主成分による教師なしの学習パターン識別

今井敏雄・志村正道

大阪大学基礎工学部 豊中市待兼山町 1-1

(昭和 47 年 6 月 5 日 受付)

Nonsupervised Pattern Classification Using the Principal Component

Toshio IMAI and Masamichi SHIMURA

(Faculty of Engineering Science, Osaka University, Toyonaka)

(Received June 5, 1972)

Most pattern recognition problems may be categorized as parametric and nonparametric ones on the bases of our knowledge concerning the conditional densities of the input patterns. In addition, the learning machines can further be classified into two types, supervised and nonsupervised ones.

This paper presents a mathematical model of a nonsupervised learning machine using a first principal component. Previous works related to the classifying method using the first principal component, such as those by Cooper and Cooper, and Takanuki and Morishita, have led to a nonsupervised classifiers with parametric learning methods.

In this paper, we discuss a nonparametric case. Under the assumption that the patterns of each category are clustered, the separating hyperplane should contain the mean vector Z_s of all patterns used and should be perpendicular to the line governed by the first principal component $W_s^T X$. Therefore, the decision rule is given by

$$\text{decide: } X \in \begin{cases} C_1 & \text{if } W_s^T X > \theta_s \\ C_2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\theta_s = (W_s, Z_s).$$

The learning algorithm employed in the classifier is as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{k+1}' = W_k + a_k \{ (X_k - Z_k, W_k) (X_k - Z_k) - |X_k - Z_k|^2 W_k \} \\ W_{k+1} = W_{k+1}' / |W_{k+1}'| \\ Z_{k+1} = Z_k + a_k (X_k - Z_k) \\ \theta_{k+1} = (W_{k+1}, Z_{k+1}), \end{array} \right.$$

where W_k is the weight vector, Z_k is the mean vector and a_k is the correction increment at the k -th iteration.

Also we have made a computer simulation to study the learning performance of the classifier for the Gaussian data. The results of the experimental study show that the probability of error of the classifier proposed is slightly larger than the Bayes' minimum error.

1. 序

学習機能をもったパターン認識機械には教師ありの学習機械と教師なしの学習機械がある。教師ありの学習機械においては、学習パターンの情報と教師が教え

る正解、すなわち学習パターンのカテゴリに関する情報を用いて、各カテゴリに属するパターンの確率的構造を推測し、識別機構を逐次学習的に構成する。しかしながら、教師がない場合には、学習パターンのみから、その属するカテゴリの推定・決定をしなければ

ならない。すなわち、パターンの形成する空間の構造のみがカテゴリの決定の手がかりとなる。したがって、教師なしの学習機械については、パターンの分布形がわかっている場合の学習方式であるパラメトリックな学習機械が主に研究されてきた。教師なしの学習機械には、DDM^{1),2)}のように教師のかわりに機械自身の決定を用いる方法、あるいはパターンの mixture 分布を学習パターンより推定し、それを各カテゴリの分布に分解していくことによって識別機構を構成していく方法などがある。前者の方法は機械自身が正解を与えるならば最適決定（最小誤り）となるという意味で準最適決定方法であるが、SN 比が小さい場合には学習能率が著しく低下する。また、後者の方法においては、mixture 分布から各カテゴリの分布に分解するときの一意性 (identifiability) の仮定が必要とされる。なおこの場合、mixture 分布の推定には、ヒストグラムあるいは積率を用いる方法^{3),4)}などが提案されている。

教師なしのパラメトリック学習法をもつ識別機械においては、パターンの分布に関する知識が必要とされるし、また mixture 分布は、一般に、分布の再生性をもたない⁵⁾ ことなどから学習過程における学習アルゴリズムが複雑になる傾向がある。

いっぽう、ノンパラメトリックな学習方法においては、パターンの分布を仮定しないで、あらかじめ定めておいた識別関数を学習パターンによって逐次修正していくが、教師なしのノンパラメトリックな学習機械としては、Jakowatz がそのモデル⁶⁾を提案している。しかしながら、彼のモデルについて、学習の収束性に対する証明は特別な場合を除いて困難である。

