直列結合系の可制御性と可観測性

米 村 雄 吉・伊 藤 正 美

名古屋大学工学部 名古屋市千種区不老町

(昭和 46 年 12 月 15 日 受付)

Controllability and Observability of Composite Systems of Tandem Connection

Yukichi YONEMURA and Masami Ito

(Faculty of Engineering, Nagoya University Nagoya)

(Received December 15, 1971)

In this paper, the controllability and observability of tandem connection of two linear time invariant systems each having the Jordan form representation are considered. The criteria for the composite system to become controllable and/or observable are given for the general cases. The method of proof employed in this paper is more straightforward and simpler than that in Panda's paper [4].

1. 緒 言

2つの可制御かつ可観測な系を直列に結合したとき、その結合系において、可制御性、可観測性がおかされる場合のあることはよく知られている。この問題は、E. G. Gilbert によって最初に研究されたもので、E. G. Gilbert は、2つの系がともに相異なる固有値をもち、かつ、2つの系が可制御、可観測となるための必要条件を示している¹⁾。その後、C. T. Chen & C. A. Desoer は、ジョルダン標準形を基礎にして、この問題をもつ場合に拡張した。そして、2つの系が共通の固有値をもたない場合には、結合系が可制御（または可観測）であるための必要十分条件を、また、2つの系が共通の固有値をもつ場合には、可制御（または可観測）であるための十分条件を与えた²⁾。しかし、共通の固有値をもつ場合の十分条件は、不十分であることを S. P. Panda らが反例によって示した³⁾。いっぽう、S. P. Panda は、別の方法によって、共通の固有値をもつ場合の必要十分条件を出したが、その条件が適用できるのは、ある特別な場合のみで、一般の場合には適用できない⁴⁾。

その後、この問題を検討したところ、各固有値に対応する固有ベクトルを求めれば、一般の場合に対して

も、必要十分条件がえられることがわかったので、ここに報告する。本稿の方法は、S. P. Panda の方法より、簡潔でわかり易く、かつ、えられた定理は C. T. Chen & C. A. Desoer や S. P. Panda によってえられた定理を包含している。

2. ジョルダン標準形で表らわされた系の可制御性と可観測性

準備として、次のジョルダン標準形で表わされた系の可制御と可観測性の定理を与えておこう。

$$S: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1)$$

ただし、

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{bmatrix} \quad (n \times n) \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \quad (n \times p) \quad C = [C_1 C_2 \cdots C_m] \quad (q \times n) \\ A_i &= \begin{bmatrix} A_{i1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ir(i)} \end{bmatrix} \quad (n_i \times n_i) \quad B_i = \begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \\ \vdots \\ B_{ir(i)} \end{bmatrix} \quad (n_i \times p) \quad C_i = [C_{i1} C_{i2} \cdots C_{ir(i)}] \quad (q \times n_i) \\ A_{ij} &= \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (n_{ij} \times n_{ij}) \quad B_{ij} = \begin{bmatrix} b_{1ij} \\ b_{2ij} \\ \vdots \\ b_{l_{ij}j} \end{bmatrix} \quad (n_{ij} \times p) \end{aligned}$$

$$C_{ij} = [c_{1ij} c_{2ij} \cdots c_{liij}]$$

($q \times n_{ij}$)

ここで A は m 個の異なった固有値 λ_i ($i=1, 2, \dots, m$) をもつものとし, A_i は固有値 λ_i に対する $r(i)$ 個のジョルダンブロック A_{ij} ($j=1, 2, \dots, r(i)$) の集まりを表わしている。したがって,

$$n = \sum_{i=1}^m n_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r(i)} n_{ij}$$

が成立つ。そして, B, C も A_i および A_{ij} に対応して, 上述のようにわけられ, とくに, B_{ij} の最後の行を b_{lij} , C_{ij} の第1列を c_{lij} とする。また記述を簡単にするため, $l=n_{ij}$ とおいている。

このようなジョルダン標準形のシステムに対する可制御性と可観測性に関する定理は C. T. Chen & C. A. Desoer によって次のように与えられている²⁾。

