モンテカルロ積分を利用した多峰性関数の各峰分離

—多峰性極値探索問題の一解法—

沖 野 教 郎・佐々木 泰 生

北海道大学工学部 札幌市北区北 13 条西 8 丁目

(昭和 47 年 1 月 26 日 受付)

A Method for Separating Every Peak from Multimodal

Function Using Monte Carlo Integration

—An Approach to Extremum Seeking Method for

Multimodal Problems—

Norio OKINO and Yasuo SASAKI

(Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo)

(Received January 26, 1972)

Considering the progress in the maximum seeking method for multi-dimensional non-linear programming, recently the studies on the unimodal problem have developed rapidly and steadily to yield results. The multimodal problem, however, has remained unsolved in spite of its importance in the industry.

In this paper, a new method is proposed to contribute to solving the latter problem.

A noticeable feature of this method is to separate every peak which has a meaningful extremum from the wide n -dimensional surface using Monte Carlo integration skillfully. After the trial search is repeated a set number of times around the search points which are given by random arrangement, the several points whose values of the function are relatively high are selected and the spreading area (defined specially) of the peak is calculated. Whether to register it as an independent peak separated or not is decided on the basis of the position and the spreading area of every peak.

In this procedure, the criterion for the separation is given theoretically and also the necessary number of trials can be estimated by the theory which incorporates a statistical contemplation. In addition to theoretical consideration, a few experiments on the three kinds of test functions are made to confirm the performance separating the independent peaks. Experimental values agreed well with the theoretical results.

This method has such merits as being applicable to all functions without restriction, even discontinuous and to multi- n -dimensional problems even if n is considerably large. These are merits of the random method in general, and of course, this method has a weak point, in that the accuracy of results can not be given by anything except statistical values.

In order to reach a maximum point on the multimodal surface, the techniques in case of unimodal problems can be used after some independent peaks have been separated by this method.

1. 緒 言

極値探索法は非線形最適問題の有力な解法として広

く活用されており、かずかずの手法が開発されている。しかし、それらのほとんどすべてが単峰性を仮定しており、多峰性関数には適用できない。いっぽう、最適設計、最適制御、OR をはじめ、図形処理にいたるま

† 第 10 回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭 46・8)

で、最近あらゆる分野に存在するようになった最適問題の中には単峰性を仮定できない場合が決して少なくない。現在、そのような多峰性最適問題に適用できる方法としては、わずかに、Brooks のランダム法¹⁾や、Hill のタブレーション法²⁾およびそれらに類似の方法などがあるにはあるが、効率が悪く、あまり実用されていない。むしろ、試行の始点を数個所として、同一の極値に到達するかどうかを確かめる方法のような気やすめに近いと思われる方法が行なわれているのが現状である。

本研究はこのような多峰性関数の極値探索問題に有効な一解法を与えることを目的とする。

多峰性関数の探索手順として、つぎの (1), (2) が容易に考えられる。

(1) 多峰をまず各単峰に分離する。

(2) 分離された各峰ごとに、単峰性の仮定が成り立つので、従来の方法で極値を得る。本研究は上記 (1) の各峰分離に関する方法を提案するもので、モンテカルロ積分から導かれる各峰の広がり近似値を用いた分離基準を与えるとともに、これを活用する実際のアルゴリズムを示す。

2. 探索空間の定義

被探索多峰性関数の一般形として、

$$Y=f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \quad (1)$$

を考える (以後 $Y=f(\mathbf{X})$ と略記して使用する)。 $f(\mathbf{X})$ は多峰 $p_1, p_2, \dots$ をもち、 $p_j (j=1, 2, \dots)$ はそれぞれ極大 (小) 点 $\mathbf{X}_j$ において極値 $y_j (j=1, 2, \dots)$ をもち、そのうち $\mathbf{X}_m$ で最大値 y_m を与えるものとする。

つぎに探索の範囲が、

$$x_{ia} \leq x_i \leq x_{ib} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

