定係数線形系の可同定性

菅 沼 義 昇・伊 藤 正 美

名古屋大学工学部 名古屋市千種区不老町
(昭和 47 年 2 月 24 日 受付)

Identifiability of Linear Time-Invariant Systems

Yoshinori SUGANUMA and Masami ITO

(Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya)
(Received February 24, 1972)

This paper presents conditions for deterministic identifiability and stochastic identifiability of linear time-invariant systems with multiple inputs and outputs. The main difficulty in treating systems with multiple inputs and outputs is that there is not such a simple canonical form as there is for systems with single inputs and outputs. Therefore this paper utilizes the method for the identification of a deterministic system which was given by B. Gopinath and extends it to a stochastic system. The concepts of identifiability in this paper are an extension of those of R. M. Staley and P. C. Yue.

1. ま え が き

入出力の観測から制御対象の動特性を決定する同定問題は、制御系を設計するさいに最初に解決しなければならない重要な問題である。したがってこれまでも多くの研究がなされてきたが、その研究の多くは同定方法に集中していた。しかし、同定方法を論ずる前に入出力にどれほどの情報があればシステムを同定することができるかという可同定性の問題を検討しておくことは、システムの動的な構造を基本的に理解するという点だけでなく、有効な同定方法を選ぶという上からも重要な問題であろう。特に、状態方程式を基礎に展開された現代制御理論が、古典制御に比べて、

i) システムの初期状態に注目したため、動的な挙動が明確になったこと。

ii) 多入力多出力系を1入力1出力系と同じように取扱えるようになったこと。

などの特徴を持っていることを考えると、状態方程式の決定の問題として可同定性の問題を考慮しておくことは意義が大きい。本稿はこのような背景の下に、定係数線形系の可同定性問題を論じたものである。

可同定性の問題をはじめて論じたのは R. C. K. Lee¹⁾

である。彼は雑音のない場合に対する可同定性の定義を与え、1 出力自由系について出力より未知パラメータが一意に決定できるための条件を示した。その後、R. M. Staley と P. C. Yue²⁾ は Lee の定義を1入力1出力系に対して拡張し、同様の議論を行なった。また M. Aoki³⁾ はカルマン・フィルタ⁴⁾ を利用して雑音のある場合における線形系の可観測性⁵⁾ の定義を与えた。そして、この可観測性の定義に動機づけられて、R. M. Staley と P. C. Yue²⁾ が雑音のある場合における可同定性の定義を、不偏推定量に対する Cramér-Rao lower-bound⁶⁾ に基づいて、1 入力1出力系に対して与えた。一般に、ある系が同定可能であるか否かは、同定の方法によるものではなく、系そのもののもつ固有の性質によって定まるものである。したがって、彼らの与えた定義は M. Aoki の可観測性の定義と異なり、推定が漸近的有效推定量であるという条件だけで、その推定方法には依存しない利点をもつゆえ、好ましい。

本論文は、上の R. M. Staley と P. C. Yue の2つの定義を多入力多出力系に拡張し、可同定の条件を検討したものである。多入力多出力系の難しさは、1 入力1出力系の場合に利用した可観測規準形のような簡単な規準形が存在しないところにある。ところが、特

別な場合として出力行列 C が系の次数と同じ n 次の正方行列で、かつその階数が n の場合には 1 入力 1 出力系と同様な取扱いができる。本稿では最初にこの特別な場合を 3. で検討し、ついで一般的な場合を 4. で論ずる。一般的な場合に対しては、B. Gopinath⁷⁾によって与えられた雑音のない場合に対する同定の方法を利用して雑音のある場合に拡張する。

2. 可同定性の定義

次の系について考える。

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + \xi(k) \\ y(k) &= Cx(k) + \eta(k) \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで、 A, B, C はそれぞれ $n \times n, n \times p, m \times n$ の定数行列であり、決定されるべき未知パラメータとする。また、 $x(k), u(k), y(k)$ はそれぞれ $n \times 1, p \times 1, m \times 1$ のベクトルであり、 $\xi(k), \eta(k)$ はそれぞれ $n \times 1, m \times 1$ の雑音ベクトルとする。さらに、系は完全可観測であるとする。まず最初に雑音のない場合 ($\xi = \eta = 0$) の可同定性の定義を与えよう。ただし、定義中の f は、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

$$f \triangleq [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]^T : n(n+p) \times 1 \quad (2.2.2)$$

