バナッハ空間における条件付最適制御問題

——内点法による考察——

小林 幹 夫・大 島 康 次 郎

東京大学生産技術研究所 東京都港区六本木 7-22-1

(昭和 46 年 8 月 12 日 受付)

Constrained Optimal Control Problems in Banach Spaces

——Approach by Means of Interior Penalty Method——

Mikio KOBAYASHI and Yasujiro OSHIMA

(Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Minato-ku, Tokyo)

(Received August 12, 1971)

A necessary and sufficient condition for an optimal solution of the constrained optimal control problem in Banach space has been derived by means of an exterior penalty by the authors.

The purpose of this paper is to derive the similar condition by means of an interior penalty method.

It is shown that a series of the approximate solutions converges to the optimal one weakly and a series of the values of the cost functional generated from those approximate solutions converges to the optimal value. Using those results, the necessary and sufficient condition is derived by considering the minimization problem of a new functional.

In the main problem considered here, the control and state variables are defined in L^p ($1 < p \leq \infty$) or Euclidean space. The constraints are described by equalities and inequalities, where the equality constraints are defined in L^p or Euclidean space and the inequality constraints are defined in L^∞ or Euclidean space.

1. 緒 言

バナッハ空間における条件付最適制御問題を外点法により考察し、最適解が満たすべき必要十分条件を導出することはすでになされている¹⁾。外点法と内点法は互いに独立した対称的な手法であるので、内点法によっても上述のものと類似した条件が導出されるであろうということは直観的に想像できることである。

本研究は、この観点に立ち、内点法によりバナッハ空間における条件付最適制御問題の最適解が満たすべき必要十分条件を導出することを目的としている。なお、本稿では必要十分条件が得られるという1つの可能性を実際に示すことと内点法特有の性質を考慮しつつ、できるだけ広範囲の問題に対してそのような条件を導出することに重点をおいている。後者のことがら

は特に重要であると考えられるので、これに関して簡単な説明をしておこう。

内点法において導入される重み関数の不連続性および得られる近似解の性質、すなわち、不等式拘束条件を満足しているという性質は外点法においてはみられないものである。前者の性質は一般に種々の問題の解析に困難性をもたらす原因となる。後者のそれは、近似解法としては最も重要な利点となっているが、必要十分条件を導出するということに関しては先の性質と同様にある種の困難性をもたらすものである。したがって、内点法の場合は諸問題の解析上なんらかの制限をうけることになるであろう。

ここで考察される主問題においては、制御変数および状態変数は L^p あるいはユークリッド空間で定義される。拘束条件は等式および不等式で与えられ、等式

拘束条件は L^p あるいはユークリッド空間, 不等式拘束条件は L^∞ あるいはユークリッド空間で定義される。

本稿の前半は, 近似解および評価関数の近似値の収束性が考察される。後半は, 前半で得られた結果を用いて必要十分条件が導出される。

得られた結果は, 連続時間系あるいは離散時間系における状態変数あるいは制御変数制限付最適制御問題に適用することができる。

2. 最適制御問題と解の存在性

ある集合 D の上で定義される実数値関数の集合とあるノルムによって構成されるバナッハ空間を $B_i(D)$ とする。本稿では, 特に必要がない限り $B_i(D)$ を単に B_i と表わす。制御変数および状態変数をそれぞれ u および z で表わし, $u \in B_1$ および $z \in B_2$ とする。写像,

