非線形離散値系の最短時間問題の数値解法†

辻 節 三*・伊 藤 輝 生**

* 九州大学工学部 福岡市東区大字箱崎 3576

** 九州工業大学 北九州市戸畑区仙水町 1-1

(昭和 47 年 1 月 20 日 受付)

Numerical Solution of the Minimum-Time Problem of Nonlinear Discrete Systems

Setsuzo TSUJII* and Teruo ITOH**

(* Faculty of Engineering, Kyushu University, Fukuoka)
(** Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu)

(Received January 20, 1972)

The problem considered in this paper is the minimum-time problem of nonlinear discrete systems with state and control constrained. In the first half of this paper, the algorithm is given, which solves the minimum-time problem by solving the sequence of the fixed endpoint optimal control problem by the penalty function method. The convergence proof of the algorithm is given. In the latter half of this paper, another algorithm is given, which minimizes the penalty functions which appear in the above fixed endpoint optimal control problems and necessarily contain Heaviside's step functions. This algorithm is especially interesting in the case where the system and the constraints are linear. An illustrative example is given.

1. ま え が き

これまで、線形離散値系の最短時間問題の数値解法については種々に研究されているが^{1)~5)}、系が非線形であったり状態に不等式制限がある場合には、最短時間問題の数値解の手法についてあまり研究されていないようである。また、他方において、関数の極値を求める手法として種々のこう配法が研究されており^{6),7)}、罰関数法を用いることにより、等式および不等式制限条件付極値問題が制限のない極値問題として、各種こう配法により解かれることが示されている^{8),9)}。そこで本論文は非線形離散値系において、状態および操作量に不等式制限がある場合に、最短時間問題の数値解を、罰関数法を適用して統一的に求める方法について述べる。これは、著者らの文献(5)の結果を上述の制限付非線形離散値系に拡張したものであり、初期点と目標点を両端点としある評価を最小化する固定端点最適制御問題の解を与えるような罰関数を設定し、種々の時間を選んで逐次罰関数の極値を求めつつ固定端点問題の解の存在する最小の時間(すなわち最短時間)

を求める方法である。本論文の前半において、この方法を実行するアルゴリズムと収束の証明について述べる。また後半において、上述の罰関数としてヘビサイドのステップ関数をもつ関数を採用すること、および最短時間問題のアルゴリズムの実行が罰関数の極値の計算に本質的に依存することから、とくにヘビサイドのステップ関数を含む関数をステップ状の不連続性を除去して極値を計算するアルゴリズムを提案し収束の証明を行なった。とくに系および不等式制限が線形であり評価が2次の場合には、この方法はニュートン法を包含するアルゴリズムになる。例題の計算結果は、罰関数法による方法がかなり良い精度の解を与える可能性があることを示している。

2. 最短時間問題の数値解法

最短時間問題はつぎのように定式化できる。非線形離散値系をあらわす等式制限条件として、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{f}(0, 0, k) &= 0, \quad k=0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1)$$

であるとする。ここで、 $\mathbf{x}(k)$ は n 次元状態ベクトル、 $\mathbf{u}(k)$ は r 次元操作ベクトル、 $\mathbf{f}(\cdot)$ はベクトル値関数、

† 第 14 回自動制御連合講演会で発表(昭 46-11)

N は正の整数であるとする。さらに、状態および操作量に対する不等式制限条件が、

$$g_i(\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(N), \mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(N-1), N) \leq 0, \\ i=1, \dots, p_N \quad (2)$$

で与えられるものとする。最短時間問題は、(1), (2) 式の等式および不等式制限条件のもとで、最終値 $\mathbf{x}(N)=0$ となる最小の時間 N を求める問題となる。

いま、 $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{u}(k-1)$, $k=1, \dots, N$, をまとめたベクトル $\mathbf{z}(N)$ と $\mathbf{z}(N)$ を $\mathbf{x}(N)$ に変換する行列 $S(N)$ を考え、

$$\mathbf{z}(N) = [\mathbf{x}'(1) \dots \mathbf{x}'(N) \mathbf{u}'(0) \dots \mathbf{u}'(N-1)]' \quad (3)$$

$$S(N)\mathbf{z}(N) = \mathbf{x}(N) \quad (4)$$

とする。ここで、右肩' はベクトルまたは行列の転置をあらわすものとする。そうすれば (1) 式は $\mathbf{z}(N)$ に関する $n \times N$ 個の等式制限条件をあらわすことになるから、 $n \times N$ ベクトル値関数 $\mathbf{F}(\cdot)$ により、

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}(N), N) = 0 \quad (5)$$

と書くことができる。同様に、(3) 式は、

$$g_i(\mathbf{z}(N), N) \leq 0, \quad i=1, \dots, p_N \quad (6)$$

と書ける。さらに、ある評価 $J(\mathbf{z}(N), N)$ を最小にし、初期点と原点を両端点とする固定端点問題の解を与えるような罰関数は、文献 (8) により、

$$I(\mathbf{z}(N), N, \varepsilon) = \|S(N)\mathbf{z}(N)\|^2 + \|\mathbf{F}(\mathbf{z}(N), N)\|^2 \\ + \sum_{i=1}^{p_N} H(g_i(\mathbf{z}(N), N))(g_i(\mathbf{z}(N), N))^2 \\ + \varepsilon J(\mathbf{z}(N), N) \quad (7)^{*1}$$

と書くことができる。ここで、 ε は正の値をとるパラメータとし、 $H(\cdot)$ はヘビサイドのステップ関数である。(7) 式の第1項は、 $\mathbf{x}(N) (= S(N)\mathbf{z}(N))$ を原点に到達させるための罰であり、第2項は、系の方程式の等式制限条件を満足させるための罰であり、第3項は、 $g_i(\mathbf{z}(N), N) \leq 0$ のときは、零であり、 $g_i(\mathbf{z}(N), N) > 0$ のとき正の値となるから、 $g_i(\mathbf{z}(N), N) \leq 0$, $i=1, \dots, p_N$ を満足させるための罰である。そして零に収束する数列 ε_i を、

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0 \quad (8)$$

とし、各 ε_i に対して、

$$\min I(\mathbf{z}(N), N, \varepsilon_i) = I(\mathbf{z}(N, \varepsilon_i), N, \varepsilon_i) \quad (9)$$

とすれば、ある適当な仮定のもとに以下の一連の関係式を得る^{*)}。ここで、 $\mathbf{z}(N, \varepsilon_i)$ は、 $I(\mathbf{z}(N), N, \varepsilon_i)$ の最小値を与える値である。