とする。また、この定義は、3. のはじめにのべるように、(2.1) 式に等価なある 1 つの系に対して与える。したがって、 C を指定する

【定義 1】 (2.1) 式に等価なある 1 つの系について、そのパラメータ f が入力系列 $\{u(i)\}$ 、出力系列 $\{y(i)\}$ より一意に決定できるならば、そのパラメータ f は「確定的に可同定 (Deterministic Identifiable 以下 D.I. と略す)」であるという。

次に雑音のある場合に対しては次のように定義する。

【定義 2】 上と同様の f について、もし f の漸近的有效推定量 $\hat{f}$ が 2 乗平均の意味で f に収束するならば、パラメータ f は「確率的に可同定 (Stochastic Identifiable 以下 S.I. と略す)」であるという。

3. 特別な場合

系 (2.1) について考える。ただし $m=n$ であり、かつ、 C の階数は n とする。まず最初に雑音のない場合 ($\xi = \eta = 0$) について考える。結局問題は $\{u(i)\}$ 、 $\{y(i)\}$ を測定することによって、 A, B, C の値を一意に決めることができるか否かということになるが、一般にこれは不可能である。なぜなら、状態ベクトルの選び方によって無数の等価な系が存在するからであ

る⁸⁾。したがって、先に述べたように、可同定性の定義は (2.1) 式に等価なある 1 つの系に対して (つまり、状態ベクトルの組を 1 つ定めて)、与えてある。さて、 $m=n, \text{rank} C=n$ と仮定したから、適当な状態ベクトルのえらび方により、 C を単位行列とすることができる。それゆえ、ここでは C として n 次の単位行列を選びその系についての可同定性を論ずることにする。 $\xi(k) = \eta(k) = 0$ とすれば、(2.1) 式より、

$$y(k+1) = H(k)f \quad (3.1)$$

を得る。ただし f は (2.2) 式とし、

$$H(k) = \begin{bmatrix} y^T(k) & 0 & u^T(k) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ 0 & y^T(k) & 0 & u^T(k) \end{bmatrix} : n \times n(n+p)$$

とする。さらに $y(1)$ から $y(k+1)$ を 1 つの式にまとめると、

$$y_{k+1,1} = H_{k0}f \quad (3.2)$$

となる。ただし、

$$y_{k+1,1} \triangleq [y^T(1) \cdots y^T(k+1)]^T : n(k+1) \times 1$$

$$H_{k0} \triangleq [H^T(0) \cdots H^T(k)]^T : n(k+1) \times n(n+p)$$

とする。 $y_{k+1,1}$ および H_{k0} は既知であるからこれより次の定理が言える。

【定理 1】 系 (2.1) のパラメータ f が D.I. であるための必要十分条件は、ある入力系列 $u(i)$ および出力系列 $y(i)$ ($i=0, 1, \dots, k$) が存在して

$$\text{rank } H_{k0} = n(n+p)$$

となることである。

次に H_{k0} の性質を少し調べてみよう。

【定理 1(a)】 ($x(0)=0$ の場合) H_{k0} の階数が $n(n+p)$ であるための必要条件は、

- i) $k \geq n+p-1$
- ii) 系 (2.1) が可制御
- iii) $\text{rank}[u(0) \cdots u(k)] = p$

である。

【証明】 明らかに、 H_{k0} の階数が $n(n+p)$ となることと、行列、

$$H_{k0}' \triangleq \begin{bmatrix} x(0) & \cdots & x(k) \\ u(0) & \cdots & u(k) \end{bmatrix} : (n+p) \times (k+1)$$

の階数が $(n+p)$ となることとは同値である。したがって H_{k0}' の階数が $(n+p)$ になるための必要条件を求めればよい。 H_{k0}' を変形すると、

$$H_{k0}' = \begin{bmatrix} 0 & B & AB & \cdots & A^{k-1}B & 0 \\ 0 & & & & & u(0) \cdots u(k) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \cdots & u(k) \\ 0 & u(0) & \cdots & u(k-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I_{k+1} \end{bmatrix}$$

となる。よって定理は明らかである。(証明終)