と与えられたとする。ここで、

$$x_i' = (x_i - x_{ia}) / (x_{ib} - x_{ia}) \quad (2)$$

とおき、改めて $x_i' = x_i$ とすれば、

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

本論文では、(2), (3) 式によって標準化された変数 $x_i (i=1 \sim n)$ と、関数 Y を加えた $n+1$ 次元の空間を探索空間とし、この空間を S と呼ぶことにする。空間 S のうち変数 $x_i (i=1 \sim n)$ のはる n 次元空間を探索面とよび S_Y と名づける。 S_Y は S の中で、1 辺の長さ 1 の超正方形で区切られた超平面となり、その超面積は 1 である。なお、最大または極大点の探索と最小または極小点の探索は本質的に同じであるから、以下の論議では最大、極大問題に限る。

3. 独立峰の定義

空間 S 内で、

$$Y=Y_0 \quad (\text{ただし } Y_0 < y_m) \quad (4)$$

として与えられる超平面 S_0 を考える。 S 内の多峰性関数 $f(\mathbf{X})$ を S_0 で切断すれば、Fig. 1 に示すよう

Fig. 1 Section in $Y=Y_0$

に、その切断面は一般にいくつかの閉領域に分れる。このような独立した閉領域上に立つ峰を S_0 面での独立峰とよび、その閉領域 $a_1, a_2, \dots$ を S_0 上での独立峰領域と名づける。

独立峰は必ずしも単峰であるとは限らない。ただ、独立峰領域の面積が小さくなるほど、その独立峰が単峰である確率は大きくなる。また一般に探索問題においては最大値 y_m や極大値 y_j そのものよりも、それらを与える S_Y 面の座標点 $\mathbf{X}_m, \mathbf{X}_j$ を求めることがより重要である。この場合、狭い独立峰領域の上に立つ独立峰が、たとえ単峰でなく、さらに近接する極大値を最大値と誤ったとしても、 $\mathbf{X}_m, \mathbf{X}_j$ には大きな差はない。したがって狭い独立峰領域の上に立つ独立峰を分離することをもって、緒言中の (1) で述べた単峰分離に代えることとする。

4. 独立峰領域の代表点と広がり

独立峰領域はその位置、大きさおよび形によって表現できるが、これらを一般の場合について正確に求めることは困難である。そこで、その領域に属する適当な点を代表点と定め、そのまわりの広がりを近似的に与える量によって独立峰領域を表現することとする。

独立峰領域の代表点 独立峰領域に含まれる探索試行点のうち、最大の Y を与える点をその領域の代表点とし、 p_j とよぶ。 p_j は代表点であると同時に独立峰の名前にも使う。

代表点 p_j の座標成分を $\mathbf{X}_{pj}$ とし、 $Y_{pj}=f(\mathbf{X}_{pj})$ (以下には $Y_{pj}=f(p_j)$ と書くこともある) を通る超

Fig. 2 Representative point and extent of independent peak

平面 $Y=Y_{p_j}$ によって独立峰 p_j を改めて切断すれば、代表点 p_j は Fig. 2 のように新たな独立峰領域の境界上に存在する。代表点 p_j を境界にもつような独立峰領域を改めて a_j とよび、その超面積をも a_j で示す。

独立峰領域の広がり 上記超平面上で代表点 p_j のまわりに半径 r_j の超円を考え、この超面積を独立峰領域の実際の超面積と等しいか、またはそれに近い適当な値にとることによって、独立峰領域の大きさを近似的に与える。点 p_j を中心とする半径 r_j の超円内部を独立峰領域の広がりとして定義する。(Fig. 2)

n 次元超平面上の半径 r_j の超円の超面積 A_j を、

$$A_j = \alpha_n r_j^n \quad (5)$$

とおけば、 α_n は次式によって与えられる。

$$\left. \begin{aligned} n \text{ が偶数のとき, } \alpha_n &= \frac{(2\pi)^{n/2}}{n!!} \\ n \text{ が奇数のとき, } \alpha_n &= \frac{2(2\pi)^{(n-1)/2}}{n!!} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで、 $n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 3 \cdot 1 & [n: \text{奇数}] \\ n(n-2)(n-4)\cdots 4 \cdot 2 & [n: \text{偶数}] \end{cases}$