$$z = z(u); B_1 \rightarrow B_2$$

は連続であるものとする。評価関数は,

$$f(z, u), f \in R^1 \quad (1)$$

で与えられる。ここで, R^1 は i 次元ユークリッド空間を表わす。不等式および等式拘束条件は,

$$g(z, u) \leq 0, h(z, u) = 0, g \in B_3, h \in B_4 \quad (2)$$

で与えられる。ここで, $g(z, u) \leq 0$ は,

$$\text{ess sup}_D g_i(z, u) \leq 0, i=1, 2, \dots, m_3$$

を意味する。本稿では簡単のため, 写像 $\phi(z, u)$ を $\phi(u)$ あるいは ϕ と同一視する。

最適制御問題はつぎのようになる。

【問題 1】 (2)式で与えられる拘束条件を満足し, (1)式で与えられる $f(z, u)$ を最小にする $u_0 \in B_1$ を求めよ。

本稿では, 前提条件となる事項を $A(\)$ で表わす。

A1 $f(u)$ および $g(u)$ は u に関して連続であり, 凸である。 $h(u)$ は u に関して連続であり, 定数項を除いて u に関して線形である。

A2 B_1 は回帰的である。

A3 $U \equiv \{u | g(u) \leq 0, h(u) = 0, u \in B_1\} \neq \phi$

A4 $U_v \equiv \{u | f(u) \leq \nu, u \in U\}$ とする。ある ν に対して $U_v \neq \phi$ であり, U_v は有界である。

【補題 1】 条件 A1~A4 のもとで問題 1 の解が存在する^{1), 2)}。

3. 補助問題の記述

この章では, 近似解を得るために問題 1 に対する補助的な問題を設定し, それに関する若干の性質についての考察をする。

はん関数,

$$I(u, n) = f(u) + s_n L(u) + r_n M(u) \quad (3)$$

を導入する。ここで,

$$L(u) = \sum_{i=1}^{m_3} \langle 1/g_i(u), -1 \rangle,$$

$$M(u) = \|h(u)\|^d, 1 < d < \infty \quad (4)$$

である。 $\langle \cdot \rangle$ は B_i における内積を表わし, $\|\cdot\|$ は B_i におけるノルムを表わす。 d はある定数である。さらに,

$$\left. \begin{aligned} s_n > s_{n+1} > \dots, s_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\ 0 < r_n < r_{n+1} < \dots, r_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\}$$

である。つぎの定義をしておく。

$$V_{\varepsilon_m} \equiv \{u | g(u) \leq -\varepsilon_m, u \in B_1\}$$

$$V \equiv \{u | g(u) \leq 0, u \in B_1\}$$

$$V_0 \equiv \{u | g(u) < 0, u \in B_1\}$$

ここで, $g(u) \leq -\varepsilon_m$ は $g_i(u) \leq -\varepsilon_m$ ($i=1, 2, \dots, m_3$) を意味し, $\varepsilon_m > \varepsilon_{m+1} > \dots, \varepsilon_m \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) である。

近似解を得るための問題はつぎのようになる。

【問題 2】 固定された ε_m に対して $I(u, n)$ を最小にする $u_n(\varepsilon_m) \in V_{\varepsilon_m}$ を求めよ。

A5 $V_{n, \nu} \equiv \{u | f(u) + r_n M(u) \leq \nu, u \in V\}$ とする。各々の n および ν に対して $V_{n, \nu}$ は有界である。

A6 $U_{\varepsilon_m} \equiv \{u | g(u) \leq -\varepsilon_m, h(u) = 0, u \in B_1\}$ とする。このとき, 適当な ε_m に対して $U_{\varepsilon_m} \neq \phi$ である。

【補題 2】 条件 A1~A5 のもとでつぎのことがらが成立する¹⁾。

(a) V の上でははん関数 $I_1(u, n) \equiv f(u) + r_n M(u)$ の最小値が存在する。

(b) V 上での $I_1(u, n)$ 最小点を u_n^1 とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1(u_n^1, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n^1) = f(u_0)$$

である。

【補題 3】 条件 A1~A6 のもとで問題の解が存在する³⁾。

問題 2 においては, $I(u, n)$ の最小化を $V(\varepsilon_m=0)$ の上でなく, V_{ε_m} の上で行なおうとしているわけであるが, これは V の上では $I(u, n)$ が不連続となり解の存在性を保証することが困難であるということと, ある前提条件のもとで $\varepsilon_m \rightarrow 0$ とすることにより V での解が存在する場合の考察を簡明にしようとするためである。