また、ノンパラメトリックな方法に関する 1 つのアプローチとして、いわゆる教師なしのクラスタ化の方法⁷⁾⁻¹¹⁾がある。すなわち、同じカテゴリに属するパターンはクラスタをなすという仮定のもとに、クラスタ間に導入したある種の距離を用いてクラスタ化の評価関数を作り、その値を最小にするようにパターン空間の分割 (カテゴリの決定) を行なう方法である。しかしながら、そのアルゴリズムは一般に評価関数の極小化が保証されているのみであるから、学習過程における初期値の影響が大きく、またすべての学習パターンは繰返し処理されるものであるから、パターンすべてが記憶されていなければならない。

一般に、教師なしのノンパラメトリックな学習機械においては、パラメトリックな機械のようにパターンの分布関数の形を仮定する必要はないが、しかしパターンの線形分離可能性、あるいは各カテゴリのパター

ンがクラスタをなすなどという分布に関する一般的な仮定がなければ、その構成は困難となる。

本論文においては、多変量解析¹²⁾で用いられる第 1 主成分 (the first principal component) を利用した教師なしのノンパラメトリック学習法をもつ識別機械を提案する。第 1 主成分は n 次元空間のパターンを 1 次元空間、すなわち直線上に射影するときに、その上でのパターンの分散が最大になるような直線で示される成分であり、第 1 主成分の荷重ベクトルはパターンの共分散行列の最大固有値に属する基準化された固有ベクトルとして定められる。

教師なしの場合におけるパターンの 2 カテゴリ分類の問題で第 1 主成分を用いる方法として Cooper and Cooper の提案がある¹⁴⁾。彼らは、各カテゴリの生起確率が等しく、各カテゴリのパターンが正規分布である場合に、学習パターンよりパターンの平均値および共分散行列を推定し、反復法によって最大固有値に属する固有ベクトルを求める方法および SN 比が大きい場合には Decision-Directed 方法を用いる方法を提案している。また、Ho and Agrawala は全パターンを繰返し処理することによって上記の固有ベクトルを求めるアルゴリズムを述べ^{10),11)}、高貫と森下は制御理論的なアプローチから微分方程式の安定解として第 1 主成分を求める方法を提案している¹⁵⁾。本論文では、確率近似法的なアプローチから、任意の分布形に対して学習的に第 1 主成分を求める方法を提案する。

なお、計算機シミュレーションを行ない、その実験結果も示す。

2. 決定理論と学習手順

パターンに関する情報が事前に与えられていない場合における教師なしのパターン識別機構について述べる。いま、パターン X を n 次元ベクトルとし、 k 番目のパターンベクトルを $X_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)^T$ (T : 転置) で表わす。これらのパターンを 2 つのカテゴリ C_1, C_2 に分類する問題を考える。

パターン空間におけるパターンの分布は未知である

Fig. 1 Geometric interpretation of the decision rule

が、各カテゴリに属するパターンは Fig. 1 に示すように、おのおのクラスをなしているものと仮定しよう。まず、これらのパターン群に関する第1主成分の荷重ベクトル W_s ($W_s^T X$: 第1主成分) および平均値ベクトル Z_s を求める。一般に、第1主成分の荷重ベクトルは各カテゴリの中心付近をとり、平均値は2つのカテゴリの中心付近に存在していると考えられるので、パターンの識別は Fig. 1 に示すように、平均値 Z_s をとり、第1主成分の荷重ベクトル W_s に直交するような分離超平面によって分類される。すなわち、パターン点 X からベクトル W_s の方向線上に垂直に下ろした点 X' が分離超平面のどちら側に属するかを、いいかえれば内積 $(X - Z_s, W_s)$ の符号によってパターンの属するカテゴリを決定することができる。この場合の決定法則は次のようになる。

$$\text{decide: } X \in \begin{cases} C_1 & \text{if } W_s^T X > \theta_s \\ C_2 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

$$\theta_s = (W_s, Z_s)$$

次に、第1主成分の荷重ベクトル W_s および平均値ベクトル Z_s を求める学習アルゴリズムについて考察する。手順 k 番目における第1主成分の推定荷重ベクトル (以後荷重ベクトルと呼ぶ) を $W_k = (\omega_1^k, \omega_2^k, \dots, \omega_n^k)^T$ 、平均値ベクトルを $Z_k = (z_1^k, z_2^k, \dots, z_n^k)^T$