【定理 1】 [C. T. Chen & C. A. Desoer] システム S は, 各 $i=1, 2, \dots, m$ について次の $r(i)$ 個の P 次元行ベクトルが, 1次独立のとき, またそのときに限り, 可制御である。

$$b_{li1}, b_{li2}, \dots, b_{li r(i)}$$

【定理 2】 [C. T. Chen & C. A. Desoer] システム S は, 各 $i=1, 2, \dots, m$ について次の $r(i)$ 個の q 次元列ベクトルが, 1次独立のとき, またそのときに限り, 可観測である。

$$c_{1i1}, c_{1i2}, \dots, c_{1i r(i)}$$

証明は, 文献 (2) および (5) で与えられているので, ここでは省略する。

3. 直列結合系の可制御と可観測性

(1) 式のようなジョルダン標準形で表わされる 2 つのシステム,

$$S_i (i=1, 2) : \begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u \\ y = C_i x + D_i u \end{cases}$$

ただし, $u: iP$ 次元ベクトル, $x: in$ 次元ベクトル, $y: iq$ 次元ベクトル。

を考えよう。ここで, A_i は, m_i 個の相異なる固有値 λ_{ij} ($j=1, 2, \dots, m_i$) をもつとし,

$$A_1 \triangleq \{A_{1j} | j=1, 2, \dots, m_1\}$$

$$A_2 \triangleq \{A_{2j} | j=1, 2, \dots, m_2\}$$

とする。また, S_i の伝達関数行列を $G_i(S)$ とすれば,

$$G_i(S) = C_i(SI - A_i)^{-1} B_i + D_i$$

となり, $G_i(S)$ で $B_a = 0, C_a = 0$ とおいたものを,

$$G_{ia}(S) = G_i(S) |_{B_a=0, C_a=0}$$

とかく。

さて, この 2 つのシステムを結合して, Fig. 1 に示すような直列結合 S_{12} を構成すれば, その状態方程式は次のようになる。ただし, $u = {}_1u, {}_1y = {}_2u, {}_2y =$

y とする。

S_{12} :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.1)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.2)$$

$$A = \begin{bmatrix} {}_1A & 0 \\ {}_2B_1 C_1 & {}_2A \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} {}_1B \\ {}_2B_1 D \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$C = [{}_2D_1 C_2 C] \quad D = {}_2D_1 D \quad (2.4)$$

Fig. 1

定理 1 および定理 2 を用いて, S_{12} の可制御性と可観測性を調べるために, (2) 式の系を変換行列 T ($\det T \neq 0$) によってジョルダン標準形に変換する。

そのとき, A のジョルダン標準形を $\bar{A}$ とすれば,

$$TAT^{-1} = \bar{A} \quad (3.1)$$

$$TB = \bar{B} \quad (3.2)$$

$$CT^{-1} = \bar{C} \quad (3.3)$$

が成立つ。この場合, 定理 1 を用いて S_{12} の可制御性を判別するには, $\bar{B}$ のすべての行がわかる必要はない。すなわち, $\bar{A}$ の各ジョルダンブロックの最下行に対応する $\bar{B}$ の行ベクトルがわかればよく, したがって, T もそれに対応する行ベクトルがわかればよい。いま, $\bar{A}$ の固有値 λ_a に対するジョルダンブロックの最下行に対応する $\bar{B}$ の行ベクトルを $\bar{b}_{la}$ とし, それに対応する T の行ベクトルを t_a とすれば (3.1) および (3.2) から,

$$\bar{b}_{la} = t_a B \quad (4.1)$$

$$t_a A = \lambda_a t_a \quad (4.2)$$

が成立つ。それゆえ, (4.2) 式から t_a は, A の固有値 λ_a に対応する固有行ベクトルとなっていることがわかる。したがって定理 1 を用いて可制御性を判別するには各固有値に対して, それぞれ 1 次独立なすべての固有行ベクトルを求め, それから (4.1) 式によって $\bar{b}_{la}$ を計算し, その 1 次独立性を調べればよいことがわかる。また同様に, 定理 2 によって S_{12} の可観測性を判別するには, 固有列ベクトルを求めればよい。

さて,

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda I - {}_1A & 0 \\ -{}_2B_1 C & \lambda I - {}_2A \end{vmatrix} = |\lambda I - {}_1A| |\lambda I - {}_2A|$$

