非線形制御系の可制御性†

山本 祥弘・杉浦 一郎

名古屋大学工学部 名古屋市千種区不老町

(昭和 46 年 11 月 9 日 受付)

On Controllability for Nonlinear Control Systems

Yoshihiro YAMAMOTO and Ichiro SUGIURA

(Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya)

(Received November 9, 1971)

Many results for nonlinear systems have been obtained concerning the existence of an optimal control under the assumptions that a certain convexity condition holds and the system is controllable. However, it is not at all obvious when a given nonlinear system is controllable, particularly, if the system operates only over a limited time interval.

In this paper, we first formulate this problem as an existence problem of fixed points for two nonlinear operator equations with some parameters in function spaces.

On some assumptions, we show first that each nonlinear operator has a fixed point; $x = P_v(x)$, $u = Q_v(u)$, and second that there exists a set of fixed points which simultaneously satisfy the two nonlinear operator equations; $x = P_u(x)$, $u = Q_x(u)$. Finally, it is shown that the pair of above mentioned fixed points is a solution of the original controllability problem, from which a sufficient condition is derived for controllability of nonlinear systems.

1. 緒 言

非線形系に対する最適制御の存在については、有名な Fillipov の論文¹⁾以後、いくつかの結果を得ている^{2,3)}。それらの多くは、ある凸性の条件と、系が可制御であるという仮定のもとに展開されているが、線形系の場合と異なり、対象が非線形の時には、与えられた系が可制御であるかどうか、特に、制御区間があるかじめ与えられた有限区間の場合の可制御性の問題については、明らかにされていない。

古くから知られている非線形系の可制御性の研究としては、L. Markus らのもの^{4,5)}がある。これは、原点に対して大局的漸近安定化可能であり、かつ原点近傍の局所可制御をその十分条件として得たものである。この結果は、その一般性においてはすぐれたものであるが、具体的な系に適用した時の検証において、やっかいな問題を含んでいる。

いっぽう、別の流れとして、不動点定理を利用したものがある。不動点定理はその1つとして、非線形常

微分方程式の解の存在に関する研究に使われているが、同様な考え方により、Ivin Tarnov⁶⁾は、一般的な非線形制御系を、適当な処理の後、可制御性を set-valued mapping に対する不動点問題としてとらえ、その十分条件を得ているが、これも、具体例への適用において問題点を含んでいる。さらに最近、Davison⁷⁾らは、制御の項を線形に含む、ある型の非線形系に対して不動点定理を利用し、すぐれた結果を得ている。

本論は、Davison らと類似な手法により、一般的な非線形制御系に対する可制御問題を、関数空間における不動点問題としてとらえ、その十分条件を得ようとするものである。この結果は、通常の可制御性、および指定された有限制御区間、いずれの場合にも適用可能である。

不動点定理は種々多様に得られているが、この不動点の概念は上に述べたように非線形系の研究に非常に有効であり、筆者らは非線形系の最適フィードバック制御とその解の存在についても基本的に同じ考え方から二、三の結果を得ている⁸⁾。

† 第 10 回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭 46・8)

2. 問題の記述

ここでは、次式によって記述される非線形制御系を考える。

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u + f(x, u, t) \quad (1)$$

ここに x は n 次の状態ベクトル, u は m 次の制御ベクトル, f は非線形項を表わす n 次ベクトル, $A(t)$, $B(t)$ はおのおの $n \times n$, $n \times m$ のマトリクスで, t に関してたかだか区分的連続とする。

考える問題は, $t=t_0$ のとき $x(t_0)=x_0$ の系 (1) を $t=t_f$ で任意の状態 x_f に到達させ得るかどうか, ということである。すなわち, 可制御問題であり, この定義を次のように定める。

【定義】 制御区間 $[t_0, t_f]$ が与えられたとき, ある許容制御 $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f$, が存在して, 初期状態 $x(t_0)=x_0$ の系 (1) を, 指定された時刻 $t=t_f$ で $x(t_f)=x_f$ とすることができるとき, 系 (1) は, (x_0, t_0) から (x_f, t_f) へ可制御であるという。また, これが任意の x_0, x_f に対し成立するとき, 系 (1) は $[t_0, t_f]$ で完全可制御であるという。

