ベイズ形パターン認識に関する情報論的考察†

片 井 修・岩 井 壮 介

京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

(昭和 47 年 4 月 7 日 受付)

An Information Theoretic Consideration for Bayesian Pattern Recognition

Osamu KATAI and Sousuke IWAI

(Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto)

(Received April 7, 1972)

This paper discusses an information theoretic approach for Bayesian dichotomization of patterns.

In the first section, we introduce a new measure which is closely related to the recognition rate of Bayesian pattern recognizer and is easy for practical use. This measure is defined as the correlation between the teacher's response and Bayesian discriminant function.

Further, it is shown that the measure is composed of three non-negative parts well known in information theory and statistics. These parts are analyzed in connection with Bayesian pattern recognition.

In the second section, the relation between the recognition rate and the measure is discussed by the aid of central limit theorem. This relation assures the usefulness of the measure in the synthesis of pattern recognizer and the quantization of patterns.

Experimental computer simulation ascertains the above discussions and results.

1. 緒 言

ベイズ形パターン認識機構の構造は、入力として加えられるパターン空間の確率構造によって一義的に決定され、ベイズ決定の意味において最適の形を有する。したがって識別機構の性能、すなわち正解率ないし誤り確率は識別しようとするパターン集合間の確率構造的な分離の度合、パターン空間座標系の選び方などによって大きく影響される。正解率の把握は、正解率そのものの解析的表現のむずかしさ、確率構造をこの目的に対して定量的に表わす尺度として十分なものが見当たらないなどの理由によって十分には行なわれていない。パターンクラスの族 $\mathcal{R} = \{R, \bar{R}\}$ に属するパターンクラスがそれぞれ条件確率 $P(\mathbf{X}|R), P(\mathbf{X}|\bar{R})$ で規定されているとき、両パターンクラスの分離度を表

わす尺度として、

Bhattacharyya distance $B = -\ln$

$$\int \sqrt{P(\mathbf{X}|R) \cdot P(\mathbf{X}|\bar{R})} d\mathbf{X} \quad (1)$$

$$\text{divergence } J = \int \{P(\mathbf{X}|R) - P(\mathbf{X}|\bar{R})\} \ln \frac{P(\mathbf{X}|R)}{P(\mathbf{X}|\bar{R})} d\mathbf{X} \quad (2)$$

などが^{1)~4)}、また特徴ベクトル要素選定の良否に関しては、各ベクトル要素を通信路と見なすことにより、その情報伝達の有効さを示す尺度として知られているシャノンの相互情報量を用いることができるが⁵⁾、これらの尺度はそれぞれ、確率構造のある一面を反映するものであって、正解率、誤り確率といったものと直接結びつくものではない^{6), 7)}。

本論文はベイズ形パターン認識機構において、パターンベクトル要素数が非常に多く、かつ要素間に独立

† 第 14 回自動制御連合講演会で発表 (昭 46-11)

性が成り立つとの仮定のもとに、中心極限定理の適用から正解率を導出し、これと対象とするパターン集合の有する総合的な識別の尺度として新しく定義した平均情報強度との関係、従来より提唱されている情報尺度、分離度との関連について考察したものである。

2. 平均情報強度の定義とその構造

n 次元パターンベクトル $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ は離散値をとり、パターンクラスの族 $\mathcal{R}=\{R, \bar{R}\}$ のいずれかの要素クラスに属するものとし、それぞれに対する確率分布 $P(\mathbf{X}|R)$, $P(\mathbf{X}|\bar{R})$, 各クラスの生起確率を $P(R)$, $P(\bar{R})$ とする。いま識別関数を $f(\mathbf{X})$ とするクラス R に対する識別システムを考える場合、入力パターン群 $\mathbf{X}$ に対する識別のための情報量の尺度として、 $f(\mathbf{X})$ の値と teacher の応答 d^* の相関をとることが考えられる。すなわち、

$$S_{\mathcal{R}}(\mathbf{X}) \equiv E[d^* \cdot f(\mathbf{X})] \quad (3)$$

$$d^* = \begin{cases} 1 & (\mathbf{X} \in R) \\ -1 & (\mathbf{X} \in \bar{R}) \end{cases} \quad (4)$$

いま識別機構をベイズ形に限定し、よく行なわれるように識別関数 $f(\mathbf{X})$ として、

$$f(\mathbf{X}) = \ln \frac{P(R|\mathbf{X})}{P(\bar{R}|\mathbf{X})} \quad (5)$$

を選ぶものとする。この場合、上記情報量の尺度 $S_{\mathcal{R}}$ は、

$$S_{\mathcal{R}}(\mathbf{X}) = P(R) E_R \left[\ln \frac{P(R|\mathbf{X})}{P(\bar{R}|\mathbf{X})} \right] + P(\bar{R}) E_{\bar{R}} \left[\ln \frac{P(\bar{R}|\mathbf{X})}{P(R|\mathbf{X})} \right] \quad (6)$$