であるから, A の固有値は, ${}_1A, {}_2A$ の固有値と同じ

である。そこで、

- (i) ${}_1\lambda_i \in \{A_1 - (A_1 \cap A_2)\}$
- (ii) ${}_2\lambda_i \in \{A_2 - (A_1 \cap A_2)\}$
- (iii) $\lambda_i \in \{A_1 \cap A_2\}$

の 3 つの場合についてそれぞれ固有ベクトルを求めよう。

- (i) ${}_1\lambda_i \in \{A_1 - (A_1 \cap A_2)\}$ の場合

$$\text{rank}({}_1\lambda_i I - A) = {}_1n + {}_2n - r_1(i)$$

よって、固有値 ${}_1\lambda_i$ に対しては、 $r_1(i)$ 個のジョルダンブロックが存在し、1 次独立な固有ベクトルも $r_1(i)$ 個存在する。

固有行ベクトル ${}_1t_{ij}(j=1, 2, \dots, r_1(i))$ として、

$${}_1t_{ij} = \left[\begin{array}{c} \overbrace{0 \cdots 0}^{1n+{}_2n} 10 \cdots 0 \\ \sum_{k=1}^{i-1} {}_1n_k + \sum_{l=1}^j {}_1n_{il} \end{array} \right] \quad (5)$$

をとれることは、(4.2) 式からすぐわかる。

固有列ベクトル ${}_1v_{ij}(j=1, 2, \dots, r_1(i))$ として、

$${}_1v_{ij} = \left[\begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \sum_{k=1}^{i-1} {}_1n_k + \sum_{l=1}^{j-1} {}_1n_{il} \\ \left. \begin{array}{c} \cdots \\ {}_1P_{ij} \end{array} \right\} {}_2n \end{array} \right] {}_1n \quad (6)$$

を選べば ${}_1P_{ij}$ (${}_2n$ 次元ベクトル) は次のようにして決定できる。

$$\left[\begin{array}{cc} {}_1A & O \\ {}_2B_1C & {}_2A \end{array} \right] {}_1v_{ij} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ {}_1\lambda_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ {}_2B_1C_1t_{ij} + {}_2A_1P_{ij} \end{array} \right] = {}_1\lambda_i \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ {}_1P_{ij} \end{array} \right]$$

より、

$$({}_1\lambda_i I - {}_2A) {}_1P_{ij} = {}_2B_1C_1t_{ij}$$

である。 ${}_1\lambda_i$ は ${}_2A$ の固有値でないから $({}_1\lambda_i I - {}_2A)^{-1}$ が存在し、

$${}_1P_{ij} = ({}_1\lambda_i I - {}_2A)^{-1} {}_2B_1C_1t_{ij} \quad (7)$$

となる。

- (ii) ${}_2\lambda_i \in \{A_2 - (A_1 \cap A_2)\}$ の場合

$$\text{rank}({}_2\lambda_i I - A) = {}_1n + {}_2n - r_2(i)$$

(i) と同様にして、固有ベクトル ${}_2t_{ij}(j=1, 2, \dots, r_2(i))$ が、

(i) が、

$${}_2t_{ij} = \left[\begin{array}{c} {}_2P_{ij} \\ \underbrace{0 \cdots 0}_{1n} \cdots 010 \cdots 0 \end{array} \right] \quad (8)$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{i-1} {}_2n_k + \sum_{l=1}^j {}_2n_{il}}_{}$$

ただし、

$${}_2P_{ij} = {}_2b_{ilj} C({}_2\lambda_i I - {}_1A)^{-1} \quad (9)$$

とえられ、固有ベクトル ${}_2v_{ij}(i=1, \dots, r_2(i))$ が、

$${}_2v_{ij} = \left[\begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} {}_1n \\ \left. \begin{array}{c} \sum_{k=1}^{i-1} {}_2n_k + \sum_{l=1}^{j-1} {}_2n_{il} \\ \cdots \\ {}_2P_{ij} \end{array} \right\} {}_2n \end{array} \right] \quad (10)$$

をえられる。

- (iii) $\lambda_i \in \{A_1 \cap A_2\}$ の場合 ${}_1\lambda_i = {}_2\lambda_i$ とする。

