準最適 PWM 制御系の設計

斎藤 博樹・寺尾 満

東京大学工学部 東京都文京区本郷 7-3-1

(昭和 47 年 3 月 31 日 受付)

Design of Suboptimal PWM Control Systems

Hiroki SAITO and Mitsuru TERAOKA

(Faculty of Engineering, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo)

(Received March 31, 1972)

This paper presents a design method for suboptimal PWM (pulse-width-modulated) control systems which can nearly minimize a quadratic performance index. The suboptimal PWM control systems can be constructed in a closed-loop configuration with a state feedback. The proposed algorithm to decide control signals is very simple and easy, so that it can be applied to the DDC effectively. When the suboptimal control pulses are produced by the proposed algorithm, the polarity of a pulse is determined by the switching plane in the state space, and the suboptimal pulse width is determined by solving a specified quadratic equation reduced by some approximations.

In this paper, the result of the simulation of a second order controlled system is presented. It shows that the suboptimal PWM control systems are very near to the optimal PWM control systems in the control performance.

The authors also point out that some delay of the control pulse during each sampling period can improve the control performance under some specified initial states.

1. ま え が き

サンプル値制御系は、現在、計算機制御の立場からその重要性が増している。従来、このサンプル値制御系の理論は、おもに線形な制御信号（PAM 制御系あるいは零次ホールド制御系）を対象としている。いっぽう、制御信号にオン・オフ信号を用いる PWM (pulse-width-modulated) 制御系は、その解析の困難さにもかかわらず、i) コントロールの大きさについて、めんどろな振幅調整が不要で、ii) したがって操作部が簡単で信頼性が高く、安価であり、iii) 最大パワーを制御に利用できる、などリレー動作の利点を持ちながら、iv) 等価的には連続制御の性能をもつから、リミット・サイクルをおこさないという特徴をもつ制御系として、従来多くの研究者の興味を集め、実際にも古くから電気炉や電解精練プロセスの制御に、また最近では飛行体の姿勢制御に応用されている。

PWM 制御系はパルス振幅が一定で、パルス幅（パ

ルスの継続時間）が異なる一連のパルス列を制御信号とする制御系で、その典型的なものは、各サンプリング時刻にサンプルされた誤差と同じ極性を持ち、その絶対値に比例したパルス幅をもつパルスを制御信号とするもので、これは線形系の比例制御に対応する。

PWM 制御系についての過去の研究の多くは、おもに安定性を扱ったもので^{1)~9)}、最適 PWM 制御系の設計問題に関しては、その数学的な困難さから、あまり多くの研究は行なわれていないが、i) 2次系に対する最短時間レギュレータ問題^{10), 11)}、ii) 各サンプリング時刻について誤差を零とする PWM 制御系¹²⁾、iii) 任意のシステムに対して任意のパフォーマンス・インデックスを最小化するような PWM 制御系のパルス列を山登り法によって決定するもの¹³⁾、などが見られる。しかし i) については系が2次に限られ、ii) については各サンプリング時刻で誤差が零になるような応答は必ずしも好ましいものではない上に、パルス幅を決定する方程式が非線形で容易に解けない。また、

iii) については計算量が極端に多い上に、閉ループの形でしか設計できない、という欠点があり、いずれも実用化は困難である。

この論文では、 n 次線形系として表わされたプロセスの最適 PWM 制御系を、コントロール・アルゴリズムの簡単な 1 つの準最適 PWM 制御系でおきかえ、その系を状態ベクトルのフィード・バックによって閉ループで構成する方法を示す。すなわち、この方法では、準最適なコントロール・パルスの決定に当たって、状態空間内のパルス切り換え平面でその極性を決め、近似によってえられる 2 次方程式を解くことによって準最適なパルス幅を決める。

また最後に、一例として、この方法を 2 次プロセスへ適用した数値実験の結果を示す。

2. 準最適 PWM 制御系の手法

いま、制御対象の動特性と出力信号が、

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y = \mathbf{c}^t \mathbf{x} \end{cases} \quad (1)$$

で表わされるとき、任意の初期状態 $\mathbf{x}_0$ から出発して、次のパフォーマンス・インデックス

$$J = \int_0^\infty \{ \mathbf{x}^t(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + r u^2(t) \} dt \quad (2)$$