つぎに, 以下の議論に必要な条件をあげておく。

【条件】

1) 許容制御関数のクラス U は, 時間区間 $[t_0, t_f]$ 上でのあらゆるベクトル値連続関数 $u; [t_0, t_f] \rightarrow R^m$, よりなる集合 $C[t_0, t_f]$ とする。

2) $f(x, u, t)$ は $(x, u, t) \in R^n \times R^m \times [T]$ について一様連続であり, 次式を満たすものとする。

$$|f(x, u, t)| \leq L$$

ここに, L は正の定数である。ただし, n 次元ベクトル空間 R^n の元 x のノルムを,

$$|x| = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

で表わし, 連続関数 $x; [t_0, t_f] \rightarrow R^n$, よりなるバナッハ空間 $C_n[T]$ の元 x のノルムを,

$$\|x\| = \max_{t \in T} |x(t)|$$

で示すことにする。さらに, マトリクス $G(t)$ のノルムを,

$$|G(t)| = \sum_{i,j=1}^n |g_{ij}(t)| \text{ where } G(t) = \{g_{ij}(t)\}$$

とし, 時間関数としてのノルムを,

$$\|G\| = \max_{t \in T} |G(t)|$$

として記す。すなわち, 記号の便宜上 $\|\cdot\|$ で時間関数のノルムをあらわし $|\cdot|$ と区別し, ベクトルとマトリクスの区別はしないことにするが, それは内容から明らかであろう。また, $[t_0, t_f]$ を以下 $[T]$ と略記する。 x, G 以外の変数もこれに準ずる。

3) $\|A(t)\| = M_a, \|B(t)\| = M_b$ とおくと仮定から M_a, M_b は有限な正の定数である。

3. 問題の定式化

(1) 式の可制御問題を関数空間における不動点問題に帰着せしめるために, まず, つぎのような簡単な系について議論する。

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u + f(y(t), v(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

ただし, $y(t) \in C_n[T], v(t) \in C_m[T]$

これは, 各 $y(t), v(t)$ に対して x, u に関する線形系になっているから, その解は容易に求まり, 次のようになる。

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)f(y(\tau), v(\tau), \tau)d\tau \quad (3)$$

ここに, $\Phi(t, t_0)$ は (2) 式の遷移行列で, 次式を満たす。

$$d\Phi(t, t_0)/dt = A\Phi(t, t_0) \\ \Phi(t_0, t_0) = 1 \quad (4)$$

線形理論でよく知られているように^{5,9)}, もし (2) 式が $[t_0, t_f]$ で完全可制御であれば, 初期状態 $x(t_0)=x_0$ の系 (2) を $x(t_f)=x_f$ に移す制御が存在する。いま, つぎのような制御を考える。

$$u(t) \equiv u(t, t_0, t_f; y, v) \\ = H'(t_0, t)G(t_0, t_f)^{-1}[\Phi(t_f, t_0)^{-1}x_f \\ - x_0 - \phi(t_f, y, v)] \quad (5)$$

ここに,

$$H(t_0, t) = \Phi(t_0, t)B(t) \quad (5.1)$$

$$G(t_0, t) = \int_{t_0}^t H(t_0, \tau)H'(\tau, t_0)d\tau \quad (5.2)$$

$$\phi(t, y, v) = \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)f(y(\tau), v(\tau), \tau)d\tau \quad (5.3)$$

(5) 式で示される制御 u が存在するためには, $G(t_0, t_f)^{-1}$ が存在すればよい。すなわち, マトリクス $G(t_0, t_f)$ が正定値であるとすれば, (5) 式を (3) 式に代入して,

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\{x_0 + G(t_0, t)G(t_0, t_f)^{-1} \\ \times [\Phi(t_f, t_0)^{-1}x_f - x_0 - \phi(t_f, y, v)] \\ - \phi(t, y, v)\} \quad (6)$$

を得る。(6) 式が, $x(t_0)=x_0, x(t_f)=x_f$ を満たしていることは容易にわかる。

(6) 式, (5) 式の右辺を各々 y のようにおく。

$$P_0(y)(t) = \Phi(t, t_0)\{x_0 + G(t_0, t)G(t_0, t_f)^{-1} \\ \times [\Phi(t_f, t_0)^{-1}x_f - x_0 - \phi(t_f, y, v)] \\ + \phi(t, y, v)\} \quad (7)$$

$$Q_y(v)(t) = H'(t_0, t)G(t_0, t_f)^{-1}[\Phi(t_f, t_0)^{-1}x_f - x_0 - \phi(t_f, y, v)] \quad (8)$$

すると, (6) 式, (5) 式は, おおの, (9)

$$x = P_v(y) \quad (9)$$

$$u = Q_y(v) \quad (10)$$

ただし, $x, y \in C_n[T]$, $u, v \in C_m[T]$

と表わされる.