独立峰領域の超面積 a_j と独立峰領域の広がり a_j の面積 A_j との間につきの関係を設定する。

$$A_j = \beta a_j \quad (7)$$

ここで β は広がり係数で、 $\beta=1$ にとれば A_j を a_j に等しく設定したことになるが、必要に応じて領域の広がり a_j を人為的に調整できる余裕を β によってもたせる。

(5)~(7) 式から、

$$r_j = \left(\frac{\beta}{\alpha_n} a_j \right)^{1/n} \quad (8)$$

独立峰 p_j はその位置 X_j と広がり r_j によって定まるので、 $p_j(X_j, r_j)$ と書くこともある。

5. 独立峰の分離基準

いま、 $f(p_a) \geq f(p_b)$ なる 2 個の代表点 p_a, p_b を考える。 p_a, p_b は S 内の点であるが、これを S_Y に投影し、 S_Y 上での 2 点間の距離を L_{ab} とする。 p_a, p_b の

座標を $p_a(x_{ia}), p_b(x_{ib})$, ($i=1 \sim n$) とすれば L_{ab} は次式で与えられる。

$$L_{a,b} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{ia} - x_{ib})^2} \quad (9)$$

つぎに、 p_a, p_b がそれぞれ別個の独立峰の代表点であるための必要十分条件として次式を与える。この式の意味するところは Fig. 3 によって明らかである。

Fig. 3 Extents of every peaks and distance

$$L_{a,b} > r_a + r_b \quad (10)$$

(10) 式の成立を確かめることによって、 p_a, p_b を別個の独立峰として分離することができる。 p_a, p_b について (10) 式が成立しないときは、 p_a, p_b を含む領域は 1 つであり、その代表点は p_a である。

6. モンテカルロ積分による広がり半径 r_j の決定

空間 S_Y 内で確率的に一樣分布する k 個の探索点を適当な乱数によって発生させるものとする。この k 個の探索点のうち、 S_0 面の独立峰領域 a_j ($j=1, 2, \dots$) の S_Y 面への正投影領域に含まれる点の数を q 個とする。含まれるかどうかは各探索点について Y の値を計算し、 $Y_1 \sim Y_k$ と Y_0 の値を比較すれば容易に知られる。すなわち $Y_i \geq Y_0$ なる Y_i を与える探索点は a_j に含まれる。このとき k が十分大きければ、

$$\sum a_j = q/k \quad (11)$$

すなわち、独立峰領域の超面積の総和はモンテカルロ積分によって知ることができる。これより 1 個の独立峰領域 a_j については、

$$a_j \leq q/k \quad (12)$$

が成り立つ。もし、 k 回の試行後、 Y の最大値を与える点が p_j であれば、 $Y=Y_{p_j}$ 面の p_j を代表点とする独立峰領域 a_j には、探索点としては p_j 以外含まれないから、その面積は、

$$a_j = 1/k \quad (13)$$

つぎに、(8), (12) 式から、

$$r_j \leq \left(\frac{\beta}{\alpha_n} \frac{q}{k} \right)^{1/n} \quad (14)$$

そして、 r_j が探索点のうち最大の Y を与える点を代表点とする領域の広がりであれば、

$$r_j = \left(-\frac{\beta}{\alpha^n} \cdot \frac{1}{k} \right)^{1/n} \quad (15)$$

7. 独立峰分離のアルゴリズム I

(1) 空間 S_Y 内で確率的に一樣分布する座標点 X_k を乱数によって設定し, $k=1$ から順に探索点とする.