${}_1A, {}_1B, {}_1C$ を次のように分解する。

$${}_1A = \text{diag}[{}_1\tilde{A}_1, {}_1\tilde{A}_2, {}_1\tilde{A}_3]$$

$${}_2A = \text{diag}[{}_2\tilde{A}_1, {}_2\tilde{A}_2, {}_2\tilde{A}_3]$$

ただし、

$${}_1\tilde{A}_2 = {}_1A_\alpha$$

$${}_2\tilde{A}_2 = {}_2A_\beta$$

$${}_iB = \left[\begin{array}{c} {}_i\tilde{B}_1 \\ {}_i\tilde{B}_2 \\ {}_i\tilde{B}_3 \end{array} \right] \quad (i=1, 2)$$

$${}_iC = [{}_i\tilde{C}_1, {}_i\tilde{C}_2, {}_i\tilde{C}_3] \quad (i=1, 2)$$

ここで、 ${}_1A_\alpha, {}_2A_\beta$ は共通の固有値に対応するブロックである。したがって、

$$\text{rank}[A - \lambda_i I] = \text{rank} \left[\begin{array}{ccccccc} {}_1\tilde{A}_1 - \lambda_i I & & & & & & \\ & {}_1H_{\alpha 1} & & 0 & & & \\ & & {}_1H_{\alpha 2} & & & & \\ & 0 & & {}_1H_{\alpha r_1(\alpha)} & & & \\ & & & & {}_1\tilde{A}_3 - \lambda_i I & & \\ & & & & & {}_2\tilde{A}_1 - \lambda_i I & \\ & & & & & & {}_2H_{\beta 1} & 0 \\ & & & & & & & {}_2H_{\beta 2} & 0 \\ & & & & & & & & {}_2H_{\beta r_2(\beta)} & 0 \\ & & & & & & & & & {}_2\tilde{A}_3 - \lambda_i I \end{array} \right]$$

ただし,

$${}_1H_{\alpha j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \ddots \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(1n_{\alpha j} \times 1n_{\alpha j})}$$

$${}_2H_{\beta j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \ddots \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(2n_{\beta j} \times 2n_{\beta j})}$$

から,

$$\text{rank}[A - \lambda_i I] = \text{rank}$$

$$\begin{bmatrix} L & 0 & & 0 \\ {}_1\tilde{A}_1 - \lambda_i I & & & \\ 0 & {}_1I & & 0 \\ & {}_1\tilde{A}_3 - \lambda_i I & & \\ \hline 0 & 0 & {}_2\tilde{A}_1 - \lambda_i I & \\ & & {}_2I & \\ & & {}_2\tilde{A}_3 - \lambda_i I & \end{bmatrix} \quad (11)$$

とすることができる。ここで ${}_1I$ および ${}_2I$ は $(1n_{\alpha} - r_1(\alpha))$ 次および $(2n_{\beta} - r_2(\beta))$ 次の単位行列であり、 L は,

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} r_1(\alpha) \\ \} r_2(\beta) \\ r_1(\alpha)r_2(\beta) \end{matrix}$$

ただし,

$$M = \begin{bmatrix} {}_2b_{l\beta 1} \\ \vdots \\ {}_2b_{l\beta r_2\beta 1} \end{bmatrix} [{}_1c_{1\alpha 1} \cdots {}_1c_{1\alpha r_1(\alpha)}] \quad (12)$$

である。ここで $r \triangleq \text{rank } M$ とおくと, (11) 式から,

$$\text{rank}[A - \lambda_i I] = 1n + 2n - r_1(\alpha) - r_2(\beta) + r$$

となる。よって $(r_1(\alpha) + r_2(\beta) - r)$ 個の 1 次独立な固有行ベクトルが存在するわけであるが, そのうち $r_1(\alpha)$ 個の 1 次独立な固有行ベクトル $t_{ij}(j=1, 2, \dots, r_1(\alpha))$ は, (i) と同様にして,

$$t_{ij} = [0 \cdots 0 1 0 \cdots 0] \quad (13)$$

$$\sum_{k=1}^{\alpha-1} 1n_k + \sum_{l=1}^j 1n_{\alpha l}$$

とすることができる。残りの固有行ベクトルを求める前にまず次の方程式を満足する解 $x(r_2(\beta) - \text{次元行ベクトル})$ を求める。

$$xM = 0 \quad (14)$$

$\text{rank } M = r$ であるから 1 次独立な解は $(r_2(\beta) - r)$ 個存在する。そして, これを,

$$\begin{cases} x_1 = [x_{11}x_{12} \cdots x_{1r_2(\beta)}] \\ \vdots \\ x_l = [x_{l1}x_{l2} \cdots x_{lr_2(\beta)}] \end{cases} \quad (15.1)$$