ここで, もし (2) 式において適当に選ばれた y, v が, (6), (5) 式から得られる x, u におおの等しければ, この解は, もとの系 (1) の解とも見なすことができる. すなわち, 系 (1) の可制御性は, (9), (10) 式を同時に満たす不動点 x^*, u^* ; $x^* = P_{u^*}(x^*)$, $u^* = Q_{x^*}(u^*)$ の存在問題に帰結された.

4. 不動点問題

系 (2) が条件 2), 3) を満たすとすれば, (6) 式から,

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \|\Phi\| \{ |x_0| + \|G(t_0, t_f)^{-1}\| \times [\|\Phi(t_f, t_0)^{-1}\| \\ &\quad \times |x_f| + |x_0| + |\phi(t_f, y, v)| + \|\phi\|] \} \\ &\leq e^{M_a(t_f-t_0)} \{ (1+C)|x_0| + C|x_f|e^{M_a(t_f-t_0)} \\ &\quad + (1+C)e^{M_a(t_f-t_0)}L(t_f-t_0) \} = K_P \end{aligned} \quad (11)$$

ここに条件 2), 3) から,

$$\begin{aligned} \|\Phi\| &\leq e \int_{t_0}^{t_f} \|A(\tau)\| d\tau \leq e^{M_a(t_f-t_0)} \\ \|G\| &= \left\| \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) B(\tau) B'(\tau) \Phi'(t_0, \tau) d\tau \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t_f} \|\Phi(t_0, \tau)\| \cdot \|B(\tau)\| \cdot \|B'(\tau)\| \cdot \\ &\quad \|\Phi'(t_0, \tau)\| d\tau \leq e^{2M_a(t_f-t_0)} \cdot M_b^2(t_f-t_0) \\ |\phi| &\leq \|\phi\| = \left| \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) f(y(\tau), v(\tau), \tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t_f} \|\Phi(t_0, \tau)\| \cdot \|f(y(\tau), v(\tau), \tau)\| d\tau \\ &\leq e^{M_a(t_f-t_0)} \cdot L(t_f-t_0) \\ C &= e^{2M_a(t_f-t_0)} M_b^2(t_f-t_0) \|G(t_0, t_f)^{-1}\| \end{aligned}$$

を用いている. 同様に, u についても (5) 式から,

$$\|u\| \leq K_Q \quad (12)$$

なる K_P, K_Q が存在する.

したがって, (9), (10) 式での y, v に対して, おおの,

$$D_P = \{y | y \in C_n[T], \|y\| \leq K_P\} \quad (13)$$

$$D_Q = \{v | v \in C_m[T], \|v\| \leq K_Q\} \quad (14)$$

なる定義域を考えれば, 十分である. これらは明らかに, 有界な凸閉集合である.

【性質 1】 P_v, Q_y は完全連続な作用素である.

【証明】 P_v についてだけ述べる. Q_y は同様である. (7) 式に対し (11) 式におけると同様な計算を施

すことにより, ある正の定数 K が存在して次式を得る.

$$\begin{aligned} \|P_v(y_1) - P_v(y_2)\| &= \max_t |P_v(y_1)(t) - P_v(y_2)(t)| \\ &\leq K \int_{t_0}^{t_f} |f(y_1(\tau), v(\tau), \tau) - f(y_2(\tau), v(\tau), \tau)| d\tau \end{aligned}$$

ゆえに, f の (y, u, t) に関する一様連続の仮定より,

$$\|y_1 - y_2\| = \max |y_1(t) - y_2(t)| \rightarrow 0$$

ならば,

$$\|P_v(y_1) - P_v(y_2)\| \rightarrow 0$$

となることは明らかである. すなわち, P_v は $y \in C_n[T]$ に関して連続な作用素である.