を、 $u(t) : t \in [0, \infty]$ に関して最小化する問題を考える。ここで、 $\mathbf{x}$ は n 次元状態ベクトル、 u はスカラー制御信号、 y はスカラー出力信号、 $\mathbf{Q}$ は準正定マトリックス、 r は非負の定数とする。

いま、サンプリング周期 T およびコントロールの振幅 M が一定であるとする、システムが安定ならば、フリー・システムに対して J が有限である¹⁵⁾ことから、

$$\min J = f(\mathbf{x}_0) \quad (3)$$

と書くことができ、

$$f(\mathbf{x}_0) = \min_{u(t): t \in [0, T]} \left[\int_0^T (\mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} + r u^2) dt + f(\mathbf{x}_T) \right] \quad (4)$$

となる（ただし $\mathbf{x}_T$ は時刻 T における $\mathbf{x}$ の値である）。

一般に、 $f(\mathbf{x}_0)$ は解析的には求められないので、1 つの近似として、時刻 T 以後は最適な零次ホールド・コントロールを行なったとして、 $f(\mathbf{x}_T)$ をそのときのパフォーマンス $\mathbf{x}_T^t \mathbf{K} \mathbf{x}_T$ ¹⁴⁾ でおきかえる。この近似を用いることによって、問題は、

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \quad (5)$$

のもので、

$$J = \int_0^T (\mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} + r u^2) dt + \mathbf{x}_T^t \mathbf{K} \mathbf{x}_T \quad (6)$$

を最小化するような $u(t) : t \in [0, T]$ を求めることに

なる*1。

ただし、

$$u(t) = \begin{cases} \sigma M : 0 \leq t \leq \tau \quad (\sigma = \pm 1) \\ 0 : \tau \leq t \leq T \end{cases} \quad (1)$$

いま、簡単のために、

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \equiv \mathbf{g}(\mathbf{x}, u) \quad (8)$$

$$\mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} + r u^2 \equiv \theta(\mathbf{x}, u) \quad (9)$$

$$\mathbf{x}_T^t \mathbf{K} \mathbf{x}_T \equiv \Omega(\mathbf{x}_T) \quad (10)$$

とおくと、(5)、(6)式の問題はアジョイント・ベクトル $\mathbf{P}(t)$ を用いることによって、

$$\begin{aligned} J^* &= \Omega + \int_0^T \{ \theta + \mathbf{P}^t (\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{g}) \} dt \\ &= \Omega + \int_0^\tau (-H + \mathbf{P}^t \dot{\mathbf{x}}) dt + \int_\tau^T (-H + \mathbf{P}^t \dot{\mathbf{x}}) dt \end{aligned} \quad (11)$$

を最小化する問題と等価となる。ただし、

$$H \equiv -\theta + \mathbf{P}^t \mathbf{g} \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^t \quad (13)$$

である。

パルス幅 τ の微小変化 $\delta\tau$ に対する J^* の第 1 変分をとると、

$$\begin{aligned} \delta J^* &= \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}_T} \delta \mathbf{x}_T + [\theta(\tau^-) - \theta(\tau^+)] \delta \tau \\ &\quad + \int_0^\tau \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \mathbf{P}^t \delta \dot{\mathbf{x}} \right) dt \\ &\quad + \int_\tau^T \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \mathbf{P}^t \delta \dot{\mathbf{x}} \right) dt \end{aligned} \quad (14)$$

第 3、第 4 項を部分積分して、

$$\delta \mathbf{x}(\tau) \equiv \Delta \mathbf{x}(\tau) - \dot{\mathbf{x}}(\tau) \delta \tau \quad (15)$$

の関係を用いると*2、

*1 最適コントロールを解析的に求めることのできる典型的な例である最適零次ホールド系においては $[0, T]$ の最適コントロール u_0 を、

$$\int_0^T (\mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} + r u^2) dt + \mathbf{x}_T^t \mathbf{K} \mathbf{x}_T$$

を最小化するという方針に基づいて決定している。最適 PWM 制御系と最適零次ホールド系は各サンプリング区間におけるコントロール・パルスの形こそやや違うが、サンプリング周期が等しく、両者共に

$$\int_0^\infty (\mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} + r u^2) dt$$

の最小化を目標とするということから、それらの制御方針はそう大きくは違わないであろうという仮定に基づいて、最適零次ホールド系の制御方針を採用したのが、この準最適 PWM 制御系である。