および閾値を θ_k とする。このとき、パターン X_k が与えられると、Fig. 2 に示すように、ベクトル W_k をパターン X_k の方向に $\vec{BE}$ だけ傾け、 W_{k+1}' をつくる。 W_{k+1}' はベクトル $\vec{AE}$ であり、 W_{k+1} はベクトル $\vec{AE}$ を基準化したベクトル $\vec{AF}$ となる。また同時に、 Z_{k+1} を Z_k より X_k の方向に $\vec{AG}$ だけずらした点にとる。明らかに、パターン X_k が荷重ベクトル W_k 上にあれば W_k は変化させず、また X_k が Z_k に一致していれば Z_k を変化させない。

さて、上で述べた $\vec{BE}$ および $\vec{AG}$ を

$$\vec{BE} = a_k |X_k - Z_k|^2 \vec{BD}$$

$$\vec{AG} = a_k (X_k - Z_k)$$

としよう。このとき、 W_k, Z_k および θ_k に対して、次のような学習訂正アルゴリズムが得られる。

$$W_{k+1}' = W_k + a_k \{ (X_k - Z_k, W_k) (X_k - Z_k) - |X_k - Z_k|^2 W_k \} \quad (2)$$

$$W_{k+1} = \frac{W_{k+1}'}{|W_{k+1}'|} \quad (3)$$

$$Z_{k+1} = Z_k + a_k (X_k - Z_k) \quad (4)$$

$$\theta_{k+1} = (W_{k+1}, Z_{k+1}) \quad (5)$$

ただし、訂正係数 a_k は次の条件を満たすとする。

$$0 < a_k < 1, \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty \text{ かつ } \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty \quad (6)$$

したがって、本機械の構造を示すと Fig. 3 のようになる。

Fig. 3 A block diagram of the nonsupervised machine

3. 学習の収束性

以下、前章で求めた学習手順について、その収束性を考察しよう。まず、平均値ベクトル $Z_s = E[X_k]$ を求める手順については次の定理1を得る。

【定理1】 (4) 式で与えられる手順において、次の条件

$$\begin{cases} (a) & E[|X_k|^2] < \infty \\ (b) & E[|Z_k|^2] < \infty \end{cases} \quad (7)$$

を満足するとき、 Z_k は確率1で Z_s に収束する。すなわち、

$$\text{prob.} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} Z_k = Z_s \right) = 1 \quad (8)$$

【証明】 (4) 式で与えられる手順が Dvoretzky の定理 (Special Case II)^{16), 4)} の条件を満たしていることを示せばよい。

まず、(4) 式を変形することにより次式を得る。

$$Z_{k+1} = (1 - a_k) Z_k + a_k Z_s + a_k (X_k - Z_k)$$

$$\text{ここで、} \begin{cases} T_k(Z_1, Z_2, \dots, Z_k) = (1 - a_k) Z_k + a_k Z_s \\ Y_k = a_k (X_k - Z_k) \\ F_k = (1 - a_k) \end{cases}$$

$$\text{とおくと、} |T_k(Z_1, Z_2, \dots, Z_k) - Z_s| = F_k |Z_k - Z_s|$$

$$\text{また、(6) 式より } F_k > 0 \text{ かつ } \prod_{k=1}^{\infty} F_k = 0$$

$$(7) \text{ 式より } \sum_{k=1}^{\infty} E[|Y_k|^2] = E[|X_k - Z_s|^2] \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$$

を得る。そして、確率1で $E[Y_k | Z_1, Z_2, \dots, Z_k] = 0$ であるから、すべての可測関数 $\varphi(Z_1, Z_2, \dots, Z_k)$ に対して

$$E[\varphi(Z_1, Z_2, \dots, Z_k) + Y_k]^2 \leq E[\varphi(Z_1, Z_2, \dots, Z_k)]^2 + E[Y_k]^2$$

が成立する。したがって、Dvoretzky の定理の条件を満足することが知れる。すなわち、(8) 式が導かれる。(証明終)

次に、荷重ベクトル W_k の手順についての定理を示す。

【定理 2】 (2), (3) 式で与えられる手順において、次の条件

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad E[X_k]^2 < \infty \\ (b) \quad E[Z_1]^2 < \infty \\ (c) \quad \text{パターンの共分散行列} \\ \quad \Sigma = E[(X_k - Z_k)(X_k - Z_k)^T] \\ \quad \text{の最大固有値は単根である。} \end{array} \right. \quad (9)$$