と表わすことができる。ここに $E_R, E_{\bar{R}}$ はそれぞれ $R, \bar{R}$ から発生されたパターンについて期待値をとることを意味する。パターンベクトル $\mathbf{X}$ の要素 $X_i (i=1 \sim n)$ が $1 \sim k$ の離散的な値をとり、かつ要素間が独立である場合、上式は、

$$S_{\mathcal{R}}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n S_{\mathcal{R}}(X_i) + J(P(R), P(\bar{R})) \quad (7)$$

$$J(P(R), P(\bar{R})) = P(R) \ln \frac{P(R)}{P(\bar{R})} + P(\bar{R}) \ln \frac{P(\bar{R})}{P(R)} \quad (8)$$

$$S_{\mathcal{R}}(X_i) = \sum_{R=1}^k P(X_i, R) \ln \frac{P(X_i|R)}{P(X_i|\bar{R})} + \sum_{\bar{R}=1}^k P(X_i, \bar{R}) \ln \frac{P(X_i|\bar{R})}{P(X_i|R)} \quad (9)$$

と書くことができる。(7) 式第2項 $J(P(R), P(\bar{R}))$ は2つのパターンクラスの出現確率 $P(R), P(\bar{R})$ の間の分離の度合を表わす Hájek の divergence に相当する量であり、a priori に与えられる情報の量を表わ

すものと解釈される。 $S_{\mathcal{R}}(X_i)$ はパターンベクトル要素 X_i の有する識別のための情報尺度と考えられるものであって、これをベクトル要素 X_i の有する平均情報強度と呼ぶことにする。

$S_{\mathcal{R}}(X_i)$ は統計学あるいは情報理論で良く知られた3つの情報尺度、すなわち Bhattacharyya distance, シャノンの相互情報量および Kullback-Leibler number を用いてつぎのように表現することができる (付録 1)。

$$S_{\mathcal{R}}(X_i) = 2 \{ B(P(X_i|R), P(X_i|\bar{R})) + R(X_i, \mathcal{R}) + I(P(X_i) : P^*(X_i)) \} \quad (10)$$

$$R(X_i, \mathcal{R}) = - \sum_{R=1}^k P(X_i) \ln P(X_i) + \sum_{R=1}^k P(X_i, R) \ln P(X_i|R) + \sum_{\bar{R}=1}^k P(X_i, \bar{R}) \ln P(X_i|\bar{R}) \quad (11)$$

$$B(P(X_i|R), P(X_i|\bar{R})) = - \ln \rho_i \quad (12)$$

$$\rho_i = \sum_{R=1}^k \sqrt{P(X_i|R) P(X_i|\bar{R})} \quad (13)$$

$$I(P(X_i) : P^*(X_i)) = \sum_{R=1}^k P(X_i) \ln \frac{P(X_i)}{P^*(X_i)} \quad (14)$$

$$P(X_i) = P(R) P(X_i|R) + P(\bar{R}) P(X_i|\bar{R}) \quad (15)$$

$$P^*(X_i) = \frac{\sqrt{P(X_i|R) P(X_i|\bar{R})}}{\rho_i} \quad (16)$$

以下、これら3つの成分のパターン認識に関して有する意味を考察する。

第1項 Bhattacharyya distance B は両パターンクラスの事前確率 $P(R), P(\bar{R})$ には無関係に決定されるものであって、(8) 式で定義された J が、パターンクラスの特徴には無関係に事前確率の片よりによる識別のし易さの評価量であったのに対し、各要素 X_i に注目した2つのクラスの分布の相違による認識のし易さの尺度を与えるものと考えることができる。Bhattacharyya distance に関しては、つぎのような幾何学的説明が与えられている⁴⁾。観測要素 X_i の実現値 $1 \sim k$ に関する条件確率に対し、それぞれ次のような k 次元ベクトル、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1^i &= (\sqrt{P(X_i=1|R)}, \sqrt{P(X_i=2|R)}, \dots, \sqrt{P(X_i=k|R)}) \\ \mathbf{P}_2^i &= (\sqrt{P(X_i=1|\bar{R})}, \sqrt{P(X_i=2|\bar{R})}, \dots, \sqrt{P(X_i=k|\bar{R})}) \end{aligned} \quad (17)$$

を考え、両ベクトルのなす角を θ_i とすると、 $\|\mathbf{P}_1^i\| = \|\mathbf{P}_2^i\| = 1$ であることから、

$$\rho_i = (\mathbf{P}_1^i, \mathbf{P}_2^i) = \cos \theta_i \quad (18)$$

すなわち、Bhattacharyya distance B と両分布の分離の度合の幾何学的表現である θ_i との間には、

$$B(P(X_i|R), P(X_i|\bar{R})) = -\ln \cos \theta_i \geq 0 \quad (19)$$

なる関係が成立する。明らかに、 $0 \leq \theta_i \leq \pi/2$ であり、 $\theta_i = 0$ すなわち X_i を観測しても識別に関してなら情報の得られない場合には $B=0$ 、 $\theta_i = \pi/2$ すなわち X_i のみを観測することによりパターンの属するクラスが完全に決定される場合には $B=\infty$ となる。