補題 3 がいえてかつ近似解および評価関数の近似値がそれぞれ最適なものに収束(強または弱)することがいえれば, 近似解法としてはいちおう満足できるが, それだけでは最適解に対する必要十分条件を導出するための具体的手段とはならない。これを行なうためには, まず取扱われる問題をさらに限定し, $I(u, n)$ の最小値が V 上で達せられかつその最小点が V_0 に属

することを必要とする。

つぎに述べるような前提条件を導入しておこう。

A7 ある関数列 $\{u_i\} \subset V$ に対して、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [\text{ess inf}_D -g_i(n_i)] = 0 \quad (5)$$

が成立しているならば、このときつねに、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle 1/g_i(u_i), -1 \rangle = +\infty$$

となる。

【定理 1】 条件 A1~A7 が満足されているならば、 V での $I(u, n)$ の最小値が存在し、その最小点は V_0 の要素である。

【証明】 ある固定された n に対して、

$$I[u_n(\varepsilon_m), n] \geq I[u_n(\varepsilon_{m+1}), n] > f(u_0)$$

が成立する。 $\{I[u_n(\varepsilon_m), n]\}$ は有界な単調非増大列であるから、ある値 $I(n)$ に収束する。任意の正の ε が与えられたとき、 M を十分大きくとれば $m > M$ なるすべての m に対して、

$$I[u_n(\varepsilon_m), n] < I(n) + \varepsilon \quad (6)$$

が成立する。いっぽう、補題 2 および条件 A7 から、任意の $N > \varepsilon$ が与えられたとき、十分大きな M_1 を選べば $m > M_1$ なるすべての m に対して、

$$\begin{aligned} s_n L(\bar{u}) &> N + I(n) - I_1(u_n^1, n), \\ \forall \bar{u} &\in \{V - V_{\varepsilon_m}\} \end{aligned} \quad (7)$$

を成立させることができる。ここで、

$$\{V - V_{\varepsilon_m}\} \equiv \{v | v \cap V_{\varepsilon_m} = \emptyset, v \in V\}$$

である。さらに、

$$\begin{aligned} I(\bar{u}, n) &= I_1(\bar{u}, n) + s_n L(\bar{u}) \\ &> I_1(u_n^1, n) + N + I(n) - I_1(u_n^1, n) \\ &= N + I(n) \end{aligned} \quad (8)$$

が成立する。(6) および (8) 式から、

$$I[u_n^1(\varepsilon_m), n] < I(n) + \varepsilon < I(n) + N < I(\bar{u}, n)$$

が得られる。したがって、 $\bar{u}$ は $I(u, n)$ の最小値になり得ない。けっきょく、 V での $I(u, n)$ の最小値が存在する。その最小点を u_n とすると、

$$u_n \in V_{\varepsilon_m} \subset V_0$$

である。

【補題 4】 条件 A1~A7 のもとでつぎのことがらが成立する。

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(u_0)$$

(b) $\{u_n\}$ の任意の部分列はある u_0 に弱収束する部分列を含む。

【証明】

(a) $\{U_{\varepsilon_m}\}$ は U で稠密であるから、任意の正の ε が与えられたとき、ある整数 N および M が存在して $n > N$ なるすべての n と $m > M$ なるすべての m に対して、

$$s_n L(\bar{u}) + r_n M(\bar{u}) < \varepsilon/2,$$

$$f(\bar{u}) < f(u_0) + \varepsilon/2$$

を満足する $\bar{u} \in U_{\varepsilon_m}$ が存在する。 $U_{\varepsilon_m} \subset V_{\varepsilon_m}$ だから、

$$I(u_n, n) \leq I(\bar{u}, n) < f(u_0) + \varepsilon \quad (9)$$

が成立する。いっぽう、 u_n は V の上で $I(u, n)$ の最小点になっているから、

$$I_1(u_n^1, n) \leq I_1(\bar{u}, n) < I(u_n, n) \quad (10)$$

が得られる。(9), (10) および補題 2 の (b) から、 $n > N$ なるすべての n に対して、

$$f(u_0) - \varepsilon < I_1(u_n^1, n) < I(u_n, n) < f(u_0) + \varepsilon$$

となる。すなわち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(u_0),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n L(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n M(u_n) = 0$$

