - L[u_{n+1}(\varepsilon_m)]\} \leq 0$$

となる。

(d) (c) の証明に用いた 2 番目の不等式から、

$$\begin{aligned} f[u_n(\varepsilon_m)] - f[u_{n+1}(\varepsilon_m)] &\geq s_{n+1} \{L[u_{n+1}(\varepsilon_m)] \\ &\quad - L[u_n(\varepsilon_m)]\} \end{aligned}$$

となる。

補題 14 の $I[u_n(\varepsilon_m), n]$ または $f[u_n(\varepsilon_m)]$ は評価関数の最適値 $f(u_0)$ に対する 1 つの上限を与えており、補題 12 の証明部分および定理 2 より $f(u_0)$ にいくらでも接近させることができる。なお、補題 14 は外点法による結果、たとえば、補題 8 と対称的であることがわかる。

4. 結 言

バナッハ空間における条件付最適制御問題に対する内点法を主体とした 1 つの近似解法が得られた。本手法は重み関数の不連続性を避けつつ近似解を求めてゆくので、 $g(u)$ が一般的なバナッハ空間の要素である場合でも等式拘束条件とともに重み関数に埋め込んで扱うことができる。もし、 V の上で $I(u, n)$ の最小値が存在するならば、このときは本稿で考えている問題の特別な場合であり、 $\varepsilon_m = 0$ としてさしつかえなく、 m に関する $\lim$ は不要になるので種々の議論が容易となるであろう。本稿ではこのような場合の考察は割愛した。

定理 1 により近似解が最適解へ弱収束することが示され、制御変数がヒルベルト空間で定義され評価関数とそのノルムを含んでいる場合は近似解は最適解へ強収束することが示された。定理 2 では、評価関数の近似値が最適な評価関数値に収束することが示された。

等式拘束条件が重み関数に埋め込まれている場合は評価関数値の上限あるいは下限は一般に得られないが不等式拘束条件のみが重み関数に埋め込まれているときは上限が得られそれが真の値に収束することが 3-2 で示された。これに対し、外点法³⁾からは常に下限が得られるので、両手法を併用すれば近似計算のステップを終了するための 1 つの基準が得られる。

参 考 文 献

- 1) A. V. Fiacco & G. P. McCormick: The Sequential Unconstrained Minimization Technique for Nonlinear Programming, Management Science, 10-2, 360/366 (1964)
- 2) L. S. Lasdon, A. D. Waren & R. K. Rice, An Interior Penalty Method for Inequality Constrained Optimal Control Problems, IEEE. Trans. Automatic Control, AC-12-4, 388/395 (1967)
- 3) 小林・大島: バナッハ空間における条件付最適制御問題, (計測自動制御学会論文集投稿中)
- 4) A. V. Balakrishnan: Optimal Control Problems in Banach Space, SIAMJ. Control, 3-1, 152/180 (1965)
- 5) K. Yoshida: Functional Analysis, Springer Verlag (1968)