以上のように (7) 式の第 2 項 J および平均情報強度 $S_R(X_i)$ の第 1 項 B はそれぞれパターンクラスの前確率および各パターンクラスを特徴づける条件確率自体の分離の度合を表わすものであって、これらの値が直接認識のし易さに関係することは明らかである。しかしながら、認識能率を左右するものとしては上記事前確率、条件確率それぞれの分離度のほか、両者の間の関連の仕方がとうぜん考えられる。(10) 式の表現における平均情報強度の第 2, 第 3 項が、関連のしかたの良否を表わすものと考えられる。

第 2 項 $R(X_i, \mathcal{R})$ はシャノンの相互情報量であり、次式のようにエントロピーの差で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} R(X_i, \mathcal{R}) &= H(\mathcal{R}) - H(\mathcal{R}|X_i) \\ H(\mathcal{R}) &= -P(R) \ln P(R) - P(\bar{R}) \ln P(\bar{R}) \\ H(\mathcal{R}|X_i) &= -\sum_{X_i=1}^k P(X_i, R) \ln P(R|X_i) \\ &\quad - \sum_{X_i=1}^k P(X_i, \bar{R}) \ln P(\bar{R}|X_i) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

いま、パターンベクトル要素 $X_1 \sim X_n$ を n 個の信号伝送路受信端と考え、入力端に対して与えられた事前確率に従う m 個のパターンクラス $R, \bar{R}$ の提示が行なわれたとする。入力系列の数としては $m \gg 1$ の場合には、よく知られているように $N = \exp[m \cdot H(\mathcal{R})]$ 個のものが等確率で生起すると考えることができる⁸⁾。 N の値は、

$$H(\mathcal{R}) \geq H_{\max} - J(P(R), P(\bar{R})) \quad (21)$$

が成立することから、事前確率の分離の度合 J が小さいほど大きくなる。(20) 式第 2 項 $H(\mathcal{R}|X_i)$ は受信端 X_i における曖昧度を表わしており、入力パターンクラス系列の $N_i = \exp[m \cdot H(\mathcal{R}|X_i)]$ 個のいずれもが等確率でこの観測値系列となりうることを意味する。 N_i の値は、

$$H(\mathcal{R}|X_i) \leq 2C \sqrt{P(R)P(\bar{R})} \times \exp[-B(P(X_i|R), P(X_i|\bar{R}))]$$

$$C = \max_{0 \leq x \leq 1} \{-x \ln x - (1-x) \ln (1-x)\} / \sqrt{x} \quad (22)$$

なる関係によってその上限が与えられ⁹⁾、観測要素 X_i における 2 つのパターンクラスの特徴差 B に関係し、伝送路 $i=1 \sim n$ によってその値を異にする。(20) 式より、 N, N_i および $R(X_i, \mathcal{R})$ の間には次式が成立する。

$$\frac{N_i}{N} = \exp[-m \cdot R(X_i, \mathcal{R})] \quad (23)$$

すなわち、 B が第 i 番目の要素 X_i 自体の有効性に関連した尺度であるのに対し、 R は a priori な情報(事前確率を知ることによる情報— J で評価された)を得た後に、実際の確率過程による情報伝達(第 i 番目の要素を通しての)の平均的有效性の尺度と考えられる。

第 3 の成分 $I(P(X_i) : P^*(X_i))$ は次のように書きかえることができる。

$$I(P(X_i) : P^*(X_i)) = \sum_{j=1}^k P(X_i=j) \cdot \ln L_j^i \quad (24)$$

$$L_j^i = \frac{P(X_j=j)}{P^*(X_i=j)} = \rho_i \sqrt{P(R)P(\bar{R})} \left(\sqrt{T_j^i} + \frac{1}{\sqrt{T_j^i}} \right) \quad (25)$$

$$T_j^i = \frac{P(R|X_i=j)}{P(\bar{R}|X_i=j)} \quad j=1 \sim k \quad (26)$$

すなわち、 T_j^i は X_i の実現値 j を得たもとの事後確率の比であり、したがってその対数値は実現値 j のもつ情報の量と考えることができる。

$I(P(X_i) : P^*(X_i))$ は $L_j^i = 1$ ($j=1 \sim k$) のとき最小値 0 をとる。これは事前確率の比 T_j^i が j によって、

$$\bar{T}^i = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \rho_i^2 \cdot P(R)P(\bar{R})}}{2 \rho_i \sqrt{P(R)P(\bar{R})}} \quad (27)$$

または $1/\bar{T}^i$ のいずれかの値をとることに対応する。したがって、情報量の絶対値 $|\ln T_j^i|$ が各実現値について不均一になるほど第 3 の成分 I は大きくなる。