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_i} \{\|S(N)\mathbf{z}(N, \varepsilon_i)\|^2 + \|\mathbf{F}(\mathbf{z}(N, \varepsilon_i), N)\|^2\} = 0 \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_i} \sum_{j=1}^{p_N} H(g_j(\mathbf{z}(N, \varepsilon_i), N))(g_j(\mathbf{z}(N, \varepsilon_i), N))^2 = 0 \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{z}(N, \varepsilon_i) = \mathbf{z}^*(N) \in Z_N^* \quad (10)$$

ここで、 $\{\varepsilon_i\}$ は $\{\varepsilon_i\}$ の適当な部分列で、 Z_N^* は、(5), (6) 式の等式不等式を満足し $S(N)\mathbf{z}(N)=0$

を満足する固定端点問題の解の集合で $\mathbf{z}^*(N)$ は、 Z_N^* の中で評価 $J(\mathbf{z}(N), N)$ を最小化するある解である。もし Z_N^* に属する要素のうち評価を最小化する解 $\mathbf{z}^*(N)$ が唯一であれば、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{z}(N, \varepsilon_i) = \mathbf{z}^*(N) \quad (11)$$

となる。これらの結果に必要な仮定は文献 (8) により、

A-0 Z_N^* は空でない。 $(S(N)\mathbf{z}(N)=0)$ も満足されなければならないから、最短時間を $N_{\min}$ とすれば、この場合は、 $N \geq N_{\min}$ であることを注意しておく)

A-1 $J(\mathbf{z}(N), N)$, $\mathbf{F}(\mathbf{z}(N), N)$, $g_i(\mathbf{z}(N), N)$, $i=1, \dots, p_N$ は $\mathbf{z}(N)$ の連続関数であるとし、 $J(\mathbf{z}(N), N) \geq 0$ であるとする。

A-2 ある ε_0 が存在して、 $\varepsilon < \varepsilon_0$ ならば、 $\min I(\mathbf{z}(N), N, \varepsilon) = \inf I(\mathbf{z}(N), N, \varepsilon)$

A-3 ある $\delta_N > 0$ が存在して、

$$Z_N = \{\mathbf{z}(N) | \|S(N)\mathbf{z}(N)\| \leq \delta_N, \|\mathbf{F}(\mathbf{z}(N), N)\| \leq \delta_N, g_i(\mathbf{z}(N), N) \leq \delta_N, i=1, \dots, p_N\}$$

が有界である。

ここで、仮定 A-1~A-3 は $N \leq N_{\min}$ となる N についても成り立つとする。

以上の仮定は、最短時間 $N_{\min}$ より大なる N に対して行なわれた仮定であるが、最短時間 $N_{\min}$ を求める立場から必要となる付加的な仮定をしておく。

A-4 (2) 式の左辺において、 $\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(N)$ を (1) 式の遷移方程式により消去した場合、(2) 式を満足する $r \times N$ 次元ベクトル $(\mathbf{u}'(0) \dots \mathbf{u}'(N-1))'$ の集合を U_N とすれば、 U_N は有界であるとする。この仮定は、操作量に対する制限とともに状態が制限されるために操作量が制限をうけることを意味している。

この仮定によれば、(1), (2) 式を満足する、 $\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(N)$ の集合は、仮定 A-1 により $\mathbf{f}(\cdot)$ が、連続であるから、すべて (1) 式により U_N の連続写像となるから、やはりコンパクトである。したがって、(1), (2) 式を満足する $\mathbf{z}(N)$ の集合はコンパクトである。これを式であらわせば、

$$Z_N = \{\mathbf{z}(N) | \mathbf{F}(\mathbf{z}(N), N) = 0, g_i(\mathbf{z}(N), N) \leq 0, i=1, \dots, p_N\} \quad (12)$$

となる。仮定 A-1 による $J(\mathbf{z}(N), N)$ の連続性と、 Z_N のコンパクト性から、 $J(\mathbf{z}(N), N)$ は、 Z_N 上で有界な最大値をもつから、

$$J_{\max}(N) = \max_{\mathbf{z}(N) \in Z_N} J(\mathbf{z}(N), N) \quad (13)$$

とおくことにする。また $N \geq N_{\min}$ のときは、固定端点問題の解の集合 Z_N^* は、 Z_N を用いて、

$$Z_N^* = \{\mathbf{z}(N) | \mathbf{z}(N) \in Z_N, S(N)\mathbf{z}(N) = 0, N \geq N_{\min}\}$$

とかけられるから、 $Z_N^* \subset Z_N$ であり、 $N \geq N_{\min}$ のとき、

$$J_{\max}(N) \geq \max_{\mathbf{z}(N) \in Z_N^*} J(\mathbf{z}(N), N) \quad (14)$$

である。また、(8) 式の数列において、つねに、

*1 (7) 式を ε で除した形 $I(\mathbf{z}(N), N, \varepsilon)/\varepsilon$ が文献 (8) の $P(x, r)$ に対応しており、 $1/\varepsilon$ が r に対応している。

$$\varepsilon_1 J_{\max}(N) \leq \delta_N \quad (15)$$

となるように ε_1 を選択するものとする。

以上のような仮定 A-0~A-4 の成否を一般的に判定する方法は、いまのところないが、これらの仮定が成立するような系は多々存在すると思われる。

さて、(7) 式の極値 $z(N, \varepsilon_i)$ の存在は仮定 A-3 および (15) 式により保証されており、この極値を利用して、最短時間問題の解 $N_{\min}$ およびある解 $z^*(N_{\min})$ を決定する方法について述べる。つぎのような整数の集合を考える。

$$\Omega_N(\varepsilon_i) = \{N | N \geq 0, \min I(z(N), N, \varepsilon_i) \\ (= I(z(N, \varepsilon_i), N, \varepsilon_i)) \leq \varepsilon_i J_{\max}(N)\} \quad (16)$$