いっぽう, $P_v(y)$ の定義式 (7), および (5.2), (5.3) の形から, 任意の ε に対し, もし $|t-t'| \leq \delta$ であれば, $|P_v(y)(t) - P_v(y)(t')| \leq \varepsilon$, となる δ が存在することは明らかである. すなわち, $P_v(y)$ は同程度連続であり, さらに (11) 式から一様有界である. したがって Ascoli の定理により, $P_v(y)$ は $C_n[T]$ において相対コンパクトである. ゆえに, 作用素 P_v はコンパクト (完全連続) 作用素である¹¹⁾. (証明終)

【性質 2】 作用素 P_v, Q_y は, パラメータ v, y の作用素としておおの一様連続である.

【証明】 $f(y, v, t)$ の $(y, v, t) \in R^n \times R^m \times [T]$ に関する一様連続の仮定により, おおの (7), (8) 式から, 性質 1 の前半の証明と同様にして証明される.

つぎに, 以下で用いる Schauder の不動点定理^{12), 13)} および, これを set-valued mapping に拡張した Bohnenblust-Karlin の定理¹⁴⁾ を述べる.

【定理】(Schauder) D を線形, 局所凸, 完備ハウスドルフ空間 (たとえばバナッハ, またはフレッシュ空間) とする. さらに S を D の閉凸部分集合とし, T を S から自身への連続作用素とする. このとき, もし, S の像 TS がコンパクトな閉包をもてば, 作用素 T は, S の中に不動点 $x^0, x^0 = Tx^0$, をもつ.

【定理】(Bohnenblust-Karlin) S をバナッハ空間の凸閉集合とし, S の元 x に空でない集合 $R(x) \subset S$ があたえられたとする. このとき, 条件,

(a) $x_n \rightarrow x; y_n \rightarrow y; y_n \in R(x_n)$ であれば $y \in R(x)$.

(b) $\bigcup_{x \in S} R(x)$ がある点列コンパクト集合に含まれる.

を満たせば, 不動点 $x_0; x_0 \in R(x_0)$, が S の中に存在する.

この定理から, 以下の結果が容易に得られる.

【補題 P-1】 もし系 (2) が条件 1), 2), 3) を満たせば, (9) 式 $x = P_v(y)$ は各 $v \in C_m[T]$ に対して, 不動点 x_v^* ; $x_v^* = P_v(x_v^*)$, をもつ.

【証明】 P_v の定義域として (13) 式のようにと

れば、構成から明らかのように、 $R_P \subset D_P$ 、である。
ただし、 R_P は作用素 P_v の定義域 D_P に対する値域を表わす。さらに、作用素 P_v が完全連続であるから、 R_P はコンパクトな閉包を持つ。したがって、Schauder の定理から不動点の存在が保証される。

【補題 Q-1】 もし系 (2) が条件 1), 2), 3) を満たせば、(10) 式 $u = Q_y(v)$ は各 $y \in C_n[T]$ に対して、不動点 u_y^* ; $u_y^* = Q_y(u_y^*)$ 、をもつ。

【証明】 [補題 P-1] と同様。

【補題 P-2】 もし連続作用素 P_v が、パラメータ v の作用素として一様連続であれば、(9) 式 $x = P_v(y)$ の解 x_v^* もまた v に関して連続である。

【証明】 任意の点列 $\{v_n\}$; $v_n \in D_Q \subset C_m[T]$, $v_n \rightarrow v_0$ をとると、各 v_n に対し (9) 式の解 $x_{v_n}^*$ が存在する。また $v_0 \in D_Q$ にとっているから、これに対する (9) 式の解を $x_{v_0}^*$ とする。 $\{x_{v_n}^*\}$ は相対コンパクト集合 R_P における無限点列より、収束する部分列が存在する。これを再び同じ記号を用い、 $x_{v_n}^* \rightarrow x_{v_0}^*$ とする (ただし一般に、 $x_{v_0}^*$ は $C_n[T]$ の元ではあるが、 R_P にはいっているとは限らない)。この $x_{v_n}^*$ に対応する v_n も明らかに v_0 に収束する。