を満足するとき、 W_k は確率 1 で W_s に収束する。すなわち、

$$\text{prob.} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} |(W_s, W_k)|^2 = 1 \right) = 1 \quad (10)$$

ただし、 W_s は Σ の最大固有値 $\lambda_{\max}$ に属する固有ベクトルであり、また $|W_s| = 1$ である。

【証明】 (9) 式の (a), (b) および (4) 式より確率 1 で $|X_k - Z_k|^2 < \infty$ である。ところで、(2), (3) 式より

$$(W_s, W_{k+1}) = \{ (1 - a_k |X_k - Z_k|^2) (W_s, W_k) + a_k (X_k - Z_k, W_k) (W_s, X_k - Z_k) \} \frac{1}{|W_{k+1}'|}$$

となるから、次の関係式を得る。

$$|(W_s, W_{k+1})|^2 = |(W_s, W_k)|^2 + \frac{1}{|W_{k+1}'|^2} A \quad (11)$$

ただし、

$$\begin{aligned} A = & 2a_k \{ (X_k - Z_k, W_k) (W_s, X_k - Z_k) (W_s, W_k) \\ & - (X_k - Z_k, W_k)^2 (W_s, W_k)^2 \} \\ & + a_k^2 \{ |X_k - Z_k|^2 (X_k - Z_k, W_k)^2 (W_s, W_k)^2 \\ & - 2|X_k - Z_k|^2 (X_k - Z_k, W_k) (W_s, X_k - Z_k) (W_s, W_k) \\ & + (X_k - Z_k, W_k)^2 (W_s, X_k - Z_k)^2 \} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} |W_{k+1}'|^2 = & 1 - 2a_k \{ |X_k - Z_k|^2 - (X_k - Z_k, W_k)^2 \} \\ & + a_k^2 \{ |X_k - Z_k|^2 \{ |X_k - Z_k|^2 \\ & - (X_k - Z_k, W_k)^2 \} \} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、(6) 式より $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ であるから、十分大きな k に対して $a_k^2 \ll 1$ となり、(12) 式の第 2 項は無視できる。(13) 式においても、第 2 項、第 3 項は十分小さくなり、 $|W_{k+1}'|^2 = 1$ となる。また、定理 1 より十分大きな k に対しては $Z_k = Z_s$ となる。それゆえ、(11) 式より十分大きな k に対して次式が成立する。

$$|(W_s, W_{k+1})|^2 = |(W_s, W_k)|^2 + 2a_k B_k \quad (14)$$

ただし、

$$\begin{aligned} B_k = & (X_k - Z_s, W_k) (W_s, X_k - Z_s) (W_s, W_k) \\ & - (X_k - Z_s, W_k)^2 (W_s, W_k)^2 \end{aligned}$$

ここで、(14) 式の k 番目のパターン X_k の出現可能な集合に対する期待値は次のようになる。

$$E[|(W_s, W_{k+1})|^2 | W_k] = |(W_s, W_k)|^2 + 2a_k E[B_k | W_k] \quad (15)$$

(15) 式の第 2 項の条件付期待値は

$$\begin{aligned} E[B_k | W_k] = & (W_s, W_k) W_s^T \Sigma W_k \\ & - (W_s, W_k)^2 W_k^T \Sigma W_k \end{aligned} \quad (16)$$

となる。ところで、 W_s は Σ の最大固有値 $\lambda_{\max}$ に属する固有ベクトルであるから

$$W_s^T \Sigma W_s = \lambda_{\max} W_s^T \quad (17)$$

であり、また (9) 式の条件 (c) より、 W_s と異なる任意の荷重ベクトル W_k に対しては $|W_k| = 1$ を考慮に入れれば

$$W_k^T \Sigma W_k < \lambda_{\max} \quad (18)$$

となる。したがって、(16), (17) および (18) 式より

$$E[B_k | W_k] = (\lambda_{\max} - W_k^T \Sigma W_k) (W_s, W_k)^2 \geq 0 \quad (19)$$