この整数の集合において、まず、つぎのような性質がわかる。 $N \geq N_{\min}$ ならば、固定端点問題の解の集合 Z_N^* の任意の要素 $z_1(N)$ は各制限条件を満足するから $\|S(N)z_1(N)\|^2=0$, $\|F(z_1(N), N)\|^2=0$, および $\sum_{i=1}^{pN} H(g_i(z_1(N), N)) (g_i(z_1(N), N))^2=0$ であり、必ずしも $z_1(N)$ は $I(z(N), N, \varepsilon_i)$ を最小化しないから、

$$I(z(N, \varepsilon_i), N, \varepsilon_i) (= \min I(z(N), N, \varepsilon_i)) \\ \leq I(z_1(N), N, \varepsilon_i) = \varepsilon_i J(z_1(N), N) \leq \varepsilon_i J_{\max}(N) \quad (17)$$

となる。したがって、(16) 式から、

$$N \geq N_{\min} \text{ ならば } N \in \Omega_N(\varepsilon_i), i=1, \dots, \quad (18)$$

がいえる。しかし、逆は必ずしも真ではないことは注意しておく。つぎに、 $\Omega_N(\varepsilon_i)$, $i=1, \dots$, において、

$$\varepsilon_i > \varepsilon_{i+1} > 0 \text{ ならば } \Omega_N(\varepsilon_i) \supset \Omega_N(\varepsilon_{i+1}) \quad (19)$$

であることを示そう。

【証明】 $\Omega_N(\varepsilon_{i+1})$ に含まれる任意の要素はすべて $\Omega_N(\varepsilon_i)$ の要素であることを示せばよい。いま $N' \in \Omega_N(\varepsilon_{i+1})$ とすれば、(16) 式から、

$$\min I(z(N'), N', \varepsilon_{i+1}) = I(z(N', \varepsilon_{i+1}), N', \varepsilon_{i+1}) \\ \leq \varepsilon_{i+1} J_{\max}(N') \quad (20)$$

であり、さらに (17) 式の $I(z(N'), N', \varepsilon_i)$ の第 1 ~ 第 3 項がすべて非負であることを考えれば、(20) 式から、

$$\varepsilon_{i+1} J(z(N', \varepsilon_{i+1}), N') \leq \varepsilon_{i+1} J_{\max}(N') \quad (21)$$

となる。いっぽう、(20), (21) 式の不等式と $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} > 0$, および $z(N', \varepsilon_{i+1})$ は必ずしも $I(z(N'), N, \varepsilon_i)$ を最小化しないことを考慮すれば、

$$\min I(z(N'), N', \varepsilon_i) (= I(z(N', \varepsilon_i), N', \varepsilon_i)) \\ \leq I(z(N', \varepsilon_{i+1}), N', \varepsilon_i) \\ = I(z(N', \varepsilon_{i+1}), N', \varepsilon_{i+1}) \\ + (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) J(z(N', \varepsilon_{i+1}), N') \\ \leq \varepsilon_{i+1} J_{\max}(N') + (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) J_{\max}(N') \\ = \varepsilon_i J_{\max}(N') \quad (22)$$

となり、(16) 式の定義にしたがって $N' \in \Omega_N(\varepsilon_i)$ である。よって $\Omega_N(\varepsilon_i) \supset \Omega_N(\varepsilon_{i+1})$ が証明された。

この関係を用いれば、(12) 式の ε_i の数列に対して、

$$\Omega_N(\varepsilon_1) \supset \dots \supset \Omega_N(\varepsilon_i) \supset \Omega_N(\varepsilon_{i+1}) \supset \dots \quad (23)$$

となるから、 $\Omega_N(\varepsilon_i)$ に属する整数の最小値を $N^*(\varepsilon_i)$ と書くことにすれば、(23) 式から、

$$N^*(\varepsilon_1) \leq N^*(\varepsilon_2) \leq \dots \leq N^*(\varepsilon_i) \leq N^*(\varepsilon_{i+1}) \leq \dots \quad (24)$$

となる。さらに、(17) 式より任意の ε_i について $N_{\min} \in \Omega_N(\varepsilon_i)$ であり、 $N^*(\varepsilon_i)$ は $\Omega_N(\varepsilon_i)$ の最小値であるから、

$$N^*(\varepsilon_i) \leq N_{\min} \quad (25)$$

となる。(24), (25) 式から、 $N^*(\varepsilon_i)$ は有界な非減少無限数列で、有限個 ($\leq N_{\min}$ 個) の値しかとらないから、ある整数 K が存在して、

$$N^*(\varepsilon_i) = \tilde{N} (\leq N_{\min}), i \geq K \quad (26)$$

となる。すなわち、

$$\tilde{N} \in \bigcap_{i=K}^{\infty} \Omega_N(\varepsilon_i) \quad (27)$$

したがって、(16) 式から、 $i \geq K$ に対して、

$$I(z(\tilde{N}, \varepsilon_i), \tilde{N}, \varepsilon_i) \leq \varepsilon_i J_{\max}(\tilde{N}) \leq \varepsilon_i J_{\max}(\tilde{N}) \quad (28)$$

となる。仮定 A-3 によって、 $z(\tilde{N}, \varepsilon_i)$ はコンパクト集合 $Z_{\tilde{N}}$ の要素であることから、 ε_i , $i \geq K$ の部分列 $\varepsilon_{i'}$ が存在して、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} z(\tilde{N}, \varepsilon_i) = \tilde{z}(\tilde{N}) \quad (29)$$

とすることができる。したがって (27), (28) 式から、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} I(z(\tilde{N}, \varepsilon_{i'}), \tilde{N}, \varepsilon_{i'}) = I(\tilde{z}(\tilde{N}), \tilde{N}, 0) \\ \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_{i'} J_{\max}(\tilde{N}) = 0 \quad (30)$$

となる。(30) 式は、(7) 式から、

$$\|S(\tilde{N})z(\tilde{N})\|^2=0, \|F(\tilde{z}(\tilde{N}), N)\|^2=0 \\ g_i(\tilde{z}(\tilde{N}), \tilde{N}) \leq 0, i=1, \dots, p\tilde{N} \quad (31)$$