ただし, $l = r_2(\beta) - r$ と書けば,

$$\sum_{s=1}^{r_2(\beta)} x_{js2} b_{l\beta s1} c_{1\alpha q} = 0, \quad q=1, 2, \dots, r_1(\alpha) \quad (15.2)$$

となる。次にこの係数 x_{js} を利用して, 残りの $(r_2(\beta) - r)$ 個の 1 次独立な固有ベクトル $t^*_{ij}(j=1, 2, \dots, r_2(\beta) - r)$ を次のようにして決定する。

$$t^*_{ij} = [\underbrace{\tilde{P}_{ij1} : \tilde{P}_{ij2} : \tilde{P}_{ij3}}_{1n} : \underbrace{0 \cdots 0}_{\sum_{k=1}^{\beta-1} 2n_k} : \underbrace{0 \cdots 0}_{2n_{\beta 1}} x_{j1} : \underbrace{0 \cdots 0}_{2n_{\beta 2}} x_{j2} : \underbrace{0 \cdots 0}_{2n_{\beta r_2(\beta)}} x_{jr_2(\beta)} : \underbrace{0 \cdots 0}_{2n_{\beta}}] \quad (16)$$

とおくと (4.2) 式から次の関係が得られる。

$$\tilde{P}_{ij1} \tilde{A}_1 + \sum_{s=1}^{r_2(\beta)} x_{js2} b_{l\beta s1} \tilde{C}_1 = \lambda_i \tilde{P}_{ij1} \quad (17.1)$$

$$\tilde{P}_{ij2} \tilde{A}_2 + \sum_{s=1}^{r_2(\beta)} x_{js2} b_{l\beta s1} \tilde{C}_2 = \lambda_i \tilde{P}_{ij2} \quad (17.2)$$

$$\tilde{P}_{ij3} \tilde{A}_3 + \sum_{s=1}^{r_2(\beta)} x_{js2} b_{l\beta s1} \tilde{C}_3 = \lambda_i \tilde{P}_{ij3} \quad (17.3)$$

$\tilde{P}_{ij1}$ と $\tilde{P}_{ij3}$ は $(\lambda_i I - {}_1\tilde{A}_1)^{-1}$, $(\lambda_i I - {}_1\tilde{A}_3)^{-1}$ が存在するので,

$$\tilde{P}_{ij1} = \sum_{s=1}^{r_2(\beta)} x_{js2} b_{l\beta s1} \tilde{C}_1 (\lambda_i I - {}_1\tilde{A}_1)^{-1} \quad (18.1)$$

$$\tilde{P}_{ij3} = \sum_{s=1}^{r_2(\beta)} x_{js2} b_{l\beta s1} \tilde{C}_3 (\lambda_i I - {}_1\tilde{A}_3)^{-1} \quad (18.2)$$

となる。次に $\tilde{P}_{ij2}$ を ${}_1\tilde{A}_2 (= {}_1A_{\alpha})$ に対応させて,

$$\tilde{P}_{ij2} = [\underbrace{\tilde{P}_{ij21}}_{1n_{\alpha 1}} : \underbrace{\tilde{P}_{ij22}}_{1n_{\alpha 2}} : \cdots : \underbrace{\tilde{P}_{ij2r_1(\alpha)}}_{1n_{\alpha r_1(\alpha)}}] \quad (19)$$

とおけば, (17.2) 式から,

$$\tilde{P}_{i,j2q} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} = - \sum_{s=1}^{r_2(\beta)} x_{js2} \tilde{b}_{l\beta s1} C_{\alpha q} \quad q=1, \dots, r_1(\alpha) \quad (20.1)$$