いま、任意に小さい正数 ε が与えられたとすると、 $P_v(y)$ の y に関する連続性により、 $P_{v_0}(x_{v_n}^*) \rightarrow P_{v_0}(x_{v_0}^*)$ 、すなわち $n > N_1(\varepsilon)$ なるあらゆる n に対して、

$$\|P_{v_0}(x_{v_n}^*) - P_{v_0}(x_{v_0}^*)\| \leq \varepsilon/4 \quad (15)$$

を満たすようなある十分大きい正数 N_1 が存在する。

さらに P_v のパラメータ v に関する一様連続性により、 $m > N_2(\varepsilon)$ なるあらゆる m に対して、

$$\|P_{v_m}(x_{v_n}^*) - P_{v_0}(x_{v_n}^*)\| \leq \varepsilon/4 \quad (16)$$

および、 $n, m > N_3(\varepsilon)$ なる n, m に対し、

$$\|P_{v_n}(x_{v_n}^*) - P_{v_m}(x_{v_n}^*)\| \leq \varepsilon/4 \quad (17)$$

を満たす N_2, N_3 が存在する。同様に、 $x_{v_n}^* \rightarrow x_{v_0}^*$ により、 $n > N_4(\varepsilon)$ なるあらゆる n に対し、

$$\|x_{v_0}^* - x_{v_n}^*\| \leq \varepsilon/4 \quad (18)$$

を満たす N_4 が存在する。ここで $N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N_3(\varepsilon), N_4(\varepsilon)$ のうちで最大のものを $N(\varepsilon)$ とすると、 $n, m > N(\varepsilon)$ なるあらゆる n, m に対し (15)~(18) 式はすべて満たされる。すると、

$$\begin{aligned} & \|x_{v_0}^* - P_{v_0}(x_{v_0}^*)\| \\ & \leq \|x_{v_0}^* - x_{v_n}^*\| + \|P_{v_n}(x_{v_n}^*) - P_{v_m}(x_{v_n}^*)\| \\ & \quad + \|P_{v_m}(x_{v_n}^*) - P_{v_0}(x_{v_n}^*)\| + \|P_{v_0}(x_{v_n}^*) - P_{v_0}(x_{v_0}^*)\| \\ & \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (19)$$

これが任意の ε に対して成立するから、 $x_{v_0}^*$ は $x = P_{v_0}(y)$ の解でなければならない。すなわち、 $x_{v_0}^* = x_{v_0}^*$ となり、 $x_{v_0}^*$ の点 v_0 における v に関する連続性がいえた。これがまた、あらゆる $v \in D_Q$ に対していえる

ことより補題が証明された。

ただし、上記の証明は (9) 式の解が一意である場合に対してであるが、もし解が一意でない場合、 v の作用素としての P_v は set-valued mapping となり、この連続の定義を、 $v_n \rightarrow v_0$; $x_n \rightarrow x_0$; $x_n \in \{x_{v_n}\}$ のとき $x_0 \in \{x_{v_0}\}$ 、と定めることにすると、同様に、 $x_{v_0}^* \in \{x_{v_0}\}$ の結論が示される。ここに、 $\{\cdot\}$ は解の集合を表わす。

【補題 Q-2】 もし連続作用素 Q_y が、パラメータ y の作用素として一様連続であれば、(10) 式 $u = Q_y(v)$ の解 u_y^* もまた y に関して連続である。

【証明】 [補題 P-2] と同様。

【補題 3】

$$x = P_v(y) \quad (9)$$

$$u = Q_y(v) \quad (10)$$

がおのおの [補題 P-1, P-2], [補題 Q-1, Q-2] の条件を満たすとする。このとき (9), (10) 式を同時に満たす不動点 x^*, u^* ; $x^* = P_{u^*}(x^*)$, $u^* = Q_{x^*}(u^*)$ が存在する。

【証明】 $u = Q_y(v)$ の解は一般に y に依存する。これを、

$$u_y^* = u^*(y) \quad (20)$$

とかくと、条件より $u^*(y)$ は y の連続関数となる。

これを (9) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} x &= P_v(y) = P(y, v) \\ &= P(y, u^*(y)) = P'(y) \end{aligned} \quad (21)$$