*2 ここで $\delta \mathbf{x}(\tau)$ はパルス幅が τ から微小変化したときの時刻 τ における $\mathbf{x}$ の差であって、 τ において不連続 ($\delta \mathbf{x}(\tau^-) \neq \delta \mathbf{x}(\tau^+)$) であり、いっぽう、 $\Delta \mathbf{x}$ はパルス幅が τ から微小変化した時の各スイッチング・タイムにおける $\mathbf{x}$ の差であって、これは τ において連続 ($\Delta \mathbf{x}(\tau^-) = \Delta \mathbf{x}(\tau^+)$) である。

(以下次頁に続く)

$$\begin{aligned}
\delta J^* &= \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}_T} \delta \mathbf{x}_T + [\theta(\tau^-) - \theta(\tau^+)] \delta \tau \\
&\quad + \int_0^T \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} - \dot{\mathbf{P}}^t \right) \delta \mathbf{x} dt + (\mathbf{P}^t \Delta \mathbf{x})_{\tau^-} \\
&\quad - (\mathbf{P}^t \Delta \mathbf{x})_{\tau^+} - (\mathbf{P}^t \dot{\mathbf{x}})_{\tau^-} \delta \tau + (\mathbf{P}^t \dot{\mathbf{x}})_{\tau^+} \delta \tau \\
&\quad - (\mathbf{P}^t \delta \mathbf{x})_0 + (\mathbf{P}^t \delta \mathbf{x})_T \\
&= \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}_T} + \mathbf{P}_T^t \right) \delta \mathbf{x}_T + [H(\tau^+) - H(\tau^-)] \delta \tau \\
&\quad + \int_0^T \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} - \dot{\mathbf{P}}^t \right) \delta \mathbf{x} dt + [(\mathbf{P}^t \Delta \mathbf{x})_{\tau^-} \\
&\quad - (\mathbf{P}^t \Delta \mathbf{x})_{\tau^+}] - (\mathbf{P}^t \delta \mathbf{x}) \quad (16)
\end{aligned}$$

となり、 $\mathbf{P}(t)$ の終端条件、

$$\mathbf{P}(T) = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}_T} \right) \quad (17)$$

と、(13)式および $\mathbf{P}(t)$ と $\Delta \mathbf{x}$ の連続性、さらに $\mathbf{x}_0$ が固定されていることから、

$$\delta \mathbf{x}_0 = 0 \quad (18)$$

になることを用いて、

$$\delta J^* = [H(\tau^+) - H(\tau^-)] \delta \tau \quad (19)$$

が得られる。(6)式の問題に対して(19)式を計算した結果を示すと、

$$\begin{aligned}
\delta J^* &= \left[2\sigma \mathbf{b}^t e^{A^t(T-\tau)} \left\{ \int_0^{T-\tau} e^{-A^t q} Q e^{A(T-q)} dq + K e^{AT} \right\} \right. \\
&\quad \times \left(\mathbf{x}_0 + \sigma M \int_0^\tau e^{-A^t s} \mathbf{b} ds \right) + r M \Big] M \delta \tau \quad (20)
\end{aligned}$$

となる。

したがって、求める準最適 PWM 制御は観測され

た状態 $\mathbf{x}_0$ に対して(20)式で示された $\delta J^* = 0$ を満足するようなパルス極性 σ とパルス幅 τ を持つものであ
る。なお、(20)式によってわかるように、特定のパル

$$\begin{aligned}
\delta J^* &= 2\sigma M \left\{ \left(\frac{2}{3} e^{2\tau-3T} - \frac{1}{4} e^{2\tau-4T} - e^{\tau-2T} + \frac{1}{3} e^{\tau-3T} + \frac{1}{3} e^{-\tau} - \frac{1}{12} e^{-2\tau} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{3} e^{2\tau-3T} - \frac{1}{4} e^{2\tau-4T} - \frac{1}{2} e^{\tau-2T} + \frac{1}{3} e^{\tau-3T} + \frac{1}{6} e^{-\tau} - \frac{1}{12} e^{-2\tau} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(2k_a e^{2\tau-3T} + k_b e^{2\tau-4T} + 2k_c e^{\tau-2T} + k_d e^{\tau-3T} \right) \right\} \left(\mathbf{x}_0 + \sigma M \begin{pmatrix} e^\tau - \frac{1}{2} e^{2\tau} - \frac{1}{2} \\ -e^\tau + e^{2\tau} \end{pmatrix} \right) \delta \tau \quad (26)
\end{aligned}$$