となり、(15) および (19) 式より十分大きな k に対しては

$$E[1 - |(W_s, W_{k+1})|^2 | W_k] \leq 1 - |(W_s, W_k)|^2 \quad (20)$$

なる関係を得る。いっぽう、 $1 - |(W_s, W_k)|^2 \geq 0$ であるから、 $1 - |(W_s, W_k)|^2$ は Semi-martingale を構成していることがわかる。したがって、Semi-martingale の収束定理¹⁷⁾より $1 - |(W_s, W_k)|^2$ は確率 1 で収束する。すなわち、

$$\text{prob.} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} |(W_s, W_k)|^2 = \alpha \right) = 1 \quad (\alpha = \text{const.}) \quad (21)$$

(21) 式より W_k の極限值 W_∞ が存在することがわかるが、ここでもし

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E[B_k | W_k] = & (\lambda_{\max} \\ & - W_\infty^T \Sigma W_\infty) (W_s, W_\infty)^2 > 0 \end{aligned}$$

ならば、(6) 式の $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$ を考慮すると、(14) 式より $|(W_s, W_k)|^2$ はいくらでも大きくなることになり、これは $|(W_s, W_k)|^2 \leq 1$ に矛盾する。したがって、極限值 W_∞ は

$$(\lambda_{\max} - W_\infty^T \Sigma W_\infty) (W_s, W_\infty)^2 = 0$$

を満たさなければならない。ゆえに、 $|(W_s, W_\infty)|^2 = 1$ or 0 である。ここで、(20) 式より $|(W_s, W_k)|^2$ が平均的に単調増加することから $|(W_s, W_\infty)|^2 = 1$ であ

ることがわかる。すなわち、(21) 式で $\alpha=1$ であり、(10) 式を得る。(証明終)

4. 正規分布パターン

入力パターンが正規分布をしている場合、すなわち

$$\begin{cases} X_k = S_1 + N_k \in C_1 \\ X_k = S_2 + N_k \in C_2 \end{cases} \quad (22)$$

なる形で与えられる場合を考える。ただし、 N_k は平均値 0、共分散行列 $\sigma_N^2 I$ の正規分布をするものとする。このような場合は相加ガウス雑音のある信号検出の問題となる。

いま、カテゴリ C_1 および C_2 のパターンの生ずる確率が等しく、 $P(C_1)=P(C_2)=1/2$ と仮定する。この場合、明らかに、

$$\begin{aligned} E[X_k] &= (S_1 + S_2)/2 \\ \Sigma &= \sigma_N^2 I + (S_1 - S_2)(S_1 - S_2)^T/4 \end{aligned} \quad (23)$$

である。ところで、 Σ の固有方程式は

$$|(\sigma_N^2 - \lambda)I + (S_1 - S_2)(S_1 - S_2)^T/4| = 0$$

となり、上式は次のようにかける(付録参照)。

$$(\sigma_N^2 - \lambda)^{n-1}(\sigma_N^2 - \lambda + |S_1 - S_2|^2/4) = 0$$

それゆえ、

$$\lambda = \sigma_N^2(n-1 \text{ 重根}) \text{ or } \sigma_N^2 + |S_1 - S_2|^2/4 \quad (24)$$

となり、明らかに Σ の最大固有値

$$\lambda_{\max} = \sigma_N^2 + |S_1 - S_2|^2/4 \quad (25)$$

は単根である。したがって、 W_s を Σ の最大固有値 $\lambda_{\max}$ に属する固有ベクトルとすれば

$$\begin{aligned} W_s^T(\sigma_N^2 I + (S_1 - S_2)(S_1 - S_2)^T/4) &= \lambda_{\max} W_s^T \\ &= W_s^T(\sigma_N^2 + |S_1 - S_2|^2/4) \end{aligned}$$

となる。ここで $|W_s|=1$ を考慮に入れれば

$$W_s = \frac{(S_1 - S_2)}{|S_1 - S_2|} \quad (26)$$

を得る。

ところで一方、ベイズの最小誤り率決定法則は、この場同は次のように与えられる。

$$\text{decide: } X \in \begin{cases} C_1 & \text{if } (S_1 - S_2)^T X > A \\ C_2 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (27)$$

$$A = (S_1 - S_2)^T (S_1 + S_2)/2$$

(27) 式に (23) および (26) 式を用いれば決定法則は

$$\begin{aligned} \text{decide: } X \in \\ \begin{cases} C_1 & \text{if } W_s^T X > (W_s, (S_1 + S_2)/2) = (W_s, Z_s) \\ C_2 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