もし、(9), (10) 式がおのおの一意な解をもつとすれば、構成より明らかに、 P' もまた連続作用素であり Schauder の定理を満足する。次に、(9), (10) 式の少なくともいずれか一方の解が一意でない場合には Bohnenblust-Karlin の定理の条件 a), b) を満たすことを示そう。いま、 $y_n \rightarrow y_0$, $x_n \rightarrow x_0$, で (x_n, y_n) は (21) 式を満たすように与えられたとする。すると (x_n, y_n) が (21) 式の解であるから [補題 Q-1] より各 y_n に対し (10) 式の解 u_n が存在してこの u_n に対し、 (x_n, y_n) は (9) 式を満たす。したがって [補題 Q-2] により、必要ならば部分列をとることにより、 $u_n \rightarrow u_0 \in D_Q$, で $u_0 \in \{u_{y_0}\}$ とすることができる。ただし $\{u_{y_0}\}$ は y_0 に対する (10) 式の解の集合である。これより、[補題 P-2] の証明と同様な方法により、 (x_0, y_0, u_0) が (21) 式を満たすことが示される。条件 b) に対しては性質 1 と同様にして $P'(D_P)$ は $C_n[T]$ の部分集合として有界であり、同程度連続である。ゆえに Ascoli の定理により $P'(D_P)$ は相対コンパクトであり、けっきょく、 $P'(D_P)$ はコンパクト集

† 厳密には半連続であるが、本論ではこれで十分である。

合、したがって点列コンパクト集合に含まれる。したがって、いずれにしても (21) 式を満たす不動点が存在し、これを x^* と書く。またこれを (20) 式に代入して、 u^* を得る。この x^* , u^* で (9), (10) 式の解となることは明らかである。

以上の補題により、もとの系 (1) が完全可制御であるための十分条件は容易に得られる。これをつぎの定理にまとめてみる。

【定理】 非線形制御系、

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u + f(x, u, t)$$

は、つぎの条件 I), II) を満足するとき, $[t_0, t_f]$ で完全可制御である。

I) $f(x, u, t)$ は $(x, u, t) \in R^n \times R^m \times [T]$ について一様連続であり、次式を満たすものとする。

$$|f(x, u, t)| \leq L$$

ここに、 L は正の定数。

II) $G(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, t) B'(t) B(t) \Phi'(t_0, t) dt$

は正定値である。

5. 考 察

1) 本論で示した可制御性の定義は Gershwins¹⁰⁾ により与えられたものである。しかしここで求めた非線形制御系の完全可制御のための十分条件は、よく知られた Kalman による定義⁹⁾『任意の2つの状態 x_0 , x_f が与えられたとき、ある有限区間 $[t_0, t_f]$ とその区間にわたる許容制御 $u(t)$ が存在して、時刻 t_0 で $x(t_0) = x_0$ の系の状態を時刻 t_f で $x(t_f) = x_f$ とすることができるとき、系は時刻 t_0 で完全可制御であるという』に対しても簡単な修正により成立する。すなわち、この場合に対しては、条件 II) のマトリクス $G(t_0, t_f)$ が正定値となるような t_f の存在を示し、この t_f に対して条件 I) が $T = [t_0, t_f]$ 上で成立すればよいことになる。ここに示した Kalman による定義の他にもいくつかの定義がなされているが（たとえば totally controllable など）、本論の結果は同様な簡単な言い換えにより適用されることができる。このように、得られた結果の式の上では、いずれの定義を選んでも大きな違いは表われないが、その制御区間が定められているか、あるいは自由であるかということは、とくに非線形系の可制御問題に対しては本質的な問題である。なぜなら、線形系の可制御性に対しては、1) 時間固定系の場合は、可制御性が制御区間 $[t_0, t_f]$ に依存しない。2) 時間可変系の場合は、 $[t_0, t_f]$ で可制御であれば、 $[t_0, t_1]$; $\forall t_1 \geq t_f$ でもつねに可制御である。などの性質が一般に成立するが、非線形系に