入力のない場合 (または $B=0$ の場合) を考えてみよう。この場合は決定すべきパラメータの数は n^2 個であるので可同定であるための必要十分条件は、

$$\text{rank } H_{k0} = n^2$$

となる。

【定理 1(b)】 自由系において、 H_{k0} の階数が n^2 となるための必要十分条件は、

i) $k \geq n-1$

ii) $\{A, x(0)\}$ は可制御対

である。

【証明】 前の証明と同様、入力が 0 の場合に H_{k0}' の階数が n になることを証明すればよい。

$$\begin{aligned} \text{rank } H_{k0}' &= \text{rank}[x(0) \cdots x(k)] \\ &= \text{rank}[x(0)Ax(0) \cdots A^kx(0)] \end{aligned}$$

となり、定理は明らかである。(証明終)

次に雑音のある場合について考えよう。ただし、 $\xi(k), \eta(k)$ は次のような性質をもつ正規性雑音とする。

$$E\xi(k) = E\eta(k) = 0 \quad E\xi(i)\eta^T(j) = 0$$

$$E\xi(i)\xi^T(j) = Q\delta_{ij} \quad 0 < \delta_1 I_n \leq Q \leq \lambda_1 I_n < \infty$$

ただし、 Q は正値行列で、 $\delta_1 = \inf_{\|x\|=1} x^T Q x$, $\lambda_1 = \sup_{\|x\|=1} x^T Q x$

である。次の δ_2, λ_2 も同様に定める。

$$E\eta(i)\eta^T(j) = R\delta_{ij} \quad 0 < \delta_2 I_n \leq R \leq \lambda_2 I_n < \infty$$

ただし、 E は期待値を表わすものとする。前と同様の変形を行なうと、

$$y_{k+1,1} = H_{k0}f + \nu_{k0} \quad (3.3)$$

となる。ここで、

$$\nu_{k0} \triangleq \xi_{k0} + (I_{n(k+1)} - A_{k0}E_k)\eta_{k+1,1} - A_{k0}'\eta_{k0}$$

$$\eta_{k0} \triangleq [\eta^T(0) \cdots \eta^T(k)]^T : n(k+1) \times 1$$

$$\xi_{k0} \triangleq [\xi^T(0) \cdots \xi^T(k)]^T : n(k+1) \times 1$$

$$E_k \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix} : n(k+1) \times n(k+1)$$

$$A_{k0} \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} : n(k+1) \times n(k+1)$$

$$A_{k0} \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \cdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : n(k+1) \times n(k+1)$$

とする。S.I. の定義より、 f が S.I. ならば f の推定値 $\hat{f}$ の誤差分散行列は、観測回数 k が無限大にいくとき零に収束する。また漸近的有効推定量の定義より $\hat{f}$ の誤差分散行列は、 k が大きくなると、Cramér-Rao lower-bound M_{k0}^{-1} に近づく。ここで M_{k0} は次のような行列である。

$$\begin{aligned} M_{k0} &\triangleq \int P(y_{k+1,1}|f) [V_f \ln P(y_{k+1,1}|f)] \\ &\quad \times [V_f \ln P(y_{k+1,1}|f)]^T dy_{k+1,1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

ただし、 $M_{k0} : n(n+p) \times n(n+p)$

したがって次の定理がいえる。

【定理 2】 系 (2.1) のパラメータ f が S.I. であるための必要十分条件は、 M_{k0} のすべての固有値が、 k が無限大にいくとき、無限大に向かうことである。

実際に M_{k0} を計算してみよう。(3.3) 式から、

$$\begin{aligned} Ey_{k+1,1} &= H_{k0}f \\ E[y_{k+1,1} - Ey_{k+1,1}][y_{k+1,1} - Ey_{k+1,1}]^T \\ &= E\nu_{k0}\nu_{k0}^T \triangleq P_{k0} : n(k+1) \times n(k+1) \end{aligned}$$

となる。これらより、

$$\begin{aligned} P(y_{k+1,1}|f) &= \frac{1}{(2\pi)^{n(k+1)/2} |P_{k0}|^{1/2}} \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} [y_{k+1,1} - H_{k0}f]^T P_{k0}^{-1} [y_{k+1,1} - H_{k0}f] \right\} \\ \therefore \ln P(y_{k+1,1}|f) &= \ln \frac{1}{(2\pi)^{n(k+1)/2} |P_{k0}|^{1/2}} \\ &\quad - \frac{1}{2} [y_{k+1,1} - H_{k0}f]^T P_{k0}^{-1} [y_{k+1,1} - H_{k0}f] \\ \therefore V_f \ln P(y_{k+1,1}|f) &= H_{k0}^T P_{k0}^{-1} (y_{k+1,1} - H_{k0}f) \end{aligned}$$