すなわち、第 2 の成分、相互情報量 R が、観測要素 X_i の情報伝達の平均的有效性を表わすものであるのに対し、第 3 の成分 I は、要素 X_i における実現値の現われ方がクラス識別に對しに効果的であるかの尺度を与えるものと解釈することができる。

以上、新しく定義した平均情報強度 $S_R(X_i)$ が、従来より用いられている 3 つの情報尺度の和として表わされることを示し、それぞれについてパターン識別の立場からの解釈を与えたが、これらの尺度はそれぞれ情報量の 1 側面を表わすものであり、平均情報強度の識別情報量の尺度としての有効性は正解率の観点から吟味する必要がある。

3. 正解率の近似的評価と平均情報強度との関係

緒言において述べたように、正解率の解析的表現は一般に困難である。ここではある種の仮定のもとに、ベイズ形認識機構の正解率を中心極限定理を用いて近似することを考える。

3.1 正解率の近似的計算

パターンクラス $R, \bar{R}$ に関する第1種過誤の意味での正解率をそれぞれ $P_R, P_{\bar{R}}$ (これらを片側正解率と呼ぶことにする) で表わす。

$$\begin{aligned} P_R &= \text{Prob.}(\mathbf{X} \rightarrow \text{decision } R | R), \\ P_{\bar{R}} &= \text{Prob.}(\mathbf{X} \rightarrow \text{decision } \bar{R} | \bar{R}) \end{aligned} \quad (28)$$

正解率 P_C は上記の量を用いて次のように表わされる。

$$P_C = P(R) \cdot P_R + P(\bar{R}) \cdot P_{\bar{R}} \quad (29)$$

いま、パターンベクトル要素間の確率的独立性 (厳密にはおのおののパターンクラスにおいて確率的に独立) および要素数 n が十分大であるものと仮定すると、 P_R は近似的に次のように表わされる (付録 2)。

$$\begin{aligned} P_R &\cong \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{\sum_{i=1}^n I_R(X_i) + \ln P(R) - \ln P(\bar{R})}{\sqrt{2 \sum_{i=1}^n V_R(X_i)}} \right) \\ \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x \exp(-t^2) dt \end{aligned} \quad (30)^*$$

ここに、 $I_R: V_R$ は尤度比の対数 $\ln P(X_i | R) / P(X_i | \bar{R})$ を確率変数 (X_i を R のもとでの確率変数として) と考えたときの期待値、分散を表わす。

$$I_R(X_i) \cong \sum_{x_i=1}^k P(X_i | R) \ln \frac{P(X_i | R)}{P(X_i | \bar{R})} \quad (31)^*$$

$$V_R(X_i) \cong \sum_{x_i=1}^k P(X_i | R) \left\{ \ln \frac{P(X_i | R)}{P(X_i | \bar{R})} \right\}^2 - I_R^2(X_i) \quad (32)^*$$

$I_R, I_{\bar{R}}$ を用いると、前節で定義した平均情報強度は次式で与えられる。

$$S_R(X_i) = P(R) \cdot I_R(X_i) + P(\bar{R}) \cdot I_{\bar{R}}(X_i) \quad (33)$$

定義からも明らかのように、平均情報強度は情報の平均値のみに関連し、ばらつきには無関係な量である。

3.2 平均情報強度と正解率との関係

要素 X_i を観測から落すことによる片側正解率 P_R ($P_{\bar{R}}$ についても同様) の減少量 $\Delta_i P_R$ は次のように近似される。 X_i を落したときの正解率を P_{R_i}' とすると (付録 3)。

$$\Delta_i P_R \cong P_R - P_{R_i}'$$

$$\begin{aligned} &\cong \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-1)\bar{V}_R}} \exp \\ &\times \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{(n-1)\bar{I}_R + \ln P(R) - \ln P(\bar{R})}{\sqrt{(n-1)\bar{V}_R}} \right)^2 \right\} \cdot g_R(X_i) \end{aligned} \quad (34)$$

$$g_R(X_i) \cong I_R(X_i) - \frac{1}{2} \frac{\bar{I}_R}{\bar{V}_R} V_R(X_i) \quad (35)$$

* $P_{\bar{R}}, I_{\bar{R}}(X_i)$ および $V_{\bar{R}}(X_i)$ は (30), (31) および (32) 式において、 R と $\bar{R}$ を交換したもので表わされる。

$$\bar{I}_R \cong \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n I_R(X_j), \quad \bar{V}_R \cong \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n V_R(X_j) \quad (36)$$

