最短時間制御問題の数値解法[†]

市川 邦彦・土屋 紀美子

上智大学理工学部 東京都千代田区紀尾井町7

(昭和47年6月5日 受付)

Numerical Solution of Minimum Time Control Problem

Kunihiko ICHIKAWA and Kimiko TSUCHIYA

(Faculty of Science and Technology, Sophia University, Chiyoda-ku, Tokyo)

(Received June 5, 1972)

The gradient method for computing the optimal control is usually formulated for a problem in which the final instant is fixed and the final state vector is free. Although the minimum time control problem is the most familiar optimal control problem, it does not belong to the above class of optimal control problems. The usual technique for solving the minimum time control problem is the following. Assume the control time sufficiently shorter than the true (but unknown) minimum control time, and construct the problem to minimize the norm of the final state vector. Then, find the time when the minimum norm just vanishes as the control time is increased little by little. This technique requires some information about the true minimum control time, and moreover is not suitable to deal with the bounded state variable problem. The authors discovered that it is not required to solve the infinite series of optimal control problems, as is done in the ϵ -method, and that the currently assumed control time is easily determined as shorter or longer than the true minimum control time by solving an optimization problem once with a certain proper value for ϵ .

The true minimum control time is obtained by the interval contraction method. Moreover, a characteristic of the proposed method is that a problem with some kind of bounded state variable as well as a bounded control variable can be dealt with quite easily.

1. ま え が き

最適制御問題において、最適制御の必要条件は記述しうるが、具体的に最適制御を求めるためには、一般的にいて逐次近似に基づく計算によらなければならない。最適制御を数値計算によって求める最適制御問題の基本形は終端時刻 t_f 指定、終端位置 $x(t_f)$ 自由で制御および状態に制限のない問題である¹⁾。これとは異なった形の最適制御問題では種々の工夫を加える必要がある。最短時間制御問題も工夫を要する問題の1つであるが、この論文で述べる解法は通常の工夫とはまったく異なり、 ϵ -法の考え方を取り入れた解法である。しかしこの論文で述べる解法は通常の ϵ -法²⁾と

も異なり、仮定した t_f の値が所要最短時間より小なのか大なのかを判定するために無限の最適問題列を解く必要はなく、またある種の状態変数制限問題も容易に処理するという特徴をもっている。

2. 従 来 の 方 法

最短時間制御問題を解くための工夫として従来から最も多く用いられている方法は、最短時間制御問題を t_f 指定、 $J = \|x(t_f)\|^2$ 最小という問題におきかえる方法である。まず t_f を十分小さな値、すなわち最短所要時間 t_f^* (求めるべきものであって、とうぜん未知である) より小さいと思われる値に指定して $J = \|x(t_f)\|^2$ 最小化という問題を解く。このためには共状態ベクトル $p(t)$ を導入して計算されるこう配関数

[†] 第14回自動制御連合講演会で発表(昭46・11)

$g(t) = \partial J / \partial u(t)$ が用いられる。最短時間制御問題では常に制御の大きさに制限が課せられるが、その制限が成分ごとに独立であって、また状態に制限がなければ、最も単純な最急降下法にわずかな修正を施すだけで最適制御に到達しうる。もし制御の制限が一般的な形であったり、さらに状態の制限が加えられたりすると SUMT³⁾ のような複雑な計算を必要とする。しかしながら、なにはともあれ、 t_f 指定、 $J = \|x(t_f)\|^2$ 最小化の問題は数値的に解くことは可能である。

はじめに仮定した t_f が十分小さいので最適解は唯一にきまり、しかも $\min J$ は正である。つぎに t_f を前より少しばかり大きな値に変更して再び最適制御問題を解く。このときの新しい t_f が t_f^* より小であればやはり最適解は唯一にきまり、 $\min J$ は正であるが、その値は前のスラップで得られた $\min J$ の値よりは小さい。このように、 t_f を少しずつ大きくしてその都度最適制御問題を解くと、 $\min J$ は単調減少してほとんど 0 の値になる。もし、ちょうど $\min J$ の値を 0 ならしめるような t_f が見出されたならば、それは原問題の最適所要時間 t_f^* であり、そのときの最適解が原問題の最適制御および最適軌道である。