ただし、

$$k_a = -k_{11} + 3k_{12} - 2k_{22} \quad (27)$$

(前頁より)

理解を助けるため、 $\mathbf{x}$ について 1 次元的に表現すると図のようになる。ABC および AB'C' はそれぞれパルス幅が τ および $\tau + \delta \tau$ のときの $\mathbf{x}$ の軌跡であり、それぞれ $\mathbf{x}(t)$ および $\mathbf{x}_d(t)$ とおくと、
 $\delta \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_d(\tau) - \mathbf{x}(\tau)$ 、
 $\Delta \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_d(t + \delta \tau) - \mathbf{x}(\tau)$ である。

ス極性およびパルス幅に対して、 $\delta J^* = 0$ とする $\mathbf{x}_0$ は状態空間内で 1 つの超平面を形成する。

3. 2 次系への適用

ここでは、制御信号 u からプロセス出力 y までの伝達関数が $1/(s+1)(s+2)$ で表わされる 2 次系のプロセスに準最適 PWM 制御を適用するときのコントロール・アルゴリズムについて述べる。

例として、サンプリング周期 T を 1 秒、コントロールの振幅 M を 2 とする。

いま、状態を、

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{x} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

とすると、

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (22)$$

となり、パフォーマンス・インデックスとして、出力の 2 乗積分、

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^t Q \mathbf{x} dt = \int_0^\infty x_1^2 dt \quad (23)$$

を考える*3。

このとき、遷移行列 e^{At} および最適零次ホールド系によるパフォーマンス・マトリクス K は、

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.588928 & 0.106417 \\ 0.106417 & 0.023222 \end{pmatrix} \quad (25)$$

となる。また δJ^* を計算すると、

$$\left. \begin{aligned} k_b &= k_{11} - 4k_{12} + 4k_{22} \\ k_c &= k_{11} - 2k_{12} + k_{22} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

となる。

いま、

$$\delta J^* = 2Mh(\sigma, \tau) \delta \tau \quad (28)$$

とおくと、求めるコントロール・パルスは、 $h(\sigma, 0) \leq 0$ となるようなパルス極性 σ をもち、また、その σ

*3 PWM 制御ではコントロール・パワーを節約することは考えていないことが多いので、インデックスからコントロールの項を除いた。

に対して $h(\sigma, \tau) = 0$ となるようなパルス幅 τ をもつ。その値を位相面上に表わしたものが Fig. 1 (a) である。

(a) pulse width τ

(b) coefficients of equation (29)

Fig. 1 Suboptimal PWM control

図では $\sigma = -1$ の場合を示してあるが、 $\sigma = +1$ の場合は、切りかえ直線、 $h(\sigma, 0) = 0$ 、に関して対称となる。また $\tau = 1.0$ の直線の外側の領域では、パルス幅が飽和しており、そこではパルス幅をサンプリング区間いっぱい ($\tau = 1.0$) にとればよい。

Fig. 1 は特定のパルス幅 τ に対して δJ^* を 0 とする状態 x_0 を与えている。いっぽう、実時間の制御系では観測した状態 x_0 に対して、 $\delta J^* = 0$ (すなわち $h(\sigma, \tau) = 0$) となるパルス幅 τ をできるだけ簡単なアルゴリズムで求める必要がある。

(28)式からもわかるように、最適パルス幅 τ を求める式、 $h(\sigma, \tau) = 0$ を x_1 の係数で正規化すると、

$$x_1 + a(\tau)x_2 + \sigma Mb(\tau) = 0 \quad (29)$$

となり^{*4}、 $a(\tau)$ および $b(\tau)$ は Fig. 1 (b) のようになる。

いま、

$$\left. \begin{aligned} a(\tau) &= a_1\tau^2 + a_2\tau + a_3 \\ b(\tau) &= b_1\tau^2 + b_2\tau + b_3 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

のように、 a, b を τ の 2 次式で近似すると、(29)式は、

$$(a_1x_2 + b_1\sigma M)\tau^2 + (a_2x_2 + b_2\sigma M)\tau + (a_1x_2 + b_1\sigma M) = 0 \quad (31)$$