を得る。したがって、

$$\begin{aligned} M_{k0} &= E\{[H_{k0}^T P_{k0}^{-1} (y_{k+1,1} - H_{k0}f)] \\ &\quad \times [H_{k0}^T P_{k0}^{-1} (y_{k+1,1} - H_{k0}f)]^T\} \\ &= H_{k0}^T P_{k0}^{-1} H_{k0} \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる。ここで次の補助定理を証明しておこう。

【補助定理 1】 上の P_{k0} について、

$$\rho_1 I_{n(k+1)} < P_{k0} \leq \rho_2 I_{n(k+1)} \quad 0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty$$

なる ρ_1, ρ_2 が存在する。ただし、 ρ_1, ρ_2 は k が 3 以上ならば k に無関係な定数とする。

【証明】 最初に 2 番目の不等号を証明する。 k は 3 以上とする。 P_{k0} の定義から、

$$\begin{aligned} P_{k0} &= Q_{k0} + (I_{n(k+1)} - A_{k0}E_k)R_{k0}(I_{n(k+1)} - A_{k0}E_k)^T \\ &\quad + A_{k0}'R_{k0}'(A_{k0}')^T \end{aligned}$$

を得る。ただし、

$$Q_{k0} \triangleq \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} : n(k+1) \times n(k+1)$$

$$R_{k0} \triangleq \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} : n(k+1) \times n(k+1)$$

$$R_{k0}' \triangleq \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & \cdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : n(k+1) \times n(k+1).$$

とする。ここで R および Q に対する条件と、行列のノルムの性質を用いると、

$$P_{k0} \leq \lambda_1 I_{n(k+1)} + \lambda_2 (I_{n(k+1)} - A_{k0}E_k)(I_{n(k+1)}$$

$$\begin{aligned}
& -A_{k0}E_k)^T + \lambda_2 A_{k0}'(A_{k0}')^T \\
& \leq \|\lambda_1 I_{n(k+1)} + \lambda_2 (I_{n(k+1)} - A_{k0}E_k)(I_{n(k+1)} \\
& - A_{k0}E_k)^T + \lambda_2 A_{k0}'(A_{k0}')^T\| \times I_{n(k+1)} \\
& \leq \{\lambda_1 + \lambda_2 \|(I_{n(k+1)} - A_{k0}E_k)(I_{n(k+1)} - A_{k0}E_k)^T\| \\
& + \lambda_2 \|A_{k0}'(A_{k0}')^T\|\} \cdot I_{n(k+1)} \\
& = \{\lambda_1 + \lambda_2 \|[-A : I_n + AA^T : -A^T]\| \\
& + \lambda_2 \|AA^T\|\} I_{n(k+1)} \\
& \triangleq \rho_2 I_{n(k+1)}
\end{aligned}$$

を得る。ただし $\|\cdot\|$ は行列のノルムを表わすものとする。また、ノルムとしては無限大ノルムを入れるものとする。最初の不等号については次のようになる。

$$P_{k0} > Q_{k0} \geq \delta_1 I_{n(k+1)} \triangleq \rho_1 I_{n(k+1)} \quad (\text{証明終})$$

この補助定理から、

$$\frac{1}{\rho_2} H_{k0}^T H_{k0} \leq M_{k0} < \frac{1}{\rho_1} H_{k0}^T H_{k0}$$

がいえる。よって次の定理が成立する。

【定理 2(a)】 系 (2.1) のパラメータ f が S.I. であるための必要十分条件は、 $H_{k0}^T H_{k0}$ のすべての固有値が、 k が無限大にいくとき、無限大に向かうことである。