(34)式における $g_R(X_i)$ 以外の項はすべての i についてはほぼ一定であり、各要素の正解率への相対的寄与の度合は $g_R(X_i)$ を用いて測ることができる。 $g_R(X_i)$ は、片側正解率 P_R に関して X_i のもつ情報の価値を表わすものと考えられ、先述の尤度比の対数 $\ln P(X_i | R) / P(X_i | \bar{R})$ の平均値 I_R 以外に、そのばらつき V_R が負の影響を与えていることがわかる。(35)式から、

$$g_R(X_i) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{I_R(X_i)}{V_R(X_i)} \geq \frac{1}{2} \frac{\bar{I}_R}{\bar{V}_R} \quad (37)$$

上式における $I_R/V_R, \bar{I}_R/\bar{V}_R$ はそれぞれ X_i および X_i 以外の要素から得られる情報の精度を表わし、両者の相対的関係により $g_R(X_i)$ は負の値をもとらうる。

両パターンクラス $R, \bar{R}$ について X_i のもつ情報の価値を、 $g_R(X_i), g_{\bar{R}}(X_i)$ の事前確率による重みつき平均 $g_R(X_i)$ で考えるものとする、(33)式から、

$$\begin{aligned} g_R(X_i) &\cong P(R) \cdot g_R(X_i) + P(\bar{R}) \cdot g_{\bar{R}}(X_i) \\ &= S_R(X_i) - K_R(X_i) \end{aligned} \quad (38)$$

$$K_R(X_i) \cong \frac{1}{2} \left\{ P(R) \frac{\bar{I}_R}{\bar{V}_R} V_R(X_i) + P(\bar{R}) \frac{\bar{I}_{\bar{R}}}{\bar{V}_{\bar{R}}} V_{\bar{R}}(X_i) \right\} \quad (39)$$

すなわち要素 X_i の有する識別のための情報価値 $g_R(X_i)$ は、さきに定義した平均情報強度 $S_R(X_i)$ 以外に X_i のもつ情報のばらつきに関連した項 $K_R(X_i)$ が負の効果として働き、その効果の大小は識別機構を構成する他の要素全体の情報の精度 (信頼度) $\bar{I}_R/\bar{V}_R, \bar{I}_{\bar{R}}/\bar{V}_{\bar{R}}$ により決定される。すなわち、他の観測要素のもつ情報の精度が高い場合、負の効果を表わす項 $K_R(X_i)$ も大きい。その意味から $K_R(X_i)$ は、 X_i の正解率に及ぼす寄与の度合に関して、 X_i 自身の有する情報量 $S_R(X_i)$ のうち、他の観測要素からの情報により相殺される情報の量を表わすものと解釈される。

以上のように、正解率の観点から考えた情報価値 $g_R(X_i)$ と平均情報強度 $S_R(X_i)$ の間には直接の関係は成立しない。しかし、次に述べるような2つの場合には両者の間に近似的に線形な関係が成立する。

3.3 要素間に類似性のある場合、および両パターンクラスが類似している場合における情報価値と平均情報強度との関係

以下に示す2つの場合においては近似的に、

$$g_R(X_i) \cong \frac{1}{2} S_R(X_i) \quad (40)$$

の関係が成立し、 $S_R(X_i)$ が X_i の有する識別情報量の有効な尺度であることがわかる。

1°) すべてのパターンベクトル要素の確率構造が類似している場合 すなわち、 $I_R(X_i)$, $V_R(X_i)$, $\bar{I}_R(X_i)$, $\bar{V}_R(X_i)$ がすべての i についてはほぼ一定の場合、(39) 式から、

$$K_R(X_i) \cong \frac{1}{2} \left\{ P(R) \frac{(n-1)I_R(X_i)}{(n-1)V_R(X_i)} + P(\bar{R}) \frac{(n-1)\bar{I}_R(X_i)}{(n-1)\bar{V}_R(X_i)} \right\} \\ = \frac{1}{2} \{ P(R)I_R(X_i) + P(\bar{R})\bar{I}_R(X_i) \} = \frac{1}{2} S_R(X_i) \quad (41)$$

すなわち、すべての観測要素が同じような情報を提供する場合、その情報の半分が他の観測要素からの情報により相殺され、したがって X_i の有する識別情報価値 $g_R(X_i)$ と平均情報強度 $S_R(X_i)$ の間には (40) 式が成立する。

しかし、1°) の場合は実際的には trivial な場合であり、実際上興味あるのはつぎの場合である。

2°) 両パターンクラスが類似している場合 すなわち、

$$P(X_i|R) \cong P(X_i|\bar{R}) \quad i=1 \sim n \quad (42)$$

あるいは厳密には、

4	X_{14}	X_{24}	X_{34}	X_{44}	$X_{ij}=1, 2, 3, 4, 5$ class $R \sim N(0, 1)$ for all meshes class $\bar{R} \sim N(\mu_{ij}, \sigma_{ij})$ for mesh ij
3	X_{13}	X_{23}	X_{33}	X_{43}	
2	X_{12}	X_{22}	X_{32}	X_{42}	
1	X_{11}	X_{21}	X_{31}	X_{41}	
	1	2	3	4