であるから,

$$\tilde{P}_{i,j2q} = [e_{q1}e_{q2}, \dots, e_{qe}] \quad \varepsilon = {}_1n_{\alpha q} \quad (20.2)$$

とおけば,

$$[0 \ e_{q1}e_{q2}, \dots, e_{qe-1}] = - \sum_{s=1}^{r_2(\beta)} x_{js2} \tilde{b}_{l\beta s1} [{}_1c_{1\alpha q}, {}_1c_{2\alpha q}, \dots, {}_1c_{\varepsilon\alpha q}] \quad (20.3)$$

となる. この式において右辺の行ベクトルの第 1 成分 $-\sum x_{js2} \tilde{b}_{l\beta s1} c_{1\alpha q} (q=1, 2, \dots, r_1(\alpha))$ が 0 になることは (15.2) 式により保証されている. また e_{qe} の値は任意でよいので, ここでは簡単のため 0 と決める.

$$\left. \begin{aligned} e_{qh} &= - \sum_{s=1}^{r_2(\beta)} x_{js2} \tilde{b}_{l\beta s1} c_{(h+1)\alpha q} & h=1, 2, \dots, {}_1n_{\alpha q}-1 \\ & & q=1, 2, \dots, r_1(\alpha) \\ e_{q1}n_{\alpha q} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20.4)$$

(18)~(20) 式により (16) 式が完全に決定でき $(r_1(\alpha) + r_2(\beta) - r)$ 個の, 1 次独立な固有行ベクトルが決定できた.

固有列ベクトルも同様にして得られるが, ここでは省略する.

以上により, 各固有値に対応する固有ベクトルが得られたので, 次に (4.1) 式より $\bar{b}_{l\alpha}$ を求める.

(i) ${}_1\lambda_i \in [A_1 - (A_1 \cap A_2)]$ の場合 (4.1) および (5) 式から,

$$\bar{b}_{lij} = {}_1b_{lij} \quad j=1, 2, \dots, r_1(i)$$

(ii) ${}_2\lambda_i \in [A_2 - (A_1 \cap A_2)]$ の場合 (4.1), (8) および (9) 式から,

$$\begin{aligned} \bar{b}_{lij} &= {}_2b_{lij1} C({}_2\lambda_i I - {}_1A)^{-1} {}_1B + {}_2b_{lij1} D \\ &= {}_2b_{lij} G_1({}_2\lambda_i) \end{aligned}$$

(iii) $\lambda_i \in [A_1 \cap A_2]$ の場合 (${}_1\lambda_\alpha = {}_2\lambda_\beta$ とする) (4.1), (13), (16), (18), (19), (20.2), (20.4) 式から,

$$\begin{aligned} \bar{b}_{lij} &= {}_1b_{lij} \quad j=1, 2, \dots, r_1(\alpha) \\ \bar{b}_{li(r_1(\alpha)+j)} &= \sum_{s=1}^{r_2(\beta)} x_{js2} \tilde{b}_{l\beta s1} \tilde{C}_1 [\lambda_i I - {}_1\tilde{A}_1]^{-1} {}_1\tilde{B}_1 \\ &\quad + \sum_{s=1}^{r_2(\beta)} x_{js2} \tilde{b}_{l\beta s1} \tilde{C}_3 [\lambda_i I - {}_1\tilde{A}_3]^{-1} {}_1\tilde{B}_3 + \sum_{s=1}^{r_2(\beta)} x_{js2} \tilde{b}_{l\beta s1} D \\ &\quad - \sum_{q=1}^{r_1(\alpha)} \sum_{h=1}^{n_{\alpha q}-1} \left(\sum_{s=1}^{r_2(\beta)} x_{js2} \tilde{b}_{l\beta s1} c_{(h+1)\alpha q} \right) {}_1b_{haq} \\ &= {}_2b_j G_{1\alpha}({}_2\lambda_\beta) - \sum_{q=1}^{r_1(\alpha)} \sum_{h=1}^{n_{\alpha q}-1} ({}_2b_{j1} c_{(h+1)\alpha q}) {}_1b_{haq} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ただし, } {}_2b_j &\triangleq \sum_{s=1}^{r_2(\beta)} x_{js2} \tilde{b}_{l\beta s} \\ j &= 1, 2, \dots, r_2(\beta) - r \end{aligned}$$

これですべての固有に対する $\bar{b}_{li}$ が求まったわけであるが, S_{12} が可制御になるためには, それぞれ S_1, S_2 が可制御である必要があることがわかる. よって S_{12} の可制御性に関する定理が得られる.