が得られる。

(b) $\bar{V}_{n,\nu} \equiv \{u | I(u, n) \leq \nu, u \in V\}$ とする。 $\bar{V}_{n,\nu}$ の任意の要素 u に対して、

$$f(u) + r_n M(u) < f(u) + r_n M(u) + s_n L(u) \leq \nu$$

が成立するから、 $u \in V_{n,\nu}$ すなわち $V_{n,\nu} \supset \bar{V}_{n,\nu}$ となる。いっぽう、 $V_{n+1,\nu}$ の任意の要素 v に対して、

$$f(v) + r_n M(v) \leq f(v) + r_{n+1} M(v) \leq \nu$$

が成立し、 $V_{n,\nu} \supset V_{n+1,\nu}$ となる。したがって、 $l > n$ なるすべての l に対して、

$$\bar{V}_{l,\nu} \subset V_{n,\nu}$$

が成立する。以上のことより、 $\{V_{l,\nu}\}$ は有界となり $\{u_n\}$ も有界となる。

$\{u_n\}$ の任意の弱収束部分列を $\{u_m\}$ とし、その弱極限を u^* とする。 $u^* \in V$ であり、

$$0 = \lim_{m \rightarrow \infty} M(u_m) \geq M(u^*) \geq 0$$

が成立するから、 u^* は与えられた拘束条件 (2) を満足する。したがって、

$$f(u^*) \geq f(u_0)$$

となる。いっぽう、

$$\begin{aligned} f(u_0) &= \lim_{m \rightarrow \infty} f(u_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(u_m) \\ &\geq f(u^*) \end{aligned}$$

が成立するから、

$$f(u^*) = f(u_0)$$

となる。すなわち u^* はある最適解である。

4. 必要十分条件の導出

この章で扱う問題は L^p あるいはユークリッド空間で定義されるものに限定する。3. ままでに得られた結果を利用して B_1 のある要素が最適であるための必要十分条件を導出する。

まず、 D および B_l について具体的に説明する。 R^n に固定された座標を n 次元ベクトル x で表わし、

時刻を t で表わす. D はつぎのように与えられる.

$$D \equiv \begin{cases} [T, \Omega] \equiv [0, T] \times \Omega, \Omega \subseteq R^n \\ \text{or} \\ R^n \end{cases} \quad (11)$$

ここで, $[0, T]$ は時間区間を表わし, 終端時刻 T は既知であるものとする. Ω 上で定義され,

$$\left\{ \sum \int_{\Omega} |y_i(x)|^p dx \right\}^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (12)$$

を満足するすべての可測関数 $y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ の集合を $L^p(\Omega)$ とする. $L^p(\Omega)$ におけるノルムを(12)式のはじめの不等式の左辺で定義し, $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ とかき表わす. 区間 $[0, T]$ で定義され,

$$\left\{ \int_0^T \|y(t)\|_{L^p(\Omega)}^p dt \right\}^{1/p} < \infty, \quad y(t) \in L^p(\Omega) \quad (13)$$

を満足するすべての可測関数の集合を $L^p(T, \Omega)$ で表わす. $L^p(T, \Omega)$ におけるノルムを(13)式のはじめの不等式の左辺で定義し, $\|\cdot\|$ で表わす. 以下においては簡単のため $L^p(T, \Omega)$ と $L^p(D)$ を同一視し, R^i におけるノルムは $L^p(D)$ の場合と同様に $\|\cdot\|$ で表わす. B_i はつぎのようになる.