(2) 最初の探索点 X_1 によって独立峰 $p_1(X_1, r_1)$ および $Y_1 = f(X_1)$ を計算する. r_1 は (15) 式において $k=1$ として得られる.

(3) 独立峰 $p_j(X_j, r_j)$ および各独立峰代表点の Y の値の最大値 $\max f(X_j)$ の登録場所を確保する.

(4) 上記登録場所に独立峰として $p_1(X_1, r_1)$, 最大値として Y_1 を格納する.

(5) X_k について, $Y_k = f(X_k)$ を計算, 次式の成立の可否を調べる.

$$f(X_k) \geq \max f(X_j) \quad (16)$$

$k=2$ より順次上式を調べ, $k=k'$ において成立したとする. このとき $\max f(X_j)$ に改めて $f(X_{k'})$ を登録, 仮りの新しい独立峰として, $p_2(X_{k'}, r_{k'})$ を登録する. ここで仮りのとした理由は分離基準による検討がなされていないので, 単に独立峰候補にすぎないからである.

(6) (9) 式によって $L_{1,k'}$ を求め, $L_{1,k'} > r_1 + r_{k'}$ が成立するかどうかを調べる. 成立すれば, p_2 は新しい独立峰として確定する. 成立しなければ p_1 の代表点を $X_{k'}$ に移し, 広がりも $r_{k'}$ とする. これは技術的には p_1 を登録から消去し, 新たに p_2 を p_1 にすればよい.

(7) 以下同様に探索回数を増し, (10) 式の成立によって, すでに得られている j 個の独立峰に $j+1$ 番目を加え,

$$L_{j,k} > r_j + r_k \quad (17)$$

が j のすべてについて成立する場合, 新しく $j+1$ 番目の独立峰を確定し, 成立しない場合はその j に対応する独立峰を消去する. そして改めて独立峰を高さの順に再配列して, $1, 2, \dots, J$ と番号を付す.

(8) 探索回数をさらに増やししながら, 同様の手順を繰り返す, 適当なストップルール (たとえば探索の総回数をきめておくとか, 独立峰の増加が, ある時間の間まったくなかったときストップするなど) によって探索を終了する. このとき結果として登録されている $1 \sim J$ の独立峰が分離されたことになる.

以上のアルゴリズムをコンピュータプログラムのフローチャートとして示すと Fig. 4 である.

Fig. 4 Flow-chart for algorithm I

アルゴリズム I は探索点のうち最高の Y を与える点についてのみ処理されるので, 多くの峰のうち抜き出した最高峰のみを分離する場合効果的であるが, ある程度低い峰も分離したい場合には適していない. 次節のアルゴリズム II は後者の場合に効果的に適用できる. 特に最高峰と同程度の高さの峰が多くある場合, その大部分を分離できる.

8. 独立峰分離のアルゴリズム II

(1) アルゴリズム I と同様に乱数によって X_k を設定し, $k=1$ から順に探索点とする.

(2) X_j および $f(X_j)$ を格納するリストをそれぞれ J 個用意する.

(3) 最初に $k=1$ から J までの探索点について,

その座標と関数値を、上記リストに格納するが、大きさの順に配列し、改めて $X_1 \sim X_J$ の添字 j を与える。

$$f(X_1) \geq f(X_2) \geq \dots \geq f(X_J) \quad (18)$$

(4) $k=J+1$ からの探索点については $f(X_k) \geq f(X_J)$ が成立したときのみ (18) 式を満たすようにリストに格納する。もちろん第 J 番目のリストの値はこれによってはみ出し、消去される。

(5) この過程を繰り返し、適当なストップルールによって探索を終了する。このとき全探索点中 Y の最大値を与えるものから第 J 番目まで大きさの順にリストアップされている。

(6) リスト中の座標点を仮りの独立峰の代表点とみなし、その広がりを (14) 式から $r_j = \{(\beta/\alpha_n)(j/k)\}^{1/n}$ として求める。