4. 一般の場合

この章においては、前章においてもうけた $m=n$ の条件を除く。よって一般に m は n より小さくなる。ただし C の階数は m であるとする。したがって C として次のような行列を仮定してもよい。

$$C \triangleq [I_m : 0] \quad (4.1)$$

まず最初に雑音のない場合 ($\xi=\eta=0$) を考える。主題に入る前に次のような行列を定義しておく。

【定義 3】 S は次のような性質をもつ $k \times l$ ($k \leq l$) の行列 S の集合を表わす。

- i) $S = \{s_{ij}\}$ ここで $s_{ij} = 0$ または 1
- ii) 任意の i に対して、 $s_{ij} = 1$ となるような j が 1 つだけ存在する。たとえばそれを j_i とする。
- iii) $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ $j_i \leq l$, $i < k$

この $S(\in S)$ を用いて可同定性に対する条件を求める。ただし、以後 S は既知であるものとする。系 (2.1) は可観測であるから、次のような性質をもつ $n \times nm$ の行列 $S(\in S)$ が存在する。

$$S \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = T \quad (4.2)$$

ただし T は正則な行列とする。一般性を失なうことなしに、 $T = I_n$ とすることができる。(4.2) 式の S と (2.1) 式を用いると次の式を得る。

$$S\bar{y}(k+1) = AS\bar{y}(k) + F\bar{u}(k) \quad (4.3)$$

$$B = F_0 + AF_1 + \dots + A^{n-1}F_{n-1} \quad (4.4)$$

ただし、

$$\bar{y}(k) \triangleq [y^T(k) \dots y^T(k+n-1)]^T : nm \times 1$$

$$\bar{u}(k) \triangleq [u^T(k) \dots u^T(k+n-1)]^T : np \times 1$$

$$F \triangleq -ASG + S \begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^{n-2}B & \dots & CB \end{bmatrix} : n \times np$$

$$\triangleq [F_0 F_1 \dots F_{n-1}] \quad F_i : n \times p$$

$$G \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CB & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ CA^{n-2}B & CA^{n-3}B & \dots & CB & 0 \end{bmatrix} : nm \times np$$

とする。なお、(4.3) 式および (4.4) 式の導出については文献⁷⁾を参照されたい。この 2 つの式から、もし (4.3) 式のパラメータ A と F を決定することができれば、(4.4) 式を用いて B も決定できる。けっきょく、系 (2.1) が同定できたことになる。よって以後、系 (4.3) の可同定性について論ずることとする。ここで次のベクトルおよび行列を定義する。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \bar{f} = \begin{bmatrix} f_{11} & \dots & f_{1,np} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{n,np} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$f \triangleq [a_1 \dots a_n f_1 \dots f_n]^T : (n^2 + n^2p) \times 1$$

$$\bar{y}_{k+1,1} \triangleq [(S\bar{y}(1))^T \dots (S\bar{y}(k+1))^T]^T : n(k+1) \times 1$$

$$\bar{H}(k) \triangleq \begin{bmatrix} (S\bar{y}(k))^T & 0 & \bar{u}^T(k) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & (S\bar{y}(k))^T & 0 & \bar{u}^T(k) \end{bmatrix} : n \times (n^2 + n^2p)$$

$$\bar{H}_{k0} \triangleq [\bar{H}^T(0) \dots \bar{H}^T(k)]^T : n(k+1) \times (n^2 + n^2p)$$

上の定義と (4.3) 式から、

$$\bar{y}_{k+1,1} = \bar{H}_{k0} f \quad (4.5)$$

を得る。したがって次の定理が成立する。

【定理 3】 系 (4.3) のパラメータ f が D.I. であるための必要十分条件は、ある入力系列 $u(i)$ および出力系列 $y(i)$ ($i=0, 1, \dots, k$) が存在して

$$\text{rank } \bar{H}_{k0} = n^2 + n^2p$$

となることである。

また $x(0)=0$ の場合および自由系に対しても前と同様の定理が成立する。

【定理 3(a)】 ($x(0)=0$ の場合) $\bar{H}_{k0}$ の階数が $(n^2 + n^2p)$ となるための必要条件は、

$$i) \quad k \geq n + np - 1$$

$$ii) \quad \text{系 (2.1) が可制御}$$

$$iii) \quad \text{rank}[\bar{u}(0) \dots \bar{u}(k)] = np$$

である。

【証明】 明らかに、 $\bar{H}_{k0}$ の階数が $(n^2 + n^2p)$ と

なることと、行列、

$$\bar{H}_{k0}' \triangleq \begin{bmatrix} S\bar{y}(0) \cdots S\bar{y}(k) \\ \bar{u}(0) \cdots \bar{u}(k) \end{bmatrix} : (n+np) \times (k+1)$$

