オブザーバを用いた最適レギュレータの評価

高 浪 薫・伊 藤 正 美

名古屋大学工学部 名古屋市千種区不老町
(昭和 47 年 3 月 11 日 受付)

On the Performance Index of an Optimal Regulator Using an Observer

Kaoru TAKANAMI and Masami ITO

(Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya)
(Received March 11, 1972)

In optimal regulator problems an increase in the value of the performance index (P.I.) is in general encountered when a Luenberger observer is employed to construct the estimates of the state-variables which are not available by direct measurement.

In this paper $\exp Dt$ (D : the coefficient matrix of observer) is studied with respect to the increase in P.I. and it is shown that for the case where $n \geq 3$ (n : dimension of the system), in almost all cases the increase in P.I. becomes arbitrarily large when the real parts of the observer eigenvalues become highly negative. Moreover it is discussed for what quadratic performance index the control law using the estimates of the state-variables is optimal. In this case, a sufficient condition is derived, and the relation between the weighting coefficients in the performance index and the eigenvalues of the observer is discussed.

1. 緒 言

最適レギュレータ問題において測定できない状態変数を Luenberger オブザーバ^{1),2)}を用いて推定し, その推定量を用いてレギュレータを構成するとき, 一般にすべての状態変数が測定できる場合に比して評価の増分が生じる. J.J. Bongiorno & D.C. Youla はこの評価における増分の定式化を行ない, オブザーバの次数が系の次数と同じ場合にはオブザーバの固有値の実部を負の無限遠に近づけると, 評価 (J) における増分 (ΔJ) は任意に小さくすることが可能であると結論した³⁾. しかし, その後の論文で誤りを指摘し, ΔJ は任意に小さくすることができないと訂正した⁴⁾. この理由は, $\exp Dt$ (D : オブザーバの安定な係数行列) のノルムを $c \exp(-\mu t)$ (c は D と無関係な定数, $-\mu < 0$ は D の固有値のうちで一番大きな実部の値よりも大) でおさえたことにあり, その後 c は D の固有値に依存しており, D の固有値の絶対値が大きくなると c も大きくなるという事実

に気付いたためである. これによって, オブザーバの次数が系の次数に同じ, あるいはそれ以下の場合でもともに $n \geq 3$ (n : 系の次数) においては, オブザーバの固有値を負の無限遠に近づけると, ほとんどの場合 ΔJ は無限大となることがわかった. このことは, 速かに状態を推定することが最適レギュレータの評価の意味で必ずしも最適でないことを意味しているが, これはレギュレータにおける 2 次形式評価と速い状態推定という本質的に異なる尺度を混同しているからにほかならない.

さて, これに対する対策として, これまで次の 2 とおりの