対しては、これらの性質が成立するとは限らないからである。

2) 本論で扱った非線形系 (1) 式は、次のような考え方により、一般的な非線形系、

$$dx/dt = f^0(x, u, t) \quad (1')$$

を表わし得るものと考えられる。

i) $f^0(x, u, t)$ が x, u に関しておのおの連続微分可能なとき。あるいは、より一般に、

ii) 適当に選んだ A, B に対し、

$$f(x, u, t) = f^0(x, u, t) - Ax - Bu$$

とおくことにより、(1') 式は (1) 式の形で表わされる。

このように、本論は任意の非線形系をその制御対象として考察したものであるが、結果の適用範囲はその一部の系に対してのみである。これは十分条件の宿命であるが、より広い十分条件が望まれる。

(1) 式においてマトリクス A, B を x の関数としても簡単な修正により本論の議論を進めることが可能であるが、詳細は文献 7) を参照されるとよい。

3) ここで求めた結果は、その形が簡潔であり、たとえば、線形部 (A, B) が可制御であり、そして $f(x, u, t)$ が、三角関数; $\sin x, \cos u$ など、飽和のある連続な非線形要素; $\text{sat}[x]$ など、およびこれらの和、積で表わされるような一様有界性を持つものは一見して可制御であると断言できる。しかしながらこれらの関数は一般の非線形関数としてはごく一部であり、したがって、条件が強すぎる欠点をもつ。

制御対象として特定のもの、たとえば制御の項を線形に含む非線形系に対しては、よりゆるい条件の結果が得られるであろう。

6. 結 言

本稿では、任意の非線形制御系に対する可制御問題を、関数空間における不動点問題として定式化し、その十分条件を求めた。許容制御関数のクラスとして、通常 C であらわされる連続関数の空間に限定したが、可制御な解の存在を保証する立場からは、これで、かなり十分なものといえる。また、この結果は、その形が簡単であるという利点を持つ。その反面、一般性においては十分とはいえず、今後の研究が期待される。さらに、本論の考え方は、可制御性のみならず、非線形系の最適制御の研究にも活用されるものであり、一般的な非線形系に対する統一的手法になり得るものと期待される。

最後に、日ごろ熱心な討論をいただく本学の早勢実助教授をはじめとする研究室の諸氏に感謝の意を表

します。また本研究に対し貴重な御意見をいただき
ました査読委員にお礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) A. F. Fillipov : On Certain Questions in the Theory of Optimal Control, SIAM J. Control, Vol. 1, 76/84 (1962)
- 2) E. Roxin : The Existence of Optimal Controls, Michigan Math. Journ., 9, 109/119 (1962)
- 3) L. W. Neustadt : The Existence of Optimal Controls in the Absence of Convexity Conditions, J. Math. Anal. Appl., 7, 110/117 (1963)
- 4) L. Markus : Controllability of Nonlinear Processes, SIAM J. Control, Vol. 3, 78/90 (1965)
- 5) E. B. Lee and L. Markus : Foundations of Optimal Control Theory, John-Wiley (1967)
- 6) Ivin Tarnov : A Controllability Problem for Nonlinear Systems, in Mathematical Theory of Control (Eds. A. V. Balakrishnan and L. W. Neustadt), Academic Press 170/179 (1967)
- 7) E. J. Davison and E. C. Kunze : Some Sufficient Conditions for the Global and Local Controllability of Nonlinear Time Varying Systems, SIAM J. Control, Vol. 8, 489/497 (1970)
- 8) 山本・杉浦 : 非線形制御系の最適制御とその解の存在, システムと制御, 16-8 (1972)
- 9) R. E. Kalman, Y. C. Ho and K. S. Narendra : Controllability of Linear Dynamical Systems, in Contributions to Differential Equations, Vol. 1, John-Wiley (1962)
- 10) S. B. Gershwin and D. H. Jacobson : A Controllability Theory for Nonlinear Systems, IEEE Trans. on A.C., Vol. 16, 37/46 (1971)
- 11) J. Dieudonne : Foundations of Modern Analysis, Academic Press (1960)
- 12) L. W. Kantorovich and G. P. Akilov : Functional Analysis in Normed Spaces, Pergamon Press (1964)
- 13) P. Hartman : Ordinary Differential Equations, John-Wiley (1964)
- 14) H. F. Bohnenblust and S. Karlin : On a Theorem of Ville; Annals of Mathematics Studies, No. 24, Princeton (1950)