の階数が $(n+np)$ となることは同値である。ところが、 $\bar{H}_{k0}'$ は、

$$\bar{H}_{k0}' = \begin{bmatrix} I_n & SG \\ 0 & I_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \cdots x(k) \\ \bar{u}(0) \cdots \bar{u}(k) \end{bmatrix}$$

と変形される。右辺の最初の行列は正則な行列であるから、 $\bar{H}_{k0}'$ の階数は 2 番目の行列の階数に等しい。以下の証明は定理 1(a) の証明と同じである。

(証明終)

【定理 3(b)】 自由系において、 $\bar{H}_{k0}$ の階数が n^2 になるための必要十分条件は、

i) $k \geq n-1$

ii) $\{A, x(0)\}$ が可制御対

である。(証明略)

次に雑音のある場合について考える。雑音の性質については前に述べたとおりである。(4.3) 式を導いたときと同様の変形を行なうと、

$$S\bar{y}(k+1) = AS\bar{y}(k) + F\bar{u}(k) + G\xi(k) + S\bar{\eta}(k+1) - AS\bar{\eta}(k) \quad (4.6)$$

となる。ここで、

$$\xi(k) \triangleq [\xi^T(k) \cdots \xi^T(k+n-1)]^T : n^2 \times 1$$

$$\bar{\eta}(k) \triangleq [\eta^T(k) \cdots \eta^T(k+n-1)]^T : nm \times 1$$

$$G \triangleq -ASG_1 + S \begin{bmatrix} C & 0 & \cdots & 0 \\ CA & C & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-1} & CA^{n-2} & \cdots & C \end{bmatrix} : n \times n^2$$

$$G_1 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CA & C & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ CA^{n-2} & CA^{n-3} & \cdots & C & 0 \end{bmatrix} : nm \times n^2$$

とする。更に (3.3) 式に対応する式を導出したいわけであるが、 $\bar{y}(k)$ などの定義より以前と同じ方法を用いると、できあがった系の雑音の分散が正值とならず、準正值となってしまふ。そこで $\bar{y}(1)$ から $\bar{y}(k+1)$ まですべての式にまとめるさいに少し工夫を要する。この点を考慮すると、

$$z_{k+1,1} = F_{k0}f + \nu_{k0} \quad (4.7)$$

を得る。ただし、

$$z_{k+1,1} \triangleq S_{k+1,1}y_{k+1,1} : (k+n) \times 1$$

$$y_{k+1,1} \triangleq [y^T(1) \cdots y^T(k+n)]^T : m(k+n) \times 1$$

$$S_{k+1,1} \triangleq \sum_{i=0}^k {}_1T_{k+n} {}^iS_k' {}_2T_{m(k+n)} {}^{mi} : (k+n) \times m(k+n)$$

$$S_k' \triangleq \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : (k+n) \times m(k+n)$$

$$T_{2l} \triangleq {}_1T_l^T : l \times l$$

$${}_1T_l \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} : l \times l$$

$$F_{k0} \triangleq \begin{bmatrix} (S\bar{y}(0))^T & 0 & \cdots & 0 & \bar{u}^T(0) & 0 & \cdots & 0 \\ (S\bar{y}(1))^T & (S\bar{y}(0))^T & \cdots & 0 & \bar{u}^T(1) & \bar{u}^T(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (S\bar{y}(n-1))^T & (S\bar{y}(n-2))^T & \cdots & (S\bar{y}(0))^T & \bar{u}^T(n-1) & \bar{u}^T(n-2) & \cdots & \bar{u}^T(0) \\ (S\bar{y}(n))^T & (S\bar{y}(n-1))^T & \cdots & (S\bar{y}(1))^T & \bar{u}^T(n) & \bar{u}^T(n-1) & \cdots & \bar{u}^T(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (S\bar{y}(k))^T & 0 & 0 & \cdots & \bar{u}^T(k) \end{bmatrix} : (k+n) \times (n^2 + n^2p)$$