となり、 τ が容易に求まる。

この例では、 $[0, 1]$ 間の 11 個の点で最小 2 乗法による 2 次近似を行なった結果、

$$\left. \begin{aligned} a(\tau) &\doteq -0.079341\tau^2 + 0.186474\tau + 0.311873 \\ b(\tau) &\doteq 0.170548\tau^2 + 0.319607\tau \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

が得られた。ただし $b(0) = 0$ であるから、 $b_3 = 0$ は、あらかじめ指定しておいた。

上に述べた準最適 PWM 制御のコントロールを決定するアルゴリズムを、Fig. 2 のフロー・チャートに示す。

Fig. 2 Control for second order process

この簡素化されたアルゴリズムによる準最適 PWM 制御系の種々の初期状態に対する成績を、パフォーマンス・スインドックス、 $J = \int_0^{10} x_1^2 dt$ によって、最適零次ホールド系¹⁴⁾ および厳密な最適 PWM 制御系¹³⁾ と比較した結果を Table 1 に示す^{*6}。

ただし比較を公平にするために、零次ホールド系はコントロールの大きさを 2 で飽和させてある。

*4 x_1 の係数は $[0, 1]$ の τ に対して一定符号であって、0 にはならない。

*5 これはパルス幅が飽和しているかどうかを調べるステップである。

*6 最適零次ホールド系：

$$\Phi = \Phi(T), \quad d = \int_0^T \Phi(t)b dt, \quad \hat{Q} = \int_0^T \Phi'(t)Q\Phi(t) dt$$

$$M = \int_0^T \Phi'(t)Q \left[\int_0^t \Phi(s)ds \right] b dt$$

$$\hat{r} = rT + b' \int_0^T \left[\int_0^t \Phi'(s)ds \right] Q \left[\int_0^t \Phi(s)ds \right] dt \cdot b$$

$$\theta \equiv \Phi - dM^{-1}r, \quad \Gamma \equiv \hat{Q} - MM^{-1}r \text{ とおくと,}$$

$$\min_u J = x_0' K x_0$$

$$K = \theta' [K - K d d' K / (\hat{r} + d' K d)] \theta + \Gamma$$

$$u_i = -[M^{-1}r + d' K \theta / (\hat{r} + d' K d)] x_i$$

最適 PWM 制御系 (N 段最適化を考える)：

$$\delta J^* = \sum_{k=1}^N [H(t_k^+) - H(t_k^-)] \delta \tau_k = 0$$

t_k : k 段目のスイッチングタイム、 τ_k : k 段目のパルス幅、 H : 本文で用いたものと同じ。

Table 1 Performance J of three control systems; the optimal 0-th order, the suboptimal PWM and the optimal PWM control system

control system initial state	optimal 0-th order control system	suboptimal PWM control system	optimal PWM control system
(1, 0)	0.507 521	0.508 360	0.508 312
(1, 1)	0.823 830	0.817 938	0.817 776
(0, 1)	0.014 694	0.005 960	0.005 880
(-1, 1)	0.322 398	0.309 022	0.308 408

なお、このシミュレーションの継続時間は 10 秒(10 段)であるが、どの初期状態の場合も、遅くとも 4 段ではば整定するので、最適 PWM 制御は、 $\int_0^4 x_1^2 dt$ を最小化するように、4 個のパルスを Kirk の方法¹³⁾を用いて山登り法で求めた結果で示してある。

表からわかるように、一般に、準最適 PWM 制御系は最適零次ホールド制御系よりよい成績をあげ、最適 PWM 制御系に非常に近い。Fig. 3 に、一例として、初期状態 (0, 1) のときの応答を示す。

Fig. 3 Responses of the suboptimal PWM and the optimal 0-th order control system : initial state (0, 1)

前の章で示したように、一般に、ある特定な値を最適なパルス幅とする状態は、状態空間内に 1 つの超平面を形成する。しかもそれらの超平面はパルス幅の値によってその傾きをかえる。そこで、異なるパルス幅に対応する超平面が交差する領域についての検討を 2 次系の例について進めよう。正負のパルス極性に対してグラフは対称であるから、パルス極性 $\sigma = -1$ の場合について考える。