を意味するから、このように、(5), (6) 式の制限条件を満足し、原点到達するためには、

$$\tilde{N} \geq N_{\min} \quad (32)$$

でなければならない。したがって (32), (26) 式から、

$$\tilde{N} = N_{\min} \quad (33)$$

である。 $N = \tilde{N}$ に対しては、(13)~(15) 式が成り立ち、評価 $J(z(\tilde{N}), \tilde{N})$ を最小化する最短時間問題のある解 $z^*(\tilde{N})$ に収束する解の列 $z(\tilde{N}, \varepsilon_i)$, $i \geq K$ を得る。このように、十分小さな ε_i に対して、 $\Omega_N(\varepsilon_i)$ の最小値 $N^*(\varepsilon_i)$ を求めることにより $N_{\min}$ を求めることができるのであるが、そのような ε_i の値を理論的に定めるのは困難であるとともに、 ε_i が小さいほど精度が高いといっても、数値解においておにも計算機の計算精度により ε_i の下限が制限をうけ、理論的に ε_i の下限を定めることも困難である。たとえば、計算精度に関係する例として次のような系および制限を考える。

$$x(k+1) = x(k) + u(k), |u(k)| \leq 1, k=0, \dots, N-1$$

ここで、 $x(k), u(k)$ はスカラーである。さらに、

$$J(z(N), N) = \sum_{k=0}^{N-1} (u(k))^2$$

とする。いま、初期条件を $x(0)=1.5$ とすれば、

$$N_{\min}=2, u^*(0)+u^*(1)=-1.5$$

である。いっぽう (7) 式の罰関数は、不等式制限のみを考慮することによれば、

$$I(z(N), N, \varepsilon) = (x(N))^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \{H(u(k)-1) \times (u(k)-1)^2 + H(-u(k)-1) \times (-u(k)-1)^2\} + \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} (u(k))^2$$

となる。ここで、 $x(N)=x(0)+u(0)+\cdots+u(N-1)$ である。いま $N=2$ とすれば、罰関数の極値解の方程式は、

$$(1+\varepsilon)u(0)+u(1)+1.5=0 \\ u(0)+(1+\varepsilon)u(1)+1.5=0$$

となり、

$$u(0)=u(1)=-1.5/(2+\varepsilon)$$

となる。もちろん、この形で $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば真値を得られるが、一般には、このような解析解を得るのは困難で、実際には上述の2つの方程式を同時に満足する解を逆行列等を用いて数値的に求める必要がある。この場合に、 ε の値が1に比べて計算機の有効けた数以下に小さい場合は、計算機の演算において、 $1+\varepsilon=1$ となるので、上述の連立方程式がたがいに独立ではなくなり、逆行列を用いる求解は不可能になる。

しかしながら、普通の大形計算機においては、単精度計算で有効けた数は約7けた程度であり、かりに $\varepsilon=10^{-6}$ とすれば、

$$u(0)=u(1)=-0.7499996$$

いっぽう、最短時間解のうち $J(z(2), 2)=(u(0))^2+(u(1))^2$ を最小化する真の解は、

$$u(0)=u(1)=-0.75$$

である。このように、適当な ε の選択により、逆行列の存在を保証できるとともに、単精度計算によっても、評価を最小にする最適解に十分近い近似解を得ることができることは、本方法の大きな利点と思われる。

そこで、 ε の選択法と関連して、あらたな仮定として、

$$N \leq N_{\min} \\ \|S(N)z(N)\|^2 \leq \gamma_1, \gamma_1 > 0 \\ \|F(z(N), N)\|^2 \leq \gamma_2, \gamma_2 > 0 \\ g_j(z(N), N) \leq \gamma_3, j=1, \dots, p_N, \gamma_3 > 0 \quad (34)$$

を満たせば、すべて最短時間問題の近似解であるとする。ここに $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ は、物理的考察から与えられる許容誤差である。すなわち、(34) 式を満足することは、最短時間 $N_{\min}$ 以下の時間で原点の近傍に到達

*2 仮定A-4において、 $I_{\max}(N)$ の値または $M(N) > J_{\max}(N)$ となる $M(N)$ が容易に得られるように $J(z(N), N)$ を決定されているものとする。たとえば、 $|u^i(k)| \leq 1, i=1, \dots, r, k=0, \dots, N-1$ の場合には、 $J(z(N), N) = \sum_{i=0}^{N-1} \|u(k)\|^2$ とすれば、 $J_{\max}(N) = rN$ である。また、有限値 $M(N)$ が与えられる場合には、これを $J_{\max}(N)$ の代わりに用いても、理論的に支障のないことはあきらかである。

Fig. 1 Flow chart of the algorithm which solves the minimum-time problems

できることを意味する。このような近似解を求める一方法として、 $\Omega_N(\epsilon_i)$ に含まれる各 N について罰関数の極値 $z(N, \epsilon_i)$ が (16) 式を満足することに着目して、 $N^*(\epsilon_i) \leq N \leq N_{\min}$ となる N を求めつつ、 $z(N, \epsilon_i)$ が (34) 式を満足するまで ϵ_i を小さくしていく方法が考えられる。以下に、近似解を求めるアルゴリズムの例および収束について述べる。

(i) $\epsilon_1 > 0$ を与え $z(N_u^0, \epsilon_1)$ を計算しつつ、

$$I(z(N_u^0, \epsilon_1), N_u^0, \epsilon_1) \leq \epsilon_1 J_{\max}(N_u^0)^{*2}$$

となる N_u^0 を見つける。また最初は $N_l^0 = 0$ とおく。

(ii) $N^i = (N_u^i + N_l^i)/2$ において、 $z(N^i, \epsilon_j)$ および $I(z(N^i, \epsilon_j), N^i, \epsilon_j)$ を求める。

(iii) (16) 式によって、 N_u^i, N_l^i を、

$$N^i \in \Omega_N(\epsilon_j) \text{ ならば } N_u^{i+1} = N^i, N_l^{i+1} = N_l^i$$

$N^i \notin \Omega_N(\epsilon_j) \text{ ならば } N_u^{i+1} = N_u^i, N_l^{i+1} = N_u^i$ と修正し、 $N_u^{i+1} - N_l^{i+1} > 1$ ならば (ii) の計算にもどる。

(iv) $N_u^{i+1} - N_l^{i+1} = 1$ ならば、(34) 式によって、与えられた許容誤差の範囲内かどうか検討し、(34) 式が満足される場合は計算を終了し、満足されない場合は、 $\epsilon_{j+1} = \epsilon_j / \alpha, \alpha > 1$ および $N_l^0 = N_l^{i+1}$ として、(i) の計算にもどる。

このアルゴリズムのフローチャートを Fig. 1 に示す。このアルゴリズムからあきらかなように、

$$N_u^{i+1} - N_l^{i+1} = (N_u^i - N_l^i)/2 \quad (35)$$

(小数以下切捨または切上)