(7) X_j の $j=1 \sim J$ のすべてについて (10) 式によって、独立峰に分離できるかどうかを調べる。分離できないときは j の値が大きい方を消去する。この操作の結果残った点分離された独立峰の代表点として確定する。

Fig. 5 Flow-chart for algorithm-II

以上のアルゴリズムを Fig. 5 のようにまとめておく。

9. 分解能と探索回数

代表点間の距離が d であり、同程度の広がりをもった 2 つの独立峰 $p_a(X_a, r_a)$, $p_b(X_b, r_b)$ を分離するのに必要な最小探索回数について考える。ここで分解能 d は単峰とみなしうる独立峰領域の広さの限界、あるいは多峰の分布密度の推定値などからきまる。

分離可能であるための必要条件は、

(1) 各独立峰の広がり内に少なくとも 1 個の探索点が存在すること。

(2) $\alpha > r_a + r_b$ が成立すること。

上記 (1) を満たすに必要な探索回数については、Brooks が random 法について考察したさい導いた結果を利用できる¹⁾。 k 回の探索の結果、その探索点の少なくとも 1 個が超面積 A の領域内にはいる確率 r は $r = 1 - (1 - A)^k$ として与えられている。したがって信頼度 r で超面積 A の領域内に探索点のはいるための探索回数 k は、

$$k \geq \log(1-r)/\log(1-A) \quad (19)$$

A の概略値として $r_a \div r_b \div d/2$ の場合を考えると、

$$k \geq \log(1-r)/\log[1 - (\alpha_n/\beta)(d/2)^n] \quad (20)$$

(2) の条件を満たす探索回数は探索のアルゴリズムに依存する。

アルゴリズム I の場合、(15) 式によって広がりをきめることができるので、 r_a, r_b が $d/2$ 程度にまで小さくなるための探索回数が少なくとも必要で、

$$k \geq (\beta/\alpha_n)(2/d)^n \equiv k_0 \quad (21)$$

アルゴリズム II の場合、リストの第 J 番目と第 $J-1$ 番目に p_a, p_b があつた場合でも分離されねばならないことから、

$$d > \left(\frac{\beta}{\alpha_n} \frac{J}{k}\right)^{1/n} + \left(\frac{\beta}{\alpha_n} \frac{J-1}{k}\right)^{1/n}$$

$$\therefore k \geq \frac{\beta}{\alpha_n} \frac{1}{d^n} \{J^{1/n} + (J-1)^{1/n}\}^n \quad (22)$$

J は普通かなり大きな数にとられるので $J-1 \div J$ とおき、

$$k \geq (\beta/\alpha_n)(2/d)^n J \equiv Jk_0 \quad (23)$$

(20) 式から得られる必要回数 k は信頼度 r として普通 0.8 以上がとられることを考えると、(20), (23) 式から得られる k に比して小さく、最小必要探索回数としては (21), (23) を目安とすればよい。(23) 式は (21) 式の J 倍であることから、(21) 式で与えられる k_0 が、探索回数の基準になる。これがどの程度の値になるかを示すために $d=0.5$ (区間 1 を 2 等分して、その中央に代表点を置いた場合)、 β を 1 として計算

すると **Table 1** のようになる。

Table 1 Basic number of trials required (eq. (21): $d=0.5$, $\beta=1$)

dimension n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
number of peaks	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
basic number of trials k_0	2	6	16	52	195	794	3 473	16 166	79 333	410 785

ただし、 k_0 は十分な探索回数ではなく、むしろ、これ以下の探索回数では無意味であることを示す基準である。

アルゴリズム I では k_0 によって分離可能な広がりまで縮小されるが、この回数で、それぞれの峰に代表点が得られているとは限らない。なぜなら、この方法では探索の間、それまでの Y の最大値を与えるものに対してのみ分離の手続がなされるので、峰 p_a, p_b にそのような点がとられなければならない。そのために必要な探索回数は峰の形にも関係するので簡単には論じられない。ここでは紙面の余裕もないので、少なくとも k_0 の数倍の探索が必要であることを記すにとどめる。