この方法には種々の欠点がある。まず t_f^* の概略値を知っていないと計算が開始できない。もし仮定した t_f の値が t_f^* より大きいと最適解は唯一でなく、こう配法の適用が成功しないおそれがある。さらに、もし状態変数に制限があると計算量がぼう大となる。しかしながら、この変換された最適制御問題の解にはつぎのような性質があり、これはこの論文で提案する解法の根拠にもなっている。

(i) $t_f > t_f^*$ のとき、 J を 0 ならしめる制御は無数に存在する。

(ii) $t_f = t_f^*$ のとき、最適解は唯一にきまり、 $\min J$ の値は 0 である。

(iii) $t_f < t_f^*$ のとき、最適解は唯一にきまり、 $\min J$ は正である。

3. 新しい方法の原理

制御および状態がいずれも成分ごとに独立な制限を受ける最短時間制御問題を考える。

制御対象の運動が、

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1)$$

で表わされているものとする。ここに、 x は n 次元状態ベクトル、 u は r 次元制御ベクトルで、 $f_i (i=1, 2, \dots, n)$, $\partial f_i / \partial x_j (i, j=1, 2, \dots, n)$ および $\partial f_i / \partial u_k (i=1, 2, \dots, n; k=1, 2, \dots, r)$ は x および u について連続であるとする。制御および状態にはつぎのような制限

があるものとする。

$$l_k \leq u_k \leq h_k, \quad k=1, 2, \dots, r \quad (2)$$

$$L_j \leq x_j \leq H_j, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (3)$$

初期点および終端点はつぎのように与えられているものとする。

$$\begin{cases} x(0) = x^0 \\ x(t_f) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

そして t_f を最小ならしめるものとする。

この論文で提案する方法では、 ε -法と同じく状態ベクトル微分方程式 (1) を等式拘束条件とし、 $x(t)$ および $u(t)$ を互いに独立な時間関数として扱う。しかしながら普通の ε -法では仮定した $x(t)$ から微分演算を行なって $\dot{x}(t)$ を作らなければならない。ここでは微分演算を避けるために新しい時間関数 $z(t)$ をつぎのように導入する。

$$x(t) = x^0 + \int_0^t z(\tau) d\tau \quad (5)$$

これによって独立な時間関数は $z(t)$, $x(t)$ および $u(t)$ の 3 種類となり、等式拘束条件として (1) および (5) 式があることになる。 $z(t)$, $x(t)$ および $u(t)$ の初期推定は不等式拘束条件 (2) および (3) 式を満足していれば任意のものでよいが、関数 $x(t)$ については $x(0) = x^0$ を満足することは必要である。

t_f は未知であり、これをパラメータとして残しておき、 ε -法にならって新しい評価関数をつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} P(z, x, u, t_f, \varepsilon) = & \left[x^0 + \int_0^{t_f} z(t) dt \right]' \left[x^0 + \int_0^{t_f} z(t) dt \right] \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{t_f} \{ [z - f(x, u)]' [z - f(x, u)] \\ & + \left[x - x^0 - \int_0^t z(\tau) d\tau \right]' \left[x - x^0 - \int_0^t z(\tau) d\tau \right] \} dt \end{aligned} \quad (6)$$

t_f と ε にある正の値を与えて、 $x(0) = x^0$ および不等式拘束条件 (2) および (3) の下で $P(z, x, u, t_f, \varepsilon)$ を最小化する問題を P 問題と呼ぶことにする。 P 問題の解法については 5. で述べるが、こう配法によって解くことができ、最適関数 $z^*(t)$, $x^*(t)$ および $u^*(t)$ が求められ、また $P(z, x, u, t_f, \varepsilon)$ の最小値 P^* が求まる。このとき性質 (i), (ii) および (iii) からさらにつぎの性質が得られる。

(iv) $t_f > t_f^*$ になると、 x^0 から出発して等式拘束条件 (1) および (5) と不等式拘束条件 (2) および (3) を満足して $\|x(t_f)\|^2$ を 0 ならしめる解が無数にあるので、いかなる $\varepsilon > 0$ に対しても P^* は 0 となる。 $z^*(t)$, $x^*(t)$ および $u^*(t)$ はこれらの関数に対する初期推定に依存して求められ、一般的な意味において