$$\nu_{k0} \triangleq G_{k0}\xi_{k0} + AS_{k0}\eta_{k0}$$

$$\xi_{k0} \triangleq [\xi^T(0) \cdots \xi^T(k+n-1)]^T : n(k+n) \times 1$$

$$\eta_{k0} \triangleq [\eta^T(0) \cdots \eta^T(k+n)]^T : m(k+n+1) \times 1$$

$$G_{k0} \triangleq \sum_{i=0}^k {}_1T_{k+n} {}^iG_k' {}_2T_{n(k+n)} {}^{ni} : (k+n) \times n(k+n)$$

$$G_k' \triangleq \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : (k+n) \times n(k+n)$$

$$AS_{k0} \triangleq \sum_{i=0}^k {}_1T_{k+n} {}^iS_k'' {}_2T_{m(k+n+1)} {}^{m(i+1)} - \sum_{i=0}^k {}_1T_{k+n} {}^iS_k''' {}_2T_{m(k+n+1)} {}^{ni}$$

$$S_k'' \triangleq \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : (k+n) \times m(k+n+1)$$

$$S_k''' \triangleq \begin{bmatrix} AS & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : (k+n) \times m(k+n+1)$$

とする。前と同様に M_{k0} を定義し、それを計算してみると

$$M_{k0} = \Gamma_{k0}^T P_{k0}^{-1} \Gamma_{k0} : (n^2 + n^2 p) \times (n^2 + n^2 p) \quad (4.8)$$

となる。ただし、

$$P_{k0} \triangleq E \nu_{k0} \nu_{k0}^T \\ = G_{k0} Q_{k0} G_{k0}^T + A S_{k0} R_{k0} A S_{k0}^T : (k+n) \times (k+n)$$

$$Q_{k0} \triangleq \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} : n(k+n) \times n(k+n)$$

$$R_{k0} \triangleq \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} : m(k+n+1) \times m(k+n+1)$$

とする。ここで P_{k0} は一般に準正值ではあるが正值であることをいうのはむずかしい。ここでは P_{k0} は正值と仮定する。明らかに上の M_{k0} に対しても定理 2 が成立する。また補助定理 1 と同様、次の定理が成立する。

【補助定理 2】 十分大きな k に対して、

$$P_{k0} \leq \rho_3 I_{k+n} \quad 0 < \rho_3 < \infty$$

が成立する。ただし、 ρ_3 は k に無関係な定数とする。

よってこの補助定理より、次の定理が成立する。

【定理 2(b)】 系 (4.7) のパラメータ f が S.I. であるための十分条件は、 $\Gamma_{k0}^T \Gamma_{k0}$ のすべての固有値が、 k が無限大にいくとき、無限大に向かうことである。

5. あ と が き

以上定係数線形系の可同定性について述べたが、この論文においては系の次数 n は既知であると仮定した。

しかし、同定という立場からみれば n の決定ということも含めて可同定性ということを考えなければならぬであろう。雑音のない場合 n を決定することは容易であるが、雑音が存在する場合は非常にむずかしい問題となる。

また、多入力出力系において S という行列を導入し、それが既知であるという仮定の下に可同定条件を導き出した。これも次数 n の問題と同様に雑音のある場合にはどのようにして S を決定するかが問題となってくる。

最後に、有益な助言をいただいた本学細江繁幸氏に感謝する。

参 考 文 献

- 1) R. C. K. Lee : Optimal Estimation, Identification and Prediction, M. I. T. Press (1964)
- 2) R. M. Staley and P. C. Yue : On System Parameter Identifiability, Information Science, 2-2, 127/138 (1970)
- 3) M. Aoki : On Observability of Stochastic Discrete-time Dynamic Systems, J. Franklin Inst., July, 36/58 (1968)
- 4) R. E. Kalman : A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, J. Basic Engr. (Trans. ASME), 82, D, 35/45 (1960)
- 5) R. E. Kalman : On the General Theory of Control Systems, Pross. First IFAC Congress, Vol. 1, 481/492 (1961)
- 6) H. Cramér : Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press (1946)
- 7) B. Gopinath : On the Identification of Linear Time-Invariant Systems from Input-Output Data, Bell Syst. Tech. J., Vol. 48, 1101/1113 (1969)
- 8) R. E. Kalman : Mathematical Description of Linear Dynamical Systems, J. Control, (SIAM), 1, 152/192 (1963)