アルゴリズム II では上記のような問題はないので、(23) 式で与えられる Jk_0 に近い回数ではほぼ分離できるはずである。ここで J の値をどの程度にとるべきかを考える。この問題を厳密に解くことは困難なので、目安を与える意味で、同じ高さと同じ広がりをもった N 個の独立峰が探索空間内に一様に分布している場合を計算する。まず、 J 個のリストを用意したとき ($J > N$)、 N 個の独立峰全部が分離される確率 Z_N を求める。これは N 個の箱に J 個のボールを投げ、ボールは箱のどれかにはいり、そのうちの 1 個にはいる確率は等しいとしたとき、 N 個の箱すべてに少なくとも 1 個のボールがはいる確率に相当し、次式で与えられる³⁾。

$$Z_N = \sum_{\nu=0}^N (-1)^\nu \binom{N}{\nu} \left(1 - \frac{\nu}{N}\right)^J \quad (24)$$

必要な信頼度を Z_N として与えると、この式によって J を数値的に計算することができるので (23) 式によって探索回数を求めることができる。**Table 2** は分解能 0.5、信頼度 90% のときの必要探索回数である。

Table 2 Number of trials required (eq. (23), (24): $d=0.5$, $\beta=1$, $Z=0.9$)

dimension n	1	2	3	4	5	6
number of peaks N	2	4	8	16	32	64
list J	5	13	33	79	181	385
number of trials k	10	78	429	4 108	35 295	305 690

以上の計算は分解能として絶対距離をとったので次元数が多くなると峰の数も増し、必要探索回数も増加する。いっぽう、次元数にかかわらず、峰の数を一定としたときの探索回数を考える。

いま、峰の数 N を十分大きくとり、これを空間中に一様に分布させる。そのときの各峰間の距離 d は $d=1/N^{1/n}$ で与えられるから、(21) 式に代入すれば、

$$k_0 = 2^n (\beta/\alpha_n) N \quad (25)$$

これより、探索空間の次元の増加にともなう探索回数の増加率を計算すると **Table 3** である。

Table 3 Increasing factor in trials with increment of dimension ($\beta=1$)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k_0/N	1	1.3	1.9	3.2	6.1	12.4	27.2	63.2	155.0	401.0

すなわち、この方法は多次元の問題に対してもかなりの適用能力があることを示している。

10 実 験

前章の理論で導かれた探索回数で、実際に独立峰が分離できるかどうかを検討するために、あらかじめ形のわかった多峰関数をモデルとして用い実験した。

つぎの 3 種のモデルを用いた。

モデル 1 (Fig. 6)

$$Y = \sum_{i=1}^n ax_i + b$$

	a	b
$-0.5 \leq x_i \leq -0.25$	2	1
$-0.25 \leq x_i \leq 0$	-2	0
$0 \leq x_i \leq 0.25$	4	0
$0.25 \leq x_i \leq 0.5$	-4	2

Fig. 6 One dimensional figure of model 1

モデル 2 (Fig. 7)

$$Y = \sum_{i=1}^n ax_i + b$$

	a	b
$-0.5 \leq x_i \leq -0.25$	4	2
$-0.25 \leq x_i \leq 0$	-4	0
$0 \leq x_i \leq 0.25$	4	0
$0.25 \leq x_i \leq 0.5$	-4	2