であるから、アルゴリズム (ii), (iii) の繰返しによ

り有限回で $N_u^{i+1} - N_i^{i+1} = 1$ となる。 $N_u^{i+1} \in \Omega_N(\varepsilon_j)$, $N_i^{i+1} \in \Omega_N(\varepsilon_j)$ であるから, $N_u^{i+1} - N_i^{i+1} = 1$ となる N_u^{i+1} について,

$$N_u^{i+1} \in \Omega_N(\varepsilon_j) \text{ \& } N_u^{i+1} - 1 \in \Omega_N(\varepsilon_j) \quad (36)$$

となる。 $N^*(\varepsilon_j)$ が $\Omega_N(\varepsilon_j)$ の最小値であること, および $N_u^{i+1} > N_{\min}$ ならば (36) 式のようなことは起こらないことを考慮すれば, (36) 式が成立するような N_u^{i+1} は,

$$N^*(\varepsilon_j) \leq N_u^{i+1} \leq N_{\min} \quad (37)^{*3}$$

である。したがって, このような N_u^{i+1} に対して, $z(N_u^{i+1}, \varepsilon_j)$ が (34) 式を満足するならば, これが最短期間問題の近似解となる。

また, (7), (16) 式から,

$$\begin{aligned} & \|S(N_u^{i+1}, z(N_u^{i+1}, \varepsilon_j))\|^2 + \|F(z(N_u^{i+1}, \varepsilon_j), N_u^{i+1})\|^2 \\ & + \sum_{i=1}^{pN_u^{i+1}} H(g_i(z(N_u^{i+1}, \varepsilon_j), N_u^{i+1})) \\ & \times (g_i(z(N_u^{i+1}, \varepsilon_j), N_u^{i+1}))^2 \leq \varepsilon_j \max J(N_u^{i+1}) \end{aligned} \quad (38)$$

であるから, ある ε_j に対して (34) 式を満足する $z(N_u^{i+1}, \varepsilon_j)$ の存在が保証される。

また, 解が存在しない場合には, (5), (6) 式の等式および不等式制限条件および原点到達を同時に満足する解は存在しないから, (7) 式において, ε を零としても,

$$\min I(z(N), N, 0) > 0$$

となる。したがって, $\varepsilon_i \rightarrow 0$ とするとき,

$I(z(N, \varepsilon_i), N, \varepsilon_i) \geq I(z(N, \varepsilon_i), N, 0) > \varepsilon_i J_{\max}(N)$ となり, アルゴリズムの (i) において $N_u^0 \rightarrow \infty$ となりアルゴリズムが収束しなくなる。

3. $z(N, \varepsilon_i)$ の計算法

これまで, 各 ε_i に対する罰関数 $I(z(N), N, \varepsilon_i)$ の極値 $z(N, \varepsilon_i)$ が計算され得るものとして理論を導びいてきたが, 一般に $I(z(N), N, \varepsilon_i)$ の極値はこう配法など^{6,7)}により求める必要があり, 計算法の収束の速さなどが問題となる。ここでは, $I(z(N), N, \varepsilon_i)$ のように, ヘビサイドのステップ関数を含むような関数の極値探索に適していると思われる計算法について述べる。とくに等式制限および不等式制限が線形である場合に, この計算法は有用である。

説明の簡単のため, $I(z(N), N, \varepsilon_i)$ を簡単化し,

$$I(z) = I_1(z) + \sum_{i=1}^p H(h^i(z)) (h^i(z))^2 \quad (39)$$

におきかえて考察する。ここで, $I_1(z)$ および $h^i(z)$ はヘビサイドのステップ関数を含まない連続関数で,

3 $N \geq N^(\varepsilon_j)$ ならば $N \in \Omega_N(\varepsilon_j)$ が成立するならば (36) 式を満足する N_u^{i+1} は $N^*(\varepsilon_j)$ のみであるが, たとえば, $\Omega_N(\varepsilon_j) = \{5, 6, 8, 9, 10, \dots\}$ のような集合の場合には, (36) 式を満足する N_u^{i+1} は, $5 (= N^*(\varepsilon_j))$ のみならず, $7 \in \Omega_N(\varepsilon_j)$ であるため, 8 も (36) 式を満足することになり, 一般にこのような N_u^{i+1} は唯一ではない。

連続な 2 階の導関数をもつとする。もちろん, (39) 式に直接こう配法を適用しても極値を得ることができるが, 以下のように, (39) 式の $I(z)$ をヘビサイドのステップ関数を含まない関数におきかえて極値を計算することを考える。

(i) 初期値の設定 任意に α_i^0 , $0 \leq \alpha_i^0 \leq 1$, $i=1, \dots, p$ を選ぶ。

(ii) 極値探索 (39) 式のヘビサイドのステップ関数 $H(h^i(z))$ のかわりに α_i^j とおいた関数,

$$\begin{aligned} I^*(z, \alpha^j) &= I_1(z) + \sum_{i=1}^p \alpha_i^j (h^i(z))^2, \\ \alpha^j &= (\alpha_1^j, \dots, \alpha_p^j) \end{aligned} \quad (40)$$

の極値 z^j をこう配法などにより求める。

(iii) 収束の吟味 z^j $H(h^i(z^j)) = \alpha_i^j$, $i=1, \dots, p$ (41)

または,

$$\|\partial I(z^j)/\partial z\|^2 < \delta^*, \delta^* > 0 \quad (42)$$

を満足するならば, 収束したとする。

(iv) α_i^j の修正 z^j が (iii) の収束の条件を満足しない場合は, α_i^j をあらたに,

$$\alpha_i^{j+1} = \alpha_i^j + \beta^j (H(h^i(z^j)) - \alpha_i^j), \quad i=1, \dots, p \quad (43)$$

と修正する。ここで, β^j は, $H(h^i(z^j)) \neq \alpha_i^j$ ならば,

$$\beta^j = \min \{1, \delta / |H(h^i(z^j)) - \alpha_i^j|, i=1, \dots, p\} \quad (44)$$

である。 ($H(h^i(z^j)) = \alpha_i^j$ ならば修正は行なわない。

この修正後 (ii) の計算にもどり, (iii) の収束の条件が満足されるまで, この過程を繰返す。

(iii) の収束の条件のうち, (41) 式は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^*(z^j, \alpha^j)}{\partial z} &= 0 = \frac{\partial I_1(z^j)}{\partial z} + \sum_{i=1}^p \alpha_i^j \frac{\partial (h^i(z^j))^2}{\partial z} \\ &= \frac{\partial I_1(z^j)}{\partial z} + \sum_{i=1}^p H(h^i(z^j)) \frac{\partial (h^i(z^j))^2}{\partial z} = \frac{\partial I(z^j)}{\partial z} \end{aligned} \quad (45)^{*4}$$