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= L^a(D), \quad 1 < a < \infty; \text{ or } R^{m_1} \\ B_2 &= L^b(D), \quad 1 < b \leq \infty; \text{ or } R^{m_2} \\ B_3 &= L^c(D), \quad c = \infty; \text{ or } R^{m_3} \\ B_4 &= L^d(D), \quad 1 < d \leq \infty; \text{ or } R^{m_4} \end{aligned} \right\}$$

以下において, $B_3 = L^c(D)$ あるいは $B_4 = L^d(D)$ ($d = \infty$) の場合は D が有界であるものとする. D が有界のときは,

$$L^\infty(D) \subset L^p(D), \quad 1 \leq p < \infty$$

となるので, $B_4 = L^d(D)$ ($d = \infty$) の場合は, 重み関数を構成するさいは, $h(u)$ という写像をあらためて,

$$h(u); L^a(D) \rightarrow L^{d'}(D), \quad 1 < d' < \infty$$

とみなすことにして, $L^{d'}(D)$ での重み関数を用いる.

新しくはん関数,

$$I(u, \lambda_n, \mu_n) = f(u) + \langle \lambda_n, g(u) \rangle + \langle \mu_n, h(u) \rangle \quad (14)$$

を導入する. ここで,

$$\lambda_n = s_n \{1/[g_1(u_n)]^2, 1/[g_2(u_n)]^2, \dots, 1/[g_{m_3}(u_n)]^2\},$$

$$\mu_n = r_n \cdot d \{ |h_1(u_n)|^{d-1} \text{sgn} h_1(u_n),$$

$$|h_2(u_n)|^{d-1} \text{sgn} h_2(u_n), \dots,$$

$$\dots, |h_{m_4}(u_n)|^{d-1} \text{sgn} h_{m_4}(u_n) \},$$

$$\text{sgn } \alpha = \{1, \alpha > 0; 0, \alpha = 0; -1, \alpha < 0\}$$

である. $\langle \cdot \rangle$ は R^i または $L^p(1 \leq p \leq \infty)$ における内積を表わす. $\lambda_n \in L^1(D)$ または $\lambda_n \in R^{m_3}$ かつ $\lambda_n > 0$ および $\mu_n \in B_4^*$ であることは明らかである. ここで, B_i^* は B_i の共役空間を表わす.

【補題 5】 条件 A1~A7 のもとで $I(u_n, \lambda_n, \mu_n)$ は $f(u_0)$ に収束する.

$$\text{【証明】} \quad I(u_n, \lambda_n, \mu_n) = f(u_n) + \{-s_n L(u_n) + r_n \cdot$$

$dM(u_n)\}$ である. 補題 4 の (a) の証明部分から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n L(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n M(u_n) = 0$$

である. このことと補題 4 の (a) から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n, \lambda_n, \mu_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(u_0)$$

となる.

A8 $g(u)$ は u に関してフレッシュ微分可能である.

【定理 2】 条件 A1~A8 が満足されているならば, u_n は $I(u, \lambda_n, \mu_n)$ の B_1 上での最小点である.

【証明】 u_n が $I(u, \lambda_n, \mu_n)$ を B_1 の上で最小にしていないものとして矛盾を導く. u_n が $I(u, \lambda_n, \mu_n)$ を最小にしていないならば, 十分小さな正の ε に対して,

$$I(\bar{u}, \lambda_n, \mu_n) < I(u_n, \lambda_n, \mu_n) - \varepsilon \quad (15)$$

を満足する $\bar{u} \in B_1$ が存在する.

$$u_\alpha = \alpha \bar{u} + (1 - \alpha) u_n, \quad 0 < \alpha < 1$$

とおく. $u_n \in V_0$ であり, $B_3 = L^\infty(D)$ または $B_3 = R^{m_3}$ であるから, α を十分小さくすれば条件 A1 から $u_\alpha \in V_0$ とすることができる. このような u_α に対して,

$$\begin{aligned} I(u_\alpha, n) &= I(u_n, n) + I(u_\alpha, \lambda_n, \mu_n) - I(u_n, \lambda_n, \mu_n) \\ &\quad + Q(u_\alpha) \end{aligned} \quad (16)$$