Fig. 7 One dimensional figure of model 2

モデル 3 (Fig. 8)

$$Y = -\sum_{i=1}^n (-1)^{e_i} \cos(2\pi e_i x_i) \quad (-0.5 \leq x_i \leq 0.5)$$

e_i は各変数の探索範囲内での峰の数である。

以上のモデルを利用してつぎの実験を行なった。な

Table 4 Separation of the maximum peak

dimension n	number of trials ($10k_0$)	peaks separated											
		maximum peak				second peak				third peak			
		F	S	T	N	F	S	T	N	F	S	T	N
2	60	1	1	1	(1)	2	1	1	(2)	0	0	1	(1)
3	160	1	1	1	(1)	1	2	1	(3)	1	0	0	(3)
4	520	0	1	1	(1)	1	2	2	(4)	0	1	1	(6)
5	1950	1	1	1	(1)	3	0	2	(5)	0	2	1	(10)

F: First trial, S: Second trial, T: Third trial, N: true number of peaks

Table 5 Separation of peaks of same height

dim. n	number of peaks N	algorithm I			algorithm II	
		number of trials for once	peaks separated		number of trials	peaks separated
			1st time	total (10 times)		
2	4	60	3	4	78	4
3	8	160	4	8	429	8
4	16	520	4	15	4108	16
5	32	1950	6	28	35295	31

Table 6 Separation performance of algorithm II ($d=0.2$)

number of peaks N		5	10	15	20	25	30
number of list J		18	44	73	103	135	168
number of trials	$n=2$	558	1386	2309	3264	4282	7679
	$n=3$	4178	10385	17309	24471	32110	39989
	$n=4$	35453	88146	146914	207708	272554	339426
	$n=5$	332353	826358	1377310	1947249	2555181	3182108
number of peaks separated by experiment	$n=2$	5	10	15	19	25	30
	$n=3$	5	10	15	20	25	30
	$n=4$	5	10	15	20	25	30
	$n=5$	5	10	14	20	25	30

Fig. 8 One dimensional figure of model 3 in case of $e_1=2$

お、乱数は合同法により発生、使用範囲内の特性について十分な検定を行なっている。

【実験 1】 アルゴリズム I によってモデル 1 を探索

した場合の一例、結果を Table 4 に示す。モデル 1 は 1 個の最高峰と複数個の高さの等しい第 2 峰以下がある。10 k_0 の探索を 3 回繰り返して、それぞれ何個分離できるかを調べた。表で明らかのように最高峰を含む独立峰はほとんど分離されている。

【実験 2】 アルゴリズム I によってモデル 2 を 10 k_0 の探索回数を 1 単位として 10 単位繰返した場合、およびアルゴリズム II によって Table 2 の理論探索回数だけ探索した場合、結果は Table 5 参照。

【実験 3】 モデル 3 によってアルゴリズム II の分離性能を検討。モデル 3 は e_i の調節によって峰の数や間隔を適当にとることが可能である。Table 6 に一例を示すように、同一高さの峰は理論探索回数でほとんど

分離できる。

なお、計算時間はアルゴリズムⅠをモデル2に適用したとき探索回数 10^3 回当たり平均約 0.5 秒、アルゴリズムⅡはモデル2に対して 10^3 回当たり平均約 0.9 秒、モデル3に対して平均1秒であった。いずれも北大大形計算センタ (FACOM 230-60) 使用である。この点からも実用性は十分であると考ええる。

11. 結 言

- (1) 多峰性関数から、各独立峰を分離するための方法原理を提案し、分離基準を与えた。
- (2) 分離基準に従った実際的な分離法に関するアルゴリズムを二例示した。
- (3) 各アルゴリズムに対して、目安になる理論探

索回数を導いた。

- (4) 理論を実験的に検証するために、3種のモデルについて分離実験を行ない、この方法の分離能力と実用性を実証した。

最後に本研究は筆者の研究室の久保 洋助手ならびに研究室各員の多大の協力のもとに遂行されたことを記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) S. H. Brooks: Operations Research 6-2, p. 244 (1958)
- 2) J. D. Hill: IEEE Trans. SSC-5-1, p. 2 (1969)
- 3) W. フェラー (河田訳): 確率論とその応用, 紀伊国屋書店