となり, z^j は $I(z)$ の極値と一致することがわかる。

また (42) 式は一般の収束判定の意味である。このアルゴリズムは, 前述のように, とくに $I_1(z)$ が z の 2 次までの関数で, $h^i(z)$ が z の 1 次の関数である場合に有用である。すなわちこの場合には, $I(z)$ がヘ

*4, *5 ヘビサイドのステップ関数 $H(\cdot)$ は, 不連続関数であるが, $f(x) = H(x)x^2$ なる関数は, $H(x)$ の不連続点 $x=0$ においても, 1 階連続微分可能で,

$$f'(0) = 2H(x)x|_{x=0} = 0$$

であり, さらに, この点において, 2 階微分は有界で左微分係数は 0, 右微分係数は 2 である。したがって, $x=0$ の近傍におけるテーラー展開は, 2 次の項で打ち切って,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + (1/2)f''(0)(\theta x)^2, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \\ &= (1/2)f''(0)(\theta x)^2 \end{aligned}$$

ここで, $\theta=1$,

$$f''(0) = \begin{cases} x \geq 0 & \text{ならば } 2 \\ x < 0 & \text{ならば } 0 \end{cases}$$

となる。 $x \neq 0$ では, $H(x)$ は定係数となるから問題はない。

ビサイドのステップ関数によるステップ状の非線形性を有するのに対して、 $I^*(z, \alpha^j)$ は単に z の 2 次関数であり、後述するように、D.P. 法などにより容易に極値の計算ができる。また一般の場合においても、 $I(z)$ よりも、ステップ状の非線形性をもたない $I^*(z, \alpha^j)$ の極値が容易に求められる場合には、このアルゴリズムは有用と思われる。

このアルゴリズムの収束を無条件で証明するのは困難であるが、 $I^*(z, \alpha^j)$ の極値が求まるものとし、 $I_1(z)$ および $(h^i(z)^2, i)^2=1, \dots, p$ が凸で連続な 2 階導関数をもつ場合には、以下のようにして証明できる。まず j 回の繰返しにより得られた $I^*(z, \alpha^j)$ の極値 z^j が収束の条件 (41), (42) 式を満足しないとする。すなわち、 m 個の i に対して、

$$H(h^i(z^j)) \neq \alpha_i^j, \quad i=i_1, \dots, i_m \quad (46)$$

$$\|\partial I(z^j)/\partial z\|^2 > \delta^* \quad (47)$$

であるとすれば、(43) 式の α の修正によりあらたに得られる $I^*(z, \alpha^{j+1})$ の極値 z^{j+1} に対して、(44) 式の δ を適当に選ぶことにより、 $I(z^{j+1}) < I(z^j)$ となることを示す。いま、

$$\Delta z^j = z^{j+1} - z^j \quad (48)$$

とし、 z^j のまわりで $I(z)$ をテーラー展開することにより、

$$I(z^{j+1}) = I(z^j) + (\partial I(z^j)/\partial z)' \Delta z^j + o(\Delta z^j) \quad (49)^{*5}$$

と書くことができる。いっぽう z^j が $I^*(z, \alpha^j)$ の極値であることを考えれば、 z^j が $\partial I^*(z^j, \alpha^j)/\partial z = 0$ なる方程式により関係づけられるので、

$$\left. \begin{aligned} z^{j+1} &= z^j + \sum_{i=1}^p (\partial z^j / \partial \alpha_i^j) \Delta \alpha_i^j + o(\Delta \alpha^j) \\ \Delta \alpha_i^j &= \alpha_i^{j+1} - \alpha_i^j = \beta^j (H(h^i(z^j)) - \alpha_i^j), \\ \Delta \alpha^j &= (\Delta \alpha_1^j, \dots, \Delta \alpha_p^j)' \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

および、陰関数の定理により、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha_i} \left(\frac{\partial I^*(z^j, \alpha^j)}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 I^*(z^j, \alpha^j)}{\partial z^2} \frac{\partial z^j}{\partial \alpha_i} \\ &+ \frac{\partial (h^i(z^j))^2}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

なる関係がある。仮定により、 $I^*(z, \alpha^j)$ は、 z について凸であるから、 $\partial^2 I^*(z^j, \alpha^j)/\partial z^2$ は正定値行列であり、これを S_j^* と書くことにすれば、(51) 式より、

$$\partial z^j / \partial \alpha_i = -S_j^{*-1} \cdot \partial (h^i(z^j))^2 / \partial z, \quad i=1, \dots, p \quad (52)$$

となる。(52) 式を (50) 式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \Delta z^j &= z^{j+1} - z^j = -S_j^{*-1} \sum_{i=1}^p (\partial (h^i(z^j))^2 / \partial z) \cdot \Delta \alpha_i^j \\ &+ o(\Delta \alpha^j) \end{aligned} \quad (53)$$

となる。また、(39), (40) 式から、

$$I(z) = I^*(z, \alpha) + \sum_{i=1}^p (H(h^i(z)) - \alpha_i) \cdot (h^i(z))^2 \quad (54)$$

であること、 z^j が $\partial I^*(z^j, \alpha^j)/\partial z = 0$ を満足することを考慮すれば、

$$\partial I(z^j)/\partial z = \sum_{i=1}^p (H(h^i(z^j)) - \alpha_i^j) (\partial (h^i(z^j))^2 / \partial z) \quad (55)$$