となり、前章で与えた決定法則(1)と一致する。すなわち、上述の場合、ここで提案する教師なしの機械はベイズの最小誤り率機械に収束することが知れる。

5. 計算機実験

以下に計算機実験の結果を示す。ここで行なった実験は 20 次元パターン($n=20$) を 2 つのカテゴリ C_1 , C_2 に分類する問題である。ここで、各カテゴリの生起確率は等しく、 $P(C_1)=P(C_2)=1/2$ とする。カテゴリ C_1 に属するパターンとしては平均値 0、共分散行列 $\sigma_S^2 I$ の正規分布からのランダムサンプル S_1 にランダム雑音(平均値 0、共分散行列 $\sigma_N^2 I$ の正規分布)を加えたもの、カテゴリ C_2 に属するパターンとしては $S_2=0$ にランダム雑音を加えたものとした。Fig. 4

Fig. 4 Learning process of the machine

はパターン S_1 として 3 種類のランダムサンプルを用いた場合の学習過程における平均誤り率を示したものであり、学習過程において訂正係数 a_k は $a_k=1/k$ とした。各学習回数における誤り率はパターン 200 個について求めた。なお、ベイズの最小誤り率 P_B を Fig. 4 に矢印△で示しておいた。

また、第 1 主成分の寄与率* β_1 は

$$\beta_1 = \frac{1 + \eta/4}{n + \eta/4}$$

で表わされ、第 2 以下の主成分の寄与率 $\beta_i (i=2, 3, \dots, n)$ はすべて等しく

$$\beta_i = \frac{1}{n + \eta/4} \quad (i=2, 3, \dots, n)$$

である。ただし、 $\eta = (S_1 - S_2)^T (S_1 - S_2) / \sigma_N^2$

$n=20$ の場合、 η , SN 比, P_B および $\beta_i (i=1, 2, \dots, n)$ の関係は Table 1 のようになる。なお、Fig. 5,

Table 1 The relations of η , SN ratio, P_B and $\beta_i (i=1, \dots, 20)$ when $n=20$

η	SN ratio [dB]	P_B	β_1	$\beta_i (i \neq 1)$
20	0	0.012	0.240	0.040
10	-3	0.056	0.155	0.044
4	-7	0.158	0.095	0.047
1	-13	0.308	0.061	0.049

* 主成分 $W_i^T X$ の寄与率とは $W_i^T X$ の分散、つまり主成分 $W_i^T X$ の定める直線上でのパターンの分散(固有値 λ_i に等しい)の総分散 $(\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{trace}(\Sigma) \text{ に等しい})$ に対する割合 $\lambda_i / \text{trace}(\Sigma)$ である。

Fig. 5 Convergence process of $1 - |(W_s, W_k)|^2$

Fig. 6 Convergence process of $|Z_s - Z_k|$

Fig. 6 に $1 - |(W_s, W_k)|^2$ と $|Z_s - Z_k|$ の収束過程を示す。

Fig. 4 より SN 比が 0, -3, -7 dB の場合それぞれ 100, 200, 500 回程度の学習回数でほとんどベイズの最小誤り率 P_B に収束していることがわかる。なお, SN 比が小さい場合には学習の収束がかなり遅くなるが, これは第 1 主成分の寄与率 β_1 が, たとえば SN 比が -13 dB の場合には 0.061 であり, 第 2 以下の主成分の寄与率 $\beta_i (i=2, 3, \dots, 20)$ が 0.049 であることからわかるように, パターン空間での第 1 主成分の特徴が明確でなくなり, 探索が困難となるからである。しかしながら, このような傾向は一般の機械にも共通した問題である。

6. 結 言

本論文では主成分を用いた教師なしのノンパラメトリック学習法をもつ識別機械を提案し, その構成および学習アルゴリズムを示した。また, 学習に関しては, その収束性の証明を与えるとともに, 計算機シミュレーションを行なって実験的に確かめた。本機械はとくにパターンがクラスタを形成している場合にはきわめて有用であると考えられる。

なお, 本機械は, その評価関数として,

$$\begin{aligned} J(W, Z) &= E[|X-Z|^2 + |X-Z-(X-Z, W)W|^2] \\ &= 2E[|X-Z|^2] \\ &\quad - W^T E[(X-Z)(X-Z)^T] W \end{aligned} \quad (29)$$