は不定であるといつてよい。

(v) $t_f = t_f^*$ するとき, x^0 から出発して等式拘束条件(1)および(5)と不等式拘束条件(2)および(3)を満足して $\|x(t_f)\|^2$ を 0 ならしめる解は唯一に定まるので, いかなる $\varepsilon > 0$ に対しても P^* は 0 となり, $z^*(t)$, $x^*(t)$ および $u^*(t)$ は唯一に定まる。これらの時間関数は原問題の最適解を与える。

(vi) $t_f < t_f^*$ するとき, x^0 から出発して等式拘束条件(1)および(5)と不等式拘束条件(2)および(3)を満足して $\|x(t_f)\|^2$ を 0 ならしめる解は存在しないので, いかなる $\varepsilon > 0$ に対しても P^* は正である。 P^* , $z^*(t)$, $x^*(t)$ および $u^*(t)$ は唯一に定まるが, これらは t_f および ε に依存する。

P 問題の解が性質(iv), (v)および(vi)をもつので, ε -法のように無限の最適制御問題の列を解く必要はなく, 原理的には ε には任意の正の値を与えておけばよいことになる。 P 問題の解法について述べる前に, P 問題が解けるものとして, 区間縮小法によって t_f^* を求める方法を説明する。

4. 区間縮小法による t_f^* の求め方

ε にある正の値を与える。 t_f をある値に仮定して P 問題を解く。 P^* が 0 になったとすればそれは $t_f \geq t_f^*$ であった証拠であり, また P^* が正の値となったとすればそれは $t_f < t_f^*$ であった証拠である。

はじめに P^* が 0 になったと仮定しよう。そうしたら t_f の値を $1/2$ にして再び P 問題を解く。このことを有限回繰り返せばいつかは $t_f < t_f^*$ となり P^* が正となる。かくして $1/2 \cdot t_1 < t_f^* \leq t_1$ なる t_1 を求めることができる。

またはじめに P^* が正であったと仮定しよう。そうしたら, t_f の値を 2 倍にして再び P 問題を解く。このことを有限回繰り返せばいつかは $t_f \geq t_f^*$ となり, やはり $1/2 \cdot t_1 < t_f^* \leq t_1$ を満足する t_1 を見出すことができる。このようにして t_f^* が存在する範囲が求まったならば t_f として $t_f = 1/2(1/2 \cdot t_1 + t_1) = 3/4 \cdot t_1$ を与えて P 問題を解く。もし P^* が 0 となったとすれば $1/2 \cdot t_1 < t_f^* \leq 3/4 \cdot t_1$ であることが判明し, また P^* が正になったとすれば $3/4 \cdot t_1 < t_f^* \leq t_1$ であることが判明する。以下, このようにして t_f^* の存在が確かである区間を $1/2$ ずつに縮めてゆくことができる。この計算手順を繰り返すことによって t_f^* をある精度で見出すことができる。このとき同時に原問題の最適解も得られる。

5. P 問題の解法

これまで, ε は任意の正数として差支えないと述べてきたが, 実際には問題に応じて適正な値がある。それをどんな根拠で定めるのがよいか明らかではない。ここではなぜ ε に適正値があるかについて考察しよう。現在の最小化手法, たとえば最急降下法とか共役こう配法などは局所的最小点に到達する方法である。最小化関数 $P(z, x, u, t_f, \varepsilon)$ がある t_f と ε を与えたときに z, x, u について凸関数であれば任意の初期推定値 $z^0(t), x^0(t), u^0(t)$ から出発して最適解 $z^*(t), x^*(t), u^*(t)$ に到達しうるのである。しかし, P 関数が凸である領域は t_f と ε にかかなり大きく依存するようである。これまでの後に述べる例題についての経験では $1/\varepsilon$ をある程度大きくしたほうが $P(z, x, u, t_f, \varepsilon)$ の凸領域が大きくなり, かなり勝手な初期推定値から出発しても最適解に到達できるようである。しかしながら, $1/\varepsilon$ を大きく取りすぎると, $z^*(t), x^*(t), u^*(t)$ に到達するまでの計算量が大きくなる傾向にある。