となる。(47) 式を考慮すれば、(50) 式の $\Delta \alpha_i^j$ の式と (44) 式から、

$$|\Delta \alpha_i^j| \leq \delta \quad (56)$$

であるから、(53) 式から $\delta \rightarrow 0$ に対して $\Delta z \rightarrow 0$ であり、十分小さな δ に対して (49) 式の第 3 項および (53) 式の第 2 項は無視できる。このような条件のもとに、(53) 式と (55) 式を (49) 式に代入すれば、

$$I(z^{j+1}) - I(z^j) \approx -\beta^j h_j^* S_j^{*-1} h_j \quad (57)$$

となる。ここで、

$$h_j = \partial I(z^j)/\partial z \quad (58)$$

である。 S_j^{*-1} が正定値であるから、(57) 式から、

$$I(z^{j+1}) < I(z^j) \quad (59)$$

となり、 $I(z)$ の凸関数性より、 $j \rightarrow \infty$ に対して、 $I(z)$ の極値 (z^* と書く) に収束する。したがって、

$$h^i(z^*) \approx 0 \quad (60)$$

となる i に対しては、ある整数 K に対して、

$$\|z^* - z^k\| < \mu, \quad k > K \quad (61)$$

となるから、

$$H(h^i(z^*)) = H(h^i(z^k)), \quad k \geq K \quad (62)$$

となり、(43) 式の α の修正法により、十分大きな k に対して、

$$H(h^i(z^*)) = H(h^i(z^k)) = \alpha_i^k \quad (63)$$

となる。すべての i について (60) 式が成立するなら、(45) 式から、 $z^k = z^*$ であるが、

$$h^i(z^*) = 0 \quad (64)$$

となる i が存在する場合には、計算誤差なども関係して、一般に $H(h^i(z^k)) = \alpha_i^k$ は期待できないが、(59) 式から、十分大きな k に対して (42) 式が成立することがわかる。よって収束が証明された。

つぎに、特別な場合として、系および不等式条件が線形である場合には、評価 $J(z(N), N)$ を、

$$\begin{aligned} J(z(N), N) &= \sum_{k=1}^N \{x'(k) Q(k) x(k) \\ &+ u'(k-1) A(k) u(k)\}, \quad \theta(k), A(k), \end{aligned} \quad (65)$$

とおくことによって、(7) 式の評価は、

$$\begin{aligned} I(z(N), N, \varepsilon) &= z'(N) (A(N) + \varepsilon B(N)) z(N) \\ &+ \sum_{i=1}^{pN} H(z'(N) \cdot g^i(N) + b^i(N)) (z'(N) g^i(N) \\ &+ b^i(N))^2 \end{aligned} \quad (66)$$

の形に書くことができる。ここに $A(N)$ は、(7) 式の第 1 項と第 2 項をまとめた正定値行列であり、 $B(N)$ は、(65) 式を (7) 式に代入した形でやはり正定値行列で、 $g^i(N)$, $b^i(N)$ は、不等式制限の超平面をあらわすベクトルおよびスカラーである。簡単のため、 N と ε を固定すれば、(66) 式は、

$$I(z) = z'Sz + \sum_{i=1}^p H(z'g^i + b^i)(z'g^i + b^i)^2 \quad (67)$$

と書けるから、(40) 式にしたがえば、

$$\begin{aligned} I^*(z, \alpha^j) &= z'Sz + \sum_{i=1}^p \alpha_i^j (z'g^i + b^i)^2 \\ &= z'S_j^* z + 2g'z + c \end{aligned} \quad (68)$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} S_j^* &= S + \sum_{i=1}^p \alpha_i^j g^i g^{i'} & g' &= \sum_{i=1}^p \alpha_i^j b^i g^i \\ c &= \sum_{i=1}^p \alpha_i^j (b^i)^2 \end{aligned} \quad (69)$$

である。したがって、

$$z^j = -S_j^{*-1} g \quad (70)$$

となり、上述のアルゴリズムの適用が容易であることがわかる。(43) 式において、 $\beta^j = 1$ とおけば、

$$\alpha_i^{j+1} = H(z^j g^i + b^i) \quad (71)$$

となるから、この場合には、上述のアルゴリズムは、(67) の極値を多次元ニュートン法により求めることに一致するから、この場合には、ニュートン法を含んだアルゴリズムであることがわかる。

さらに特別な場合として、系がスカラー操作量をもち、

$$x(k+1) = \Phi(k)x(k) + d(k)u(k), \quad k=0, \dots, N-1 \quad (71)$$

であらわされ、不等式の制限条件が、

$$\alpha^i x(k) + b^i \leq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad k=1, \dots, N \quad (72)$$

$$|u(k)| \leq 1, \quad k=0, \dots, N-1 \quad (73)$$

である場合、評価 $J(z(N), N)$ として、

$$\begin{aligned} J(z(N), N) &= \sum_{k=1}^N \{x(k)Q(k)x(k) \\ &\quad + \lambda(k-1)(u(k-1))^2\} \end{aligned} \quad (74)$$

とすれば、終端点と不等式制限条件のみ含めた罰関数、

$$\begin{aligned} I(z) &= \|x(N)\|^2 + \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{i=1}^m H(\alpha^i x(k) + b^i) (\alpha^i x(k) \right. \\ &\quad \left. + b^i)^2 + H(u(k-1)-1)(u(k-1)-1)^2 \right. \\ &\quad \left. + H(-u(k-1)-1)(u(k-1)+1)^2 \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \sum_{k=1}^N \{x'(k)Q(k)x(k) + \lambda(k-1)(u(k-1))^2\} \right\} \end{aligned} \quad (75)$$

を設定して、D.P. 法を併用すれば、上述のアルゴリズムにおける罰関数 $I^*(z, \alpha^j)$ 、

$$\begin{aligned} I^*(z, \alpha^j) &= \|x(N)\|^2 + \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_{xki}^j (\alpha^i x(k) + b^i)^2 \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{1k-1} (u(k-1)-1)^2 + \alpha_{-1, k-1} (u(k-1)+1)^2 \right\} \\ &\quad + \varepsilon \sum_{k=1}^N \{x(k)Q(k)x(k) + \lambda(k-1)(u(k-1))^2\} \end{aligned} \quad (76)$$

の極値 z^j はつぎのようにして求める。すなわち、この場合には、D.P. 法を直接適用することにより、

$$u(k) = B(N-k)x(k) + \theta(N-k), \quad k=0, \dots, N-1, \quad (77)$$

なる形で解を得ることができる¹¹⁾。ここで、 $B(N-k)$ 、 $\theta(N-k)$ は、行列の繰返し形で与えられ、以下に結

果のみを記す。

$$P(0) = I \quad (n \times n \text{ 単位行列})$$

$$L(0) = 0 \quad (1 \times n \text{ 零行列})$$

$$\begin{aligned} S(N-\overline{k+1}) &= P(N-\overline{k+1}) + \sum_{i=1}^m \alpha_{xk+i} \alpha^i \alpha^{i'} \\ &\quad + \varepsilon Q(k+1) \end{aligned}$$

$$L^*(N-\overline{k+1}) = L(N-\overline{k+1}) + \sum_{i=1}^m \alpha_{xk+i} b^i \alpha^{i'}$$