を用いたものであるということを付記しておく。すなわち,

$$\min_{\substack{Z, W \\ |W|=1}} J(W, Z) = J(W_s, Z_s) \quad (30)$$

となる。

参 考 文 献

- 1) H. J. Scudder : Adaptive Communication Receivers, IEEE Trans., **IT-11**, 2, 167/174 (1965)
- 2) 田中・田村・樋口 : 教師なしの学習機能をもつパターン識別機械の考察, 信学論 (C), **52-C-2**, 112/119 (1969)
- 3) E. A. Pattic & J. C. Hancock : Nonsupervised Sequential Classification and Recognition of Patterns, IEEE Trans., **IT-12**, 3, 362/372 (1966)
- 4) Y. T. Chin & K. S. Fu : On Bayesian Learning and Stochastic Approximation, IEEE Trans., **SSC-3**, 1, 28/38 (1967)
- 5) J. Spragins : A Note on the Iterative Application of Bayes' Rule, IEEE Trans., **IT-11**, 4, 544/549 (1965)
- 6) C. V. Jakowatz, et al. : Adaptive Waveform Recognition, Proc. 4th London Symp. on Information Theory, 317/326 (1961)
- 7) G. Nagy & G. L. Shelton : Self-corrective Character Recognition System, IEEE Trans., **IT-12**, 2, 215/222 (1966)
- 8) K. Fukunaga & W. L. G. Koontz : A Criterion and an Algorithm for Grouping Data, IEEE Trans., **C-19**, 10, 917/923 (1970)
- 9) 坂井・金出 : 繰返しアルゴリズムによる自己適応パターン分類機械について, 信学論 (C), **54-C-11**, 979/986 (1971)
- 10) Y. H. Ho & A. K. Agrawala : On the Self-learning Scheme of Nagy and Shelton, Proc. IEEE (Letters), **55-10**, 1764/1765 (1967)
- 11) G. Nagy & N. Tuong : On a Theoretical Pattern Recognition Model of Ho and Agrawala, Proc. IEEE (Letters), **56-5**, 1108/1109 (1968)
- 12) 奥野・久米・芳賀・吉沢 : 多変量解析法, 日科技連 (1971)
- 13) 磯道 : 浮遊円板法, 信学会オートマトン・インホームション理論研資 (1971)
- 14) D. B. Cooper & P. W. Cooper : Adaptive Pattern Recognition and Signal Detection without Supervision, 1964 IEEE Inter'l Conv. Rec., pt. 1, 246/256 (1964)
- 15) 高貫・森下 : ある自己学習方式を用いるパターン 2 組分類機械の試作, 計測自動制御学会論文集, **7-1**, 17/24 (1971)
- 16) A. Dvoretzky : On Stochastic Approximation, Proc. 3-rd Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., 1, 39/55 (1956)
- 17) J. L. Doob : Stochastic Processes, 324, John Wiley (1953)

□ 付 録 □

一般に、次の関係式が成立する.

$$|aI + XX^T| = a^{n-1}(a + |X|^2)$$

ただし,

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad a: \text{定数}$$

【証明】

$$|aI + XX^T| = \begin{vmatrix} a + x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & a + x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & a + x_n^2 \end{vmatrix}$$

$x_1x_2 \cdots x_n \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} &= x_1x_2 \cdots x_n \begin{vmatrix} \frac{a}{x_1} + x_1 & x_2 \cdots x_n \\ x_1 & \frac{a}{x_2} + x_2 \cdots x_n \\ \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 \cdots \frac{a}{x_n} + x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + x_1^2 & x_2^2 \cdots x_n^2 \\ x_1^2 & a + x_2^2 \cdots x_n^2 \\ \vdots & \vdots \\ x_1^2 & x_2^2 \cdots a + x_n^2 \end{vmatrix} \\ &= \left(a + \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \begin{vmatrix} 1 & x_2^2 \cdots x_n^2 \\ 1 & a + x_2^2 \cdots x_n^2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_2^2 \cdots a + x_n^2 \end{vmatrix} = (a + |X|^2) \begin{vmatrix} 1 & x_2^2 & x_3^2 \cdots x_n^2 \\ 0 & a & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & a \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots a \end{vmatrix} \\ &= (a + |X|^2) a^{n-1} \end{aligned}$$

$x_1x_2 \cdots x_n = 0$ のときも関係式は成立する.