【定理 3】 システム S_{12} は, S_1, S_2 が可制御であれば, 次に掲げるベクトルが 1 次独立なとき, またそのときに限り可制御である.

(i) 各 ${}_2\lambda_i \in [A_2 - (A_1 \cap A_2)]$ に対して,

$${}_2b_{li1} G_1({}_2\lambda_i), {}_2b_{li2} G_1({}_2\lambda_i), \dots, {}_2b_{li r_2(i)} G_1({}_2\lambda_i)$$

(ii) 各 $\lambda_i \in [A_1 \cap A_2]$ に対して (その 1 組を ${}_1\lambda_\alpha = {}_2\lambda_\beta$ とおく)

$$\begin{aligned} \{&{}_1b_{li\alpha 1}, \dots, {}_1b_{li\alpha r_1(\alpha)}\} \text{ と} \\ \{&{}_2b_j G_{1\alpha}({}_2\lambda_\beta) - \sum_{q=1}^{r_1(\alpha)} \sum_{h=1}^{n_{\alpha q}-1} ({}_2b_{j1} c_{(h+1)\alpha q}) {}_1b_{haq} | j=1, 2, \dots, r_2(\beta) - r\} \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_j &\triangleq \sum_{s=1}^{r_2(\beta)} x_{js2} \mathbf{b}_{l\beta s}, \quad r = \text{rank } \mathbf{M} \\ \mathbf{x}_j &= [x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jr_2(\beta)}] \\ \mathbf{x}_j \text{ は } \mathbf{x}\mathbf{M} &= \mathbf{0} \text{ を満足する一時独立な解,} \\ \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} {}_2\mathbf{b}_{l\beta 1} \\ \vdots \\ {}_2\mathbf{b}_{l\beta r_2(\beta)} \end{bmatrix} [{}_1\mathbf{c}_{1\alpha 1}, \dots, {}_1\mathbf{c}_{1\alpha r_1(\alpha)}] \end{aligned}$$

(注) $\text{rank } \mathbf{M} = r = r_2(\beta)$ のとき定理 3 の (ii) の項は必要なくなる。そして $r_2(\beta) = 1$ のときは、 $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$ であれば $\text{rank } \mathbf{M} = r_2(\beta)$ となるので、十分である。これが S.P. Panda が文献 (4) で与えた定理 3.2 b に対応している。

可観測に関する定理も同様に得られる。

【定理 4】 システム S_{12} は、 S_1, S_2 が可観測であれば、次に掲げるベクトルが 1 次独立なとき、またそのときに限り可観測である。

(i) 各 ${}_1\lambda_i \in [A_1 - (A_1 \cap A_2)]$ に対して、

$$G_2({}_1\lambda_i) {}_1\mathbf{c}_{1i1}, G_2({}_1\lambda_i) {}_1\mathbf{c}_{1i2}, \dots, G_2({}_1\lambda_i) {}_1\mathbf{c}_{1ir_1(i)}$$

(ii) 各 $\lambda_i \in [A_1 \cap A_2]$ に対して (${}_1\lambda_\alpha = {}_2\lambda_\beta$ とする)。

$$\begin{aligned} &\{ {}_2\mathbf{c}_{1\beta 1}, {}_2\mathbf{c}_{1\beta 2}, \dots, {}_2\mathbf{c}_{1\beta r_2(\beta)} \} \\ &\left\{ G_{2\beta}({}_1\lambda_i) \mathbf{C}_j - \sum_{\delta=1}^{r_2(\beta)} \sum_{\varepsilon=1}^{2n_{\beta\delta}-1} ({}_2\mathbf{b}_{\varepsilon\beta\delta} \mathbf{C}_j) {}_2\mathbf{c}_{(\varepsilon+1)\beta\delta} | j=1, 2, \dots, r_1(\alpha) - r \right\} \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } \mathbf{C}_j \triangleq \sum_{s=1}^{r_1(\alpha)} y_{js1} \mathbf{C}_{1\alpha s}$$

$$\mathbf{y}_j = [y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jr_1(\alpha)}]^T$$