(29) 式の $a(\tau)$, $b(\tau)$ が単調な変化をしていることからわかるように、Fig. 1 の直線群はパルス幅 τ の増加とともに傾きが零に近づくので、切り換え直線の右側 (これらの直線が意味を持つ領域) では交差しない。 $\tau = 1.0$ および $\tau = 0.5$ の場合について、それ

Fig. 4 Intersection of the τ -lines

を Fig. 4 に示す。

次に、 $\tau = \tau_0 (\neq 0)$ に対応する直線と切り換え直線 ($\tau = 0$ に対応する直線) との交点、たとえば Fig. 4 の点 A について調べよう。

この場合、 $\sigma = +1$ に対しては、すべての τ に対して δJ^* は正であるから問題にならない。パルス極性 σ を -1 としたとき、パルス幅 τ を変えると δJ^* および J^* はおおよそ Fig. 4 のような変化をすることから、この場合は $\tau = 1.0$ が最適になる。

この解 ($a = -1$, $\tau = 1.0$) は Fig. 2 のフロー・チャートからは得られない (フロー・チャートでは状態が切り換え直線上に乗った場合は無制御になっている)。よって、この場合にも最適解を得るためには、Fig. 2 のフロー・チャートの第 2 ステップにおいて、 $x_1 + 0.311873x_2 = 0$ のときは微少なパルス幅 $\Delta\tau$ に対して $\delta J^* < 0$ とするようにパルス極性 σ を決定しなければならない。しかし、実際に観測された状態が厳密に切り換え直線上に乗っている確率はほぼゼロであることとともに、アルゴリズムの簡単化の目的から Fig. 2 このアルゴリズムで十分であろうと思われる。

4. パルス位置の移動

Table 1 をみると、初期状態 (1, 0) から出発したときに、PWM 制御は零次ホールド制御よりも悪い成績を残している。

それは $t = 1.0$ で状態を観測したとき、負の行きすぎをおさえる意味で正のコントロールを加える必要があるが、通常の PWM ではサンプリング区間の先頭でフル・パワーのコントロールを加えてしまうので、そのあと x_1 はゆっくり零に近づいて、パフォーマンスを悪くするからである。そこで、パルス全体を右方へ移動し、 x_1 がある程度零に近づいたときに正のコントロールを加えれば x_1^2 の積分値は小さくなるであ

ろう。ここでは、パルス位置を移動する（遅らせる）ことで、パフォーマンスが改善されるような状態 x の条件、およびそのときの最適なパルスの遅れ時間を求める。

τ_0 を状態 x_0 によって決定された最適なパルス幅とし、パルスの立ち上がり時間が t_1 から $\delta\tau$ だけ変化したときの J^* の変化は、2. に述べた手続きで J^* の変分を計算することによって、

$$\delta J^* = [\{H(t_1^+) - H(t_1^-)\} + \{H(t_2^+) - H(t_2^-)\}] \delta\tau \quad (33)$$

となる。ここで、 $t_2 = t_1 + \tau_0$ である (Fig. 5 (a) 参照)。

したがって、 $t_1 = 0$ 、 $t_2 = \tau_0$ 、 $\delta\tau > 0$ で $\delta J^* < 0$ ならば、 $\delta J^* = 0$ となる t_1 までパルスを移動したほうがよ

(a) pulse shift

 (b) optimal delay time t_1

(c) control behaviour

Fig. 5 Introducing a delay in control pulses

い。

Fig. 5 (b) にパルスを移動したほうがよい領域 (図の斜線部分) および最適な移動時間を示す。

この図から明らかなように、パルスの位置を移動したほうがよい領域は、抑制的なコントロールを加える場合 (x_1 とコントロールの符号が同じ場合) だけである。

Fig. 5 (c) は初期状態 (1, 0) から出発して、第 2 段 ($1 \leq t \leq 2$) で、パルス移動をした PWM 制御系の応答を示したもので、パルスを遅らせることによって応答は著しく改善されている。

5. む す び

この論文では、線形な制御対象に対する準最適 PWM 制御系を、状態ベクトルをフィード・バックする閉ループで構成する方法を示した。ここに提案した準最適 PWM 制御系は、コントロールを決定するアルゴリズムの簡単さから DDC への適用に対して有効である上に、シミュレーションの結果、最適 PWM 制御系にも十分近いものである。