と表わすことができる. ここで,

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &= s_n L(u_\alpha) - \langle \lambda_n, g(u_\alpha) \rangle - 2 s_n L(u_n) \\ &\quad + r_n M(u_\alpha) - \langle \mu_n, h(u_\alpha) \rangle + r_n (c-1) M(u_n) \end{aligned} \quad (17)$$

である. (17)式の右辺の各項は点 u_n においてフレッシュ微分可能である. したがって, (17)式の右辺の第 1 行の g_i を含んだ項を $q_{1i}(u_\alpha)$ とおくと,

$$q_{1i}(u_\alpha) = O(\alpha), \quad i=1, 2, \dots, m_3$$

とおくことができる. ここで, $O(\alpha)/\alpha \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow 0$) である. このことはつぎのようにして示される. 条件 A8 を使って,

$$g_i(u_\alpha) = g_i(u_n) + \alpha \nabla g_i[u_n; \bar{u} - u] + O(\alpha)$$

とかき表わすことができる. ここで, $\nabla g_i[u_n; \bar{u} - u]$ は点 u_n におけるフレッシュ部分を表わす. 上述の関係式を用いて,

$$\begin{aligned} q_{1i}(u_\alpha) &= s_n \{ \langle 1/g_1(u_\alpha), -1 \rangle - \langle 1/g_1^2(u_n), g_i(u_\alpha) \rangle \\ &\quad - 2 \langle 1/g_1^2(u_n), -1 \rangle \} \\ &= s_n \cdot O(\alpha) \end{aligned}$$

が得られる.

(17)式の右辺の第 2 行についても同様のことがいえるので, h_i を含んだ項を $q_{2i}(u_\alpha)$ とおくと,

$$q_{2i}(u_\alpha) = O(\alpha), \quad i=1, 2, \dots, m_4$$

とおくことができる. m_3 および m_4 は有限であるから,

$$Q(u_\alpha) = O(\alpha)$$

と表わすことができる。したがって、(16)式は、

$$I(u_\alpha, n) = I(u_n, n) + I(u_\alpha, \lambda_n, \mu_n) - I(u_n, \lambda_n, \mu_n) + O(\alpha) \quad (18)$$

とかきなおすことができる。

いっぽう、条件 A1 のもとで $I(u, \lambda_n, \mu_n)$ は u に関して凸であるから、

$$I(u_\alpha, \lambda_n, \mu_n) \leq \alpha I(\bar{u}, \lambda_n, \mu_n) + (1-\alpha) I(u_n, \lambda_n, \mu_n) \quad (19)$$

が成立する。(15), (18)および(19)式から、

$$I(u_\alpha, n) < I(u_n, n) - \alpha \varepsilon + O(\alpha) \quad (20)$$

となる。 $u_\alpha \in V_0$ であるから、この不等式は u_n が $I(u_n, n)$ の V での最小点であるということに矛盾する。(証明終)

ここで、定理2までのことについてじゃっかんの説明をしておこう。

補題3までの考察だけでは必要十分条件は得られないので、まず、定理1を導出せねばならない。これを行なうには条件 A7 が必要となる。 $g \in R^{m_3}$ の場合は必然的に A7 は満足されることは明らかであろう。 $g \in L^\infty(D)$ の場合は、先の場合と異なり A7 が常に成立するという事はない。したがって、具体的問題を扱う場合は、A7 が成立しているかどうか調べる必要があるが、本稿ではこれに関する詳細な考察は割愛する。

つぎに、定理2を導出する必要があるが、導出にさいし、A7 の他に $g \in L^\infty(D)$ または $g \in R^{m_3}$ ということが要求される。このことは特に重要なことである。なぜならば、もし本質的に $g \in L^p(D)$ ($1 \leq p < \infty$) ならば十分小さな正の α に対しても、一般に $u_\alpha \in V_0$ を成立させることができないからである。