以上のように $1/\varepsilon$ には場合, 場合に応じた適正値があるようである。以下においては $1/\varepsilon$ が適正な値にとられていると仮定する。

t_f と ε が与えられているとき (6) 式から $P(z, x, u, t_f, \varepsilon)$ の $z(t), x(t)$ および $u(t)$ についてのこう配関数を求めるとつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} g_z(t) &= 2 \left\{ x^0 + \int_0^{t_f} z(t) dt \right\} + \frac{2}{\varepsilon} \{ z(t) - f(x(t), u(t)) \} \\ &\quad - \frac{2}{\varepsilon} \left\{ \int_t^{t_f} x(\tau) - x^0 - \int_0^t z(\rho) d\rho \right\} d\tau \\ g_x(t) &= -\frac{2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)' \{ z(t) - f(x(t), u(t)) \} \\ &\quad + \frac{2}{\varepsilon} \left(x(t) - x^0 - \int_0^t z(\tau) d\tau \right) \\ g_u(t) &= -\frac{2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)' \{ z(t) - f(x(t), u(t)) \} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

これらのこう配関数は, 具体的に $z(t), x(t)$ および $u(t)$ を仮定すれば数値的に計算できる。

不等式拘束条件(2)および(3)を受ける場合の最急降下法の計算アルゴリズムはつぎの式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} z^{p+1}(t) &= z^p(t) - \alpha g_z^p(t) \\ x^{p+1}(t) &= [x^p(t) - \alpha g_x^p(t)]_{\text{mod}} \\ u^{p+1}(t) &= [u^p(t) - \alpha g_u^p(t)]_{\text{mod}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで p は繰り返し計算のステップ番号である, α は定数ではあるが繰り返しの進行とともに変更される。それはつぎのように変えられる。まず $p=0$ においては α を 1 とする。そして (8) 式によって求められた $z^1(t), x^1(t)$ および $u^1(t)$ が P の値を減少せしめてい

るならばこのステップは成功とみなしてステップ 1 にすすむ。ただしこのとき α の値を 2 倍にする。もし $p=0$ において α を 1 にとって得られた $z^1(t)$, $x^1(t)$ および $u^1(t)$ が P の値を大きくするようであれば α の値を $1/2$ に減ずる。すなわち各ステップで、 P の値が減少するまで α の値を $1/2$ ずつに減少せしめ、成功をおさめたときにつぎのスラップに進む。そしてこのときには必ず α の値を 2 倍にする。このような計算法は 1 次元探索を含む最急降下法よりも簡単であり能率的である。また $[\cdot]_{\text{mod}}$ とは関数 $[\cdot]$ の成分ごとに、その制限値を超えている部分を制限値におきかえて得られる時間関数のことを意味する。

6. 例 題

制御対象の運動が、

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad (9)$$

で表わされ、初期点は $\{0, 0\}$ にあるとする。 u には $|u| \leq 1$ なる制限があり、また状態変数制限としては $|x_2| \leq 1$ なる制限があるものとし、終端を原点とする最短時間制御問題を与えることにする。この問題はすでに解析的な方法でも解かれており⁴⁾、最短所要時間は 5 s であり、また最適制御が、

$$u(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 4 \\ 1, & 4 \leq t \leq 5 \end{cases} \quad (10)$$

となることは知られている。

この例題ではすべての P 問題に対して $1/\epsilon$ は 10 を用いた。最短所要時間の初期推定値として $t_f = 3$ を与えた。おのおのの P 問題において、 $z(t)$, $x(t)$ および $u(t)$ の初期推定関数はつぎのような一定値にとった。

$$\begin{cases} z(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x(t) = \begin{bmatrix} \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \\ u(t) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