ここでは 2 つの近似によって準最適 PWM 制御系を導き出した。1 つは、2. の (4) 式と (6) 式に示すように、最適系におけるパフォーマンス・インデックスの値をシステムの初期状態の関数として解析的にあらわすためのものであり、他の 1 つは、3. の (29) ~ (31) 式で述べたように、 $\delta J^* = 0$ をあらわす直線の x_1 および σM に対する係数を τ の 2 次式で近似して制御のアルゴリズムを簡単化するためのものである。後者は、与えられたプロセスについて個々に実行すべきものであり、任意のプロセスに対してどれくらい正しく近似できるかという理論的な評価はない。しかし、システムの物理的な考察から、これらの係数は Fig. 1 (b) に示すように単調で比較的小さな関数となるであろうことは十分予想される。実際にも、3. の 2 次系の例のほかに、 $1/(s+1)^4$ であらわされる 4 次系について、その 4 つの係数に 2 次式近似を試みたが、相対誤差はすべての τ に対して 1% 以下におさえられており、これによっても 2 次式近似の有効さをたしかめることができた。また、場合によっては、 τ をいくつかの区間に分割して、それぞれの区間に 2 次近似を行なうことも考えられよう。

いっぽう、PWM 制御のパルスの位置については、サンプリング区間の中間あるいはうしろにおくものも、可能性としては考えられてはいるが、実際には従来の PWM 制御の大部分はサンプリング区間の先頭におくものである。ここでは、それはおおくの場合に妥当で

はあるが、ある特別な場合にはパルスの位置を移動したほうがよいことを指摘し、その具体策を与えた。

参 考 文 献

- 1) R.E.Andeen : Analysis of Pulse Dilation Sampled-Data Systems with Linear Elements, IRE Trans. on Automatic Control, **AC-5**, 306/313 (1960)
- 2) F.R.Delfeld & G.J.Murphy : Analysis of Pulse-Width-Modulated Control Systems, IRE Trans. on Automatic Control, **AC-6**, 283/292 (1961)
- 3) T.T.Kadota & H.C.Bourne, Jr. : Stability Conditions of Pulse-Width-Modulated Systems through the Second Method of Lyapunov, IRE Trans. on Automatic Control, **AC-6**, 266/276 (1961)
- 4) W.L.Nelson : Pulse-Width Relay Control in Sampling Systems, J. Basic Engrg., Trans. ASME, ser. D, Vol. 83, 65/76 (1961)
- 5) E.Polak : Stability and Graphical Analysis of First-Order Pulse-Width-Modulated Sampled-Data Regulator Systems, IRE Trans. on Automatic Control, **AC-6**, 276/282 (1961)
- 6) E.I.Jury & T.Nishimura : On the Periodic Modes of Oscillation in Pulse-Width-Modulated Feedback Systems, J. Basic Engrg., Trans. ASME, ser. D, Vol. 84, 71/84 (1962)
- 7) E.I.Jury & T.Nishimura : Stability Study of Pulse-Width-Modulated Feedback Systems, J. Basic Engrg., Trans. ASME, ser. D, Vol. 86, 80/86 (1964)
- 8) G.J.Murphy & S.H.Wu : A Stability Criterion for Pulse-Width-Modulated Feedback Control Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-9**, 434/441 (1964)
- 9) R.A.Skoog : On the Stability of Pulse-Width-Modulated Feedback Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-13**, 532/538 (1968)
- 10) E.Polak : Minimum Time Control of Second Order Pulse-Width-Modulated Sampled-Data Systems, J. Basic Engrg., Trans. ASME, ser. D, Vol. 84, 101/109 (1962)
- 11) E.Polak : Minimal Time Control of a Discrete System with a Nonlinear Plant, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-8**, 49/56 (1963)
- 12) G.J.Murphy & T.Meksawan : Optimal Synthesis of Linear Pulse-Width-Modulated Computer-Controlled Systems, J. of the Franklin Inst., **277-2**, 128/139 (1964)
- 13) D.E.Kirk : Optimization of Systems with Pulse-Width-Modulated Control, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-12**, 307/309 (1967)
- 14) A.H.Levis, R.A.Schlueter & M.Athans : On the Behavior of Optimal Linear Sampled-Data Regulators, Int. J. Control, **13-2**, 343/361 (1971)
- 15) R.E.Kalman & J.E.Bertram : Control System Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov, J. Basic Engrg., Trans. ASME, ser. D, Vol. 82, 371/400 (1960)