Fig. 1 Input pattern models for computer simulation

$$|P(X_i|\bar{R}) - P(X_i|R)| \ll P(X_i|R) \quad i=1 \sim n \quad (43)$$

なる場合には、2つのパターンクラスの確率構造が類似であって識別がむずかしくなる。この場合、 I_R , V_R はそれぞれつぎのように近似される (付録 4)。

$$I_R(X_i) \cong \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{(P(X_i|R) - P(X_i|\bar{R}))^2}{P(X_i|R)}, \\ V_R(X_i) \cong \sum_{i=1}^k \frac{(P(X_i|R) - P(X_i|\bar{R}))^2}{P(X_i|R)} \quad (44)$$

上式より、 $i=1 \sim n$ について、

$$V_R(X_i) \cong 2 I_R(X_i), \quad \bar{V}_R(X_i) \cong 2 \bar{I}_R(X_i) \quad (45)$$

が成立する。したがって、(36), (39) 式から、

$$K_R(X_i) \cong \frac{1}{2} \{ P(R)I_R(X_i) + P(\bar{R})\bar{I}_R(X_i) \} \\ = \frac{1}{2} S_R(X_i) \quad (46)$$

4. 計算機シミュレーションによる検討

前章では正解率に及ぼす各パターンベクトル要素の効果が新しく定義した平均情報強度によって、いくつかの近似のもとに評価できることを示した。

ここでは、これら近似式の妥当性、ならびに平均情報強度とそれを構成する3つの成分の性質を、モデルを用いた計算機シミュレーションにより検討する。

実験に用いたモデルパターンは、Fig. 1 に示すように 4×4 の計 16 要素から成り、各要素 X_{ij} は、クラス R においてはすべての i, j について一様に平均 0、分散 1 の正規乱数を $-D, -C, C, D$ の 4 点で量子化した、1~5 の値をとる確率変数とし、クラス $\bar{R}$ においては平均 μ_{ij} 、分散 σ_{ij} の正規乱数を同様の手法で量子化したものを確率変数としてとる。また、 μ_{ij} および σ_{ij} の値はそれぞれ、

$$\mu_{ij} = \frac{RAM}{3}(i-1), \quad \sigma_{ij} = \frac{RAV}{3}(j-1) + 1 \quad (47)$$

で与えられるものとする。すなわち、パターンを構成する 16 要素は確率特性がすべて異なるものであり、また RAM, RAV の値によってパターンクラス $R, \bar{R}$ の相違の度合を規定することができる。計算機シミュレーションはクラス $R, \bar{R}$ に属するパターン各 3000 個、 $C=0.3$, $D=0.9$ の場合について行なった。

1°) 中心極限定理の仮定と正解率理論計算式 (30) の妥当性の検討 正解率の近似式 (30) はパターンベクトル要素の独立性の仮定、ならびに要素数 n が十分大であるとの前提のもとに中心極限定理を用いて導出したものである。いっぽう、本解析で用いた識別情報価値 $g_R(X_{ij})$ は要素 X_{ij} の有する正解率の増分を表わすものである関係上、あまり要素数を多くすると $g_R(X_{ij})$ の値が小さくなり信頼度 (実験値の) が悪

Table 1 Comparison of theoretical and experimental recognition rate

RAM (=RAV)	true recognition rate P_c [%]	
	theoretical	experimental
0.5	76.6	76.8
1.0	89.5	89.1
1.5	95.3	94.9
2.0	98.0	97.3

くなる。したがって、本シミュレーションではパターン要素数 n としては比較的少ない $4 \times 4 = 16$ を用いたが、(30) 式による理論計算結果とシミュレーション実験結果とは **Table 1** に示すように 0.5% 程度の差が認められるだけで中心極限定理の仮定、したがって (30) 式が十分成立していることがわかる。

2°) 正解率減少量 (34) 式の精度に対する検討
つぎに要素 X_{ij} の正解率に寄与する度合を表わす (34) 式の妥当性について検討する。モデルパターンにおいて特徴的な 3 つの要素 $X_{41}(P(X_{41}|\bar{R})=N(\text{RAM}, 1))$, $X_{14}(N(1, \text{RAV}))$, $X_{44}(N(\text{RAM}, \text{RAV}))$ について、(34) 式による理論結果とシミュレーション結果とをパーセントで示したのが **Fig. 2** である。両者の間にはかなりの差が認められるが、だいたいの傾向は

Fig. 2 Comparison of theoretical and experimental decrease of recognition rate

一致している。提示パターン数を種々変えて検討した結果、この偏差は主に提示パターン数の不足に起因するものと思われる。

3°) 情報価値と平均情報強度の間の対応関係に対する検討 **3・3, 2°)** で述べた両クラス $R, \bar{R}$ の相違の少ない場合 (RAM, RAV が小なることに対応)、(40) 式がどの程度成立するかを **Fig. 3** に示す。