実際には計算機の使用時間および数値計算に伴う誤差を考慮して計算の打ち切りとか、 P の値が 0 であるのが正であるのかを判定する基準を設けなければならない。

まずおのおの P 問題において最適解に到達したと判断する基準をつぎの 2 つの何れかに該当するものとした。

(1) すべてのこう配関数の絶対値の和が 0.1 以下となること。すなわち、

$$\int_0^{t_f} |g_{\text{mod}}| dt \equiv \int_0^{t_f} \{|g_{z1}(t)| + |g_{z2}(t)| + |[g_{x1}(t)]_{\text{mod}}| + |[g_{x2}(t)]_{\text{mod}}| + |[g_u(t)]_{\text{mod}}|\} dt \leq 0.1 \quad (12)$$

$$(2) \quad P(z, x, u, t_f, \epsilon) \leq 0.01 \quad (13)$$

もちろん理論的には最適解においては $\int_0^{t_f} |g_{\text{mod}}| dt = 0$ が成立しなければならないが、この程度の値を許すことは致し方ないことである。条件 (2) によって計算が終了するのは t_f が t_f^* より大きい場合であるが、これを設けておくと、(1) の条件で停止するよりもはるかに早く計算を停止させることができることが多い。

P^* の値が正か 0 かの判断は、 P^* の値が 0.01 以上であったときには正とみなし、0.01 以下であったときは 0 とみなす。事実、理論的には P^* が 0 のはずであっても、計算誤差のために P^* の値が 0 になることはない。区間縮小法によって得られた結果を Table 1 に示す。

Table 1 Computation of optimal control

number of P problem	t_f	$\int_0^{t_f} g dt$	P	computing time [min, s]
1	3	0.099795	2.049	1.03
2	6	0.0001326	0.009993	9.07
3	4.5	0.099979	0.1050	5.31
4	5.3	0.0001577	0.009986	9.26
5	4.9	0.09872	0.01074	12.40
6	5.1	0.0001729	0.009997	9.49
7	4.98	0.0001930	0.009990	8.01
total				55.37

この表によれば t_f^* は 4.9 s と 4.98 s の間にいることが主張され、正解の 5.0 s を挟んでいない。この範囲は計算の続行によって狭めうるが、最終値は 5.0 s より多少小さな値となる。これは (13) 式の右辺に与えた 0.01 という数値が大きすぎるためで、この値をもっと小さく指定すれば最終値の 5.0 s に近くはなるが、やはりそれよりはいくらか小さ目となるであろう。このようなことは数値計算に誤差を伴う以上やむを得ないことである。ここでは、そのような議論に深入りするつもりはない。計算番号 7 までの計算で、提案した計算アルゴリズムの妥当性は十分立証されたものと考え、ここで全体の計算を打ち切った。

計算には東京大学 HITA-5020 を使用した。 t_f を変えるごとにべつべつの計算とし、それぞれの場合の計算所要時間も示した。最適解における軌道および制限をそれぞれ Fig. 1 びお Fig. 2 に示す。

Fig. 1 Optimal trajectory calculated by the present method

Fig. 2 Optimal control calculated by the present method

7. む す び

最短時間制御問題に対して P 問題を設定し、これを解きつつ、 t_f^* が存在すると考えられる区間を次第に縮小してゆくことによって t_f^* を求め、同時に最適軌道および最適制御をうるという方法を述べた。 P 問題は ϵ -法のとときと同じような形に記述されるが、 ϵ -

法と異なり無限の最適制御問題例を解く必要はなく、 ϵ にある適当な正数値を与えた問題を 1 回解くだけでよい。ただし、 ϵ の適正值は問題に応じてきまっており、それを探するのに多少の試行錯誤は必要である。この論文では P 問題を具体的に解くための最急降下法について説明した。この解法によれば制御のみならず状態に制限があっても、それが成分ごとに独立な制限ならば修正こう配法を用いることによって容易に処理できることを明らかにした。

この研究には前述したように東京大学 HITAC-5020 を使用したが、予備的研究の段階では上智大学 IBM-1130 を使用した。

引 用 文 献

- 1) 市川・田村：こう配法による最適制御問題の解法，計測と制御，8-7，761/771 (昭 44-11)
- 2) A. V. Balakrishnan : On a New Computing Technique in Optimal Control, SIAM J. Control, 6-2, 149/173 (1968)
- 3) L. S. Lasdon, A. D. Waren and R. K. Rice : An Interior Penalty Method for Inequality Constrained Optimal Control Problem, IEEE Trans. AC-12-4, 388/395 (1967)
- 4) 市川：システム理論と最適制御，第 18 章，朝倉書店 (昭 45)