$$\begin{aligned} r(k) &= d'(k)S(N-\overline{k+1})d(k) + \alpha_{+1k}^j + \alpha_{-1k}^j \\ &\quad + \varepsilon \lambda(k) \end{aligned}$$

$$B(N-k) = -r^{-1}(k)d'(k)S(N-\overline{k+1})\Phi(k)$$

$$\begin{aligned} \theta(N-k) &= -r^{-1}(k)(L^*(N-\overline{k+1})d(k) - \alpha_{+1k}^j \\ &\quad + \alpha_{-1k}^j) \end{aligned}$$

$$P(N-k) = \Phi'(k)S(N-\overline{k+1})\Phi(k)$$

$$-r(k)B'(N-k)B(N-k)$$

$$L(N-k) = L^*(N-\overline{k+1})\Phi(k)$$

$$+r(k)\theta(N-k)B(N-k) \quad (78)$$

この (78) の一連の式は、 $P(0)$ 、 $L(0)$ より、 $S(0)$ 、 $L^*(0)$ 、 $r(N-1)$ を計算して $B(1)$ 、 $\theta(1)$ を求め、 $P(1)$ 、 $L(1)$ の計算に至るような繰返し形計算であり、この計算によって、操作量が閉ループ形で求まる特長がある。

4. 例 題

例題として、つぎのような最短時間問題の解の例を示す。系は、純慣性系、

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (79)$$

であるとし、不等式制限条件は、

$$-[0 \quad 1]x(k) - 2 \leq 0, \quad k=1, \dots, \dots \quad (80)$$

$$|u(k)| \leq 1, \quad k=0, \dots, \dots \quad (81)$$

である。評価 $J(z(N), N)$ としては、

$$J(z(N), N) = \sum_{k=0}^{N-1} (u(k))^2$$

と選び、また、不等式制限に対する許容誤差 ((34) 式) についてはとくに設定せず、ここでは $\varepsilon = 1/6 \sim 1/6^8$ の 8 とおいて $N^*(\varepsilon)$ の計算を行なった (この場合、(36) 式を満足するのは $N^*(\varepsilon)$ のみである)。この結果、

$$N^*(1/6) = 6, \quad N^*(1/6^2) = \dots = N^*(1/6^8) = 7 \quad (82)$$

であり、 $\varepsilon = 1/6^8$ に対応する状態値および操作量は **Table 1**、位相軌道は **Fig. 2** のとおりである。各不等式制限条件はほぼ満足されており、真の解 (**Table 2**) に十分近いことがわかる。また、使用計算機は、FACOM 230-60 で、極値計算における α^j の修正式 (43) 式において $\beta^j = 1$ とした場合、 z^j の計算時間は約 0.065 秒で、数回の繰返しで $z^*(z(N, \varepsilon_i))$ を得ることができ、上述の 8 とおきの $N^*(\varepsilon)$ を求める時間は全部で約 2.30 秒であった。

Table 1 Numerical solution of the minimum-time problem of the example by means of the algorithm shown in this paper

time k	$x^1(k)$	$x^2(k)$	$u(k)$
0	10	0	-1.000 004
1	9.499 998	-1.000 004	-0.999 997
2	7.999 996	-2.000 000	-0.000 004
3	5.999 994	-2.000 004	0
4	3.999 991	-2.000 004	0.000 035
5	2.000 005	-1.999 968	0.999 955
6	0.500 015	-1.000 013	1.000 004
7	0.000 004	-0.000 009	

Table 2 Exact optimum solution of the minimum-time solution of the example

time k	$x^1(k)$	$x^2(k)$	$u(k)$
0	10	0	-1
1	9.5	-1	-1
2	8	-2	0
3	6	-2	0
4	4	-2	0
5	2	-2	1
6	0.5	-1	1
7	0	0

Fig. 2 Phase trajectory of state of Table 1

5. 議論および結論

(13)~(15) 式からあきらかなように理論的には ε_i が小さいほど解の精度はよいが、実際には計算機の計算精度により制限される。したがって、 ε の値の最小限度があらかじめわかっているならば、 ε を数列的に変化させる必要はなく、 ε が最小限度の値のとき得られる解が、もっともよい近似解ということになるが、実際には、前述のように、そのような ε をあらかじめ知る

ことは困難である。したがって、ある程度大きな ε_1 から計算をはじめて、徐々に小さくしていく方法が適当と思われる。また計算機的には倍精度計算が望ましいということになるが、例題の解は単精度計算でも満足すべき解が得られる可能性を示している。

以上のように、状態および操作量に制限がある場合の非線形離散値系の最短時間問題の数値解が、罰関数法を用いることにより、かなり簡単なアルゴリズムで得られることがわかる。またそのアルゴリズムに関連して、ヘビサイドのステップ関数を含む関数の極値探索に有用と思われるアルゴリズムを示し、例題の計算結果から、この方法がかなり有用であることがわかった。

参考文献

- 1) E. B. Lee : Recurrence Equations and the Control of Their Evolution, J. Math. Anal. and Appl., Vol.7, 118/126 (1963)
- 2) R. W. Koepcke : A Solution to the Sampled, Minimum-time Problem, 1963 JACC, 94/100 (1963)
- 3) J. H. Eaton : An On Line Solution to Sampled-data Time Optimal Control, J. Electron. Control, 15-4, 333/341 (1963)
- 4) J. Pokoski : An Analysis Scheme for Suboptimal Minimum-time, Sampled-data Systems, 1968 JACC, 270/287 (1968)
- 5) 伊藤：線形離散値系の2次評価を用いた最短時間問題の準最適解，計測自動制御学会論文集，7-4，303/309 (1971)
- 6) R. Fletcher & M. J. D. Powell : Rapidly Convergent Descent Method for Minimization, Computer Journal, 6-2, 163/168 (1964)
- 7) R. Fletcher & C. M. Reeves : Function Minimization by Conjugate Gradients, Computer Journal, 7-2, 149/154 (1964)
- 8) W. I. Zangwill : Non-linear Programming via Penalty Functions, Management Science, 13-5, 344/358 (1967)
- 9) A. V. Fiacco & G. P. McCormick : The Sequential Unconstrained Minimization Technique for Non-linear Programming, A Primal-Dual Method, Management Science, 10-2, 360/366 (1964)
- 10) 伊藤：状態制限付非線形離散値系の最短時間問題の解法，第14回自動制御連合講演会，1105 (1971)
- 11) J. T. Tou : Optimum Design of Digital Control Systems, Academic Press (1963)