なお、定理が意味している大切なことは、 u_n が単に V 上だけでなく B_1 上での $I(u, \lambda_n, \mu_n)$ の最小点になっているということである。内点法においては、近似解の属する領域は V に限られているが、必要十分条件を導出するにさいし、最終的にはこの拘束をとり除き、 B_1 上での関数最小化問題に到達せねばならない。

以上の議論からわかるように、重み関数が V 上で不連続であるということと、最終的には最小化問題を V 上でなく B_1 上での問題に拡張しなければならないということは、内点法にみられる特有の性質であり、この性質のため取扱われる問題の種類に制限が生ずることになる。

この章の残りの部分において、どのような前提条件のもとで必要条件あるいは必要十分条件が導出される

か考察しよう。

以下においては、考察を容易にするために、 B_3 および B_4 がユークリッド空間に限定された場合とそうでない場合に分けて議論する。

3.1 拘束条件が定義される空間をユークリッド空間に限定した場合

この節では、 $g \in R^{m_3}$ および $h \in R^{m_4}$ の場合の問題を扱う。この場合は $\{\lambda_n : \mu_n\}$ の収束に関して弱位相の導入は不要であり、かつ前提条件は単純なものとなるので、考察は比較的容易である。他の場合の考察にさいしては、ここでの考察をできるだけ自然に拡張するのがわかりやすいであろう。

A9 $H \equiv \{h(u) \mid \|u\| \leq r, u \in B_1\}$ とする。ここで、 r はある正の数である。 H は R^{m_4} における原点を中心とするある球を含む。

【定理3】 条件 A1~A8 のもとで、つぎのことがらが成立する。

(a) $\{\lambda_n : \mu_n\}$ は有界である。 $\{\lambda_n : \mu_n\}$ の任意の収束部分列を $\{\lambda_m : \mu_m\}$ とし、その極限を $\{\lambda_0 : \mu_0\}$ とする。このとき $\lambda_0 \geq 0$ である。

(b) $I(u_0, \lambda_0, \mu_0) \leq I(u, \lambda_0, \mu_0), \forall u \in B_1;$
 $\lambda_{0,i} \cdot g_i(u_0) = 0$

条件 A9 の1つの意味は、原点 $h(u_0)$ の近傍は可制御であるということである。

3.2 拘束条件が定義される空間をユークリッド空間に限定しない場合

$g \in L^\infty(D)$ または $g \in R^{m_3}$ および $h \in L^d(D)$ または $h \in R^{m_4}$ の場合をまとめて考察する。

A10 $f(u)$ は u に関してフレッシュ微分可能である。(A10 終)

$f(u)$, $f(u)$ および $h(u)$ の u_0 におけるフレッシュ微分をそれぞれ $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ および $\varphi_3(u)$ とする。ここで、 φ_1 は B_1 から R^1 への、 φ_2 は B_1 から B_3 への、 φ_3 は B_1 から B_4 への有界線形作用素であり、フレッシュ導関数である。

A11

(a) 条件 A9 における H は B_4 における原点を中心とするある球において稠密な集合を含む。

(b) $w(u) \equiv \{\varphi_2(u) : \varphi_3(u)\}$

$$W \equiv \{w(u) \mid \|u\| \leq r', u \in B_1\}$$

とする。ここで、 r' はある正の数である。このとき、 W はある集合 Γ'' および Γ''' を含み、 Γ'' の1次結合は、 $B_3(D_1) \times B_4(D_1)$ でいたる所稠密であり、 Γ''' のそれは $B_4(D_2)$ でいたる所稠密である。ここで、 $D_1 \cup D_2 = D$ かつ $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ である。さらに、

$$G \equiv \{g \mid g \leq 0, g \in B_3(D)\}$$

としたとき, D_2 上のほとんどいたる所で $g(u_0)$ は G の内点である.