Fig. 3 Relation between information value G_R and mean information strength S_R

RAM, RAV があまり大きくない範囲で (仮定 (43) 式は成立していなくとも)、(40) 式は十分に成立していることがわかる。

4°) 平均情報強度とその成分の特性についての検討 **Fig. 4** は、平均情報強度 S_R の 3 つの成分 Bhattacharyya distance B , 相互情報量 R , Kullback-Leibler number I の値を、 $\bar{R}$ に属するパターンの各標準偏差値 σ_{ij} に対し、平均値の移動量 μ_{ij} をパラメータとして示したものである。 B と R はだいたい同様の値を取り、両パターンクラスの標準偏差の相違よりも平均値の差に鋭敏である。この場合、平均情報強度 S_R は B あるいは R の約 4 倍である。

また I は B, R に比べると小さな値を取り、ただ平均値のみに差のある要素 X_{41} においてのみかなり大きな値をとる。これは **2・** で述べたように、この要素においては実現値のもつ特徴 ($|\ln T_j^i|$) の不均一性が一番顕著であることに起因している。

4. 結 言

ベイズ形パターン認識機構の正解率に関連し、取扱

Fig. 4 Quality of Bhattacharyya distance B , mutual information R and Kullback-Leibler number I

いの簡易な尺度として新しく平均情報強度を定義し、その構造ならびに性質を明らかにした。すなわち、この尺度は情報理論あるいは数理統計学などでよく知られた3つの尺度に分解される。これら3つの成分のパターン認識に関してもつ意味から、平均情報強度の性質が明らかになった。しかし、第3の成分の意味については今後検討する必要がある。また、この尺度とべ

イズ形認識機構の正解率との関係を吟味し、特に両パターンクラスの相違の少ない場合には、この尺度と正解率の間に線形な関係が見い出された。また、モデルを用いた検討からはより広い範囲でこの関係の成立していることがわかった。すなわち平均情報強度は、ベイズ形認識機構の構造決定、特徴抽出問題などにおいて実際のかつ有効な尺度として用いることができる。なお、現在、本尺度をパターンの最適量子化問題に応用する問題を取扱っているが、これについては後に発表する予定である。

参考文献

- 1) S. Kullback & R. A. Leibler: On Information and Sufficiency, Ann. Math. Stat., Vol. 22, 79/86 (1951)
- 2) S. Kullback: Information Theory and Statistics, John Wiley & Sons (1952)
- 3) P. M. Lewis: Approximating Probability Distributions to Reduce Storage Requirement, Inform. & Contr., Vol. 2, 214/225 (1959)
- 4) T. Kailath: The Divergence and Bhattacharyya Distance Measures in Signal Selection, IEEE Trans., COM-15-1, 52/60 (1967)
- 5) T. Y. Young: The Reliability of Linear Feature Extractors, IEEE Trans., C-20-9, 967/971 (1971)
- 6) A. Caprihan and R. J. P. De Figueiredo: On the Extraction of Pattern Features from Continuous Measurements, IEEE Trans., SSC -6-2, 110/115 (1970)
- 7) M. E. Hellman and J. Raviv: Probability of Error, Equivocation and the Chernoff Bound, IEEE Trans., IT-16-4, 368/372 (1970)
- 8) C. E. Shannon and W. Weaver: The Mathematical Theory of Communications, Univ. of Illinois Press (1949)
- 9) 宮沢: 情報・決定理論序説, 岩波書店 (1971)

□ 付 録 □

1. 平均情報強度の3成分への分解

$$\begin{aligned}
 S_{\mathcal{Q}}(X_i) &= \sum_{X_i=1}^h \left\{ P(X_i, R) \ln \frac{P(X_i|R)}{P(X_i|\bar{R})} + P(X_i, \bar{R}) \ln \frac{P(X_i|\bar{R})}{P(X_i|R)} \right\} \\
 &= \sum_{X_i=1}^h \{ 2 P(X_i, R) \ln P(X_i|R) - P(X_i) \ln P(X_i|R) \\
 &\quad + 2 P(X_i, \bar{R}) \ln P(X_i|\bar{R}) - P(X_i) \ln P(X_i|\bar{R}) \} \\
 &= 2 \sum_{X_i=1}^h \{ -P(X_i) \ln P(X_i) + P(X_i, R) \ln P(X_i|R) + P(X_i, \bar{R}) \ln P(X_i|\bar{R}) \} \\
 &\quad + \sum_{X_i=1}^h \{ 2 P(X_i) \ln P(X_i) - P(X_i) \ln P(X_i|R) - P(X_i) \ln P(X_i|\bar{R}) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2R(X_i, \mathcal{R}) + 2 \sum_{X_i=1}^k P(X_i) \ln \frac{P(X_i)}{\sqrt{P(X_i|R)P(X_i|\bar{R})}} \\
&= 2 \left\{ R(X_i, \mathcal{R}) - \ln \sum_{X_i=1}^k \sqrt{P(X_i|R)P(X_i|\bar{R})} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{X_i=1}^k P(X_i) \ln \frac{P(X_i)}{\sqrt{P(X_i|R)P(X_i|\bar{R})}} \right\} \\
&\quad \frac{\sum_{X_i=1}^k \sqrt{P(X_i|R)P(X_i|\bar{R})}}{\sum_{X_i=1}^k \sqrt{P(X_i|R)P(X_i|\bar{R})}}
\end{aligned}$$