$\mathbf{y}_j$ は $\mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ を満足する 1 次独立な解。

4. 例 題

ここで Panda が与えた定理によっては判別できない例について考えよう。

$$\begin{aligned} {}_1\mathbf{A} = {}_2\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & {}_1\mathbf{B} = {}_2\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} {}_1\mathbf{b}_{1\alpha 1}, {}_2\mathbf{b}_{1\beta 1} \\ {}_1\mathbf{b}_{2\alpha 1}, {}_2\mathbf{b}_{2\beta 1} \\ {}_1\mathbf{b}_{1\alpha 2}, {}_2\mathbf{b}_{1\beta 2} \\ {}_1\mathbf{b}_{2\alpha 2}, {}_2\mathbf{b}_{2\beta 2} \end{matrix} \\ {}_1\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & {}_1\mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & r_1(\alpha) = r_2(\beta) = 2 \\ & {}_1\mathbf{C}_{1\alpha 1}, {}_1\mathbf{C}_{2\alpha 1}, {}_1\mathbf{C}_{1\alpha 2}, {}_1\mathbf{C}_{2\alpha 2} \end{aligned}$$

で与えられる S_1, S_2 の直列結合系 S_{12} を考える。 S_1, S_2 はそれぞれ可制御である。

$$G_{1\alpha}(s) = {}_1\mathbf{D}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank } \mathbf{M} = 1$$

ゆえに、 $\mathbf{x}\mathbf{M} = \mathbf{0}$ を満足する 1 次独立な解はただ 1 つのみ存在する。 $\mathbf{x} = [0, 1]$ とすれば、

$$\begin{aligned} x_{11} &= 0, x_{12} = 1 & \mathbf{b}_1 &= \sum_{s=1}^{r_2(\beta)} x_{1s2} \mathbf{b}_{1\beta s} = {}_2\mathbf{b}_{1\beta 2} = [010] \\ & \left\{ \mathbf{b}_j G_{1\alpha}({}_2\lambda_\beta) - \sum_{q=1}^{r_1(\alpha)} \sum_{h=1}^{1n_{\alpha q}-1} (\mathbf{b}_{j1} \mathbf{c}_{(h+1)\alpha q}) {}_1\mathbf{b}_{h\alpha q} | j=1, \dots, \underbrace{r_2(\beta)-r}_1 \right\} \\ & = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - [0 \quad 1 \quad 0] = \mathbf{0} \end{aligned}$$

となり、定理 3 において (ii) で与えたベクトルが 1 次独立でなくなる。よって S_{12} は可制御ではない。

同じ問題で、 ${}_1\mathbf{b}_{1\alpha} = [0 \ 0 \ 1]$ とすれば可制御になることも同様にすぐわかる。

実際 $\text{rank}[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{s-1}\mathbf{B}]$ を求めてみれば判別できるが、この計算はかなりやっかいである。

5. 結 言

以上, ジョルダン標準形でかかれた 2 つのシステムを直列結合した場合の, 可制御, 可観測に関する必要十分条件をえた. この定理は, 一般の場合に対する必要十分条件であるので, システム論にとって基本的に重要な定理である.

参 考 文 献

- 1) E. G. Gilbert : Controllability and Observability in Multivariable control Systems, JSIAM Control Vol 1, 128/151 (1963)
- 2) C. T. Chen & C. A. Desoer : Controllability and Observability of Composite Systems, IEEE Trans, Automatic Control, **AC-12** (4), 402/409 (1967)
- 3) S. P. panda, C. T. Chen & C. A. Desoer : Comments on Controllability and Observability of Composite Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-15**, 280/281 (1970-April)
- 4) S. P. Panda : Controllability of Discrete Composite Systems, Automatica Vol 6, 309/313 (1970)
- 5) C. T. Chen & C. A. Desoer : A Proof of Controllability of Jordan Form State Equations, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-13**, 195/196 (1968)