【定理 4】 条件 A1~A8, A10~A11 のもとで, つぎのことが成立する.

(a) $\{\lambda_n : \mu_n\}$ は弱収束する. その弱極限を $\{\lambda_0 : \mu_0\}$ とする. このとき $\lambda_0 \geq 0$ である.

(b) $I(u_0, \lambda_0, \mu_0) \leq I(u, \lambda_0, \mu_0), \forall u \in B_1;$

$$\lambda_{0,i} \cdot g_i(u_0) = 0$$

条件 A11 の (a) の 1 つの意味は, B_4 の原点 $h(u_0)$ の近傍は準可制御であるということである. 一般に, 関数空間の制御問題では, 完全可制御であるという条件を課すことは適当でない場合が多いと考えられる. このこととともに工学的意味を失わないという意味からも目標点の近傍が準可制御であるという条件を課すことは, いちおう, 妥当なことであると考えられる.

【定理 5】 定理 3 または定理 4 が成立しているものとする. このとき, ある $u_0 \in B_1$ が最適であるための必要十分条件は, 任意の $u \in B_1, \lambda \in B_3^*, \lambda \geq 0, \mu \in B_4^*$ に対してある $\lambda_0 \in B_3^*, \lambda_0 \geq 0, \mu_0 \in B_4^*$ が存在して,

$$I(u_0, \lambda, \mu) \leq I(u_0, \lambda_0, \mu_0) \leq I(u, \lambda_0, \mu_0)$$

が成立することである. ここで, $g \in L^\infty(D)$ の場合は $B_3^* \equiv L^1(D)$ とする. B_4 についても同様である.

定理 3~5 の証明は文献 1) の場合とほぼ同様となるので省略する.

5. 結 言

バナッハ空間における不等式および等式拘束条件付最適制御問題が内点法により考察された. 定理 1 においては, V 上でのはん関数 $I(u, n)$ の最小値が存在しその最小点は V_0 の要素となっていることが示された. この定理を導出するさいに, $L(u)$ の不連続性が問題となり, 外点法においては不必要な条件 A6 が

必要となっている. この条件が成立しているような問題を具体的にとり上げて詳細な考察をすることは重要なことがあるが, 本稿は関数空間において定性的な議論することに重点をおいているので, このことは省略した.

定理 2 では, $I(u, n)$ の V 上での最小点が $I(u, \lambda_n, \mu_n)$ の B_1 上での最小点になっていることが示された. 内点法では V から B_1 上への拡張が不可欠のことであり, このことを実現するために, 現在のところ $g(z, u)$ の属する空間は本質的には L^∞ またはユークリッド空間に限定される.

定理 3 および定理 4 では B_1 のある要素が最適であるための必要条件が導出され, 定理 5 では必要十分条件が導出された. ここで大切なのは, 近似解および $\{\lambda_n : \mu_n\}$ に関して強位相での収束性を必要とせず, 弱位相によるものだけで十分であるということである. すなわち, 弱位相の概念は, 評価関数の近似列の収束を保証したり, ある関数列が強収束するための必要条件を与えるということなどに有効に使われるばかりでなく, 最適解が満たすべき必要十分条件を導出するということに対しても有効に用いられるのである.

終わりに, 本研究に関して数学的な面で議論をしてくださった, 東京大学物理工学科, 金子尚武助教授, 河原田秀夫講師および東京大学生産技術研究所, 金子幸臣助手に心から感謝する次第である.

参 考 文 献

- 1) 小林・大島: バナッハ空間における条件付最適制御問題 (計測自動制御学会論文集投稿中)
- 2) A. V. Balakrishnan, Optimal Control Problems in Banach Space, SIAMJ. Control, 3-1, 152/180
- 3) 小林・大島: バナッハ空間における条件付最適制御問題の近似解法 (内点法による考察), 計測自動制御学会論文集, 8-5, 584/590 (1972)
- 4) N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear Operators, Part I, Interscience (1958)