2. 正解率近似式の導出 クラス R に関する第 1 種過誤の意味での正解率 P_R は識別関数 $f(\mathbf{X})$ がクラス R のパターンベクトル $\mathbf{X}$ に対し、正の値をとる確率で与えられる。ここに、

$$f(\mathbf{X}) = \ln \frac{P(R|\mathbf{X})}{P(\bar{R}|\mathbf{X})} = \ln \frac{P(\mathbf{X}|R)}{P(\mathbf{X}|\bar{R})} + \ln \frac{P(R)}{P(\bar{R})}$$

独立性の仮定より、 f は独立確率変数 W_i の和となる。

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n W_i(X_i) + \ln \frac{P(R)}{P(\bar{R})}, \quad W_i(X_i) = \ln \frac{P(X_i|R)}{P(X_i|\bar{R})}$$

n が十分大であるから、中心極限定理より f はクラス R において、次の分布に従い、(30) 式が導かれる。

$$f(\mathbf{X}) \sim N\left(\sum_{i=1}^n I_R(X_i) + \ln \frac{P(R)}{P(\bar{R})}, \sum_{i=1}^n V_R(X_i)\right)$$

3. 正解率減少量評価式の導出

$$\frac{\beta + \Delta\beta}{\sqrt{\alpha + \Delta\alpha}} - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \cong \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\Delta\beta - \frac{\beta}{2\alpha} \Delta\alpha \right)$$

および $d\Phi(x)/dx = \exp(-x^2)$ から、

$$\Phi\left(\frac{\beta + \Delta\beta}{\sqrt{\alpha + \Delta\alpha}}\right) - \Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right) \cong \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{\alpha}\right) \cdot \left(\Delta\beta - \frac{\beta}{2\alpha} \Delta\alpha\right)$$

$\alpha, \beta, \Delta\alpha, \Delta\beta$ として以下の諸量を代入する。

$$\alpha = 2 \sum_{j \neq i} V_R(X_j), \quad \Delta\alpha = 2 V_R(X_i)$$

$$\beta = 2 \sum_{j \neq i} I_R(X_j), \quad \Delta\beta = I_R(X_i)$$

4. 両パターンクラスが類似している場合における I_R, V_R の値の評価 (43) 式の仮定から、

$$\alpha(X_i) = \frac{P(X_i|\bar{R}) - P(X_i|R)}{P(X_i|R)} \ll 1$$

ここで $\ln$ について Taylor 展開し、(31) 式を用いると、

$$\begin{aligned}
\ln \frac{P(X_i|R)}{P(X_i|\bar{R})} &= -\alpha(X_i) + \frac{1}{2} \alpha^2(X_i) + O(\alpha^3) \\
&= \frac{P(X_i|R) - P(X_i|\bar{R})}{P(X_i|R)} + \frac{1}{2} \frac{(P(X_i|R) - P(X_i|\bar{R}))^2}{P^2(X_i|R)} + O(\alpha^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_R(X_i) &= \sum_{X_i=1}^k P(X_i|R) \left\{ \frac{P(X_i|R) - P(X_i|\bar{R})}{P(X_i|R)} + \frac{1}{2} \frac{(P(X_i|R) - P(X_i|\bar{R}))^2}{P^2(X_i|R)} \right\} + O(\alpha^3) \\
&= \sum_{X_i=1}^k \{P(X_i|R) - P(X_i|\bar{R})\} + \frac{1}{2} \sum_{X_i=1}^k \frac{(P(X_i|R) - P(X_i|\bar{R}))^2}{P(X_i|R)} + O(\alpha^3)
\end{aligned}$$

上式における第 1 項は明らかに 0 である。 α の 3 次以上の項を省略すると、

$$I_R(X_i) \cong \frac{1}{2} \sum_{X_i=1}^k \frac{(P(X_i|R) - P(X_i|\bar{R}))^2}{P(X_i|R)} (= O(\alpha^2))$$

また、同様にして (40) 式を用いると、

$$\begin{aligned}
V_R(X_i) &= \sum_{X_i=1}^k P(X_i|R) \left\{ \frac{P(X_i|R) - P(X_i|\bar{R})}{P(X_i|R)} + O(\alpha^2) \right\}^2 - I_R^2(X_i) \\
&= \sum_{X_i=1}^k \frac{(P(X_i|R) - P(X_i|\bar{R}))^2}{P(X_i|R)} + O(\alpha^3)
\end{aligned}$$

α の 3 次以上の項を省略することにより、(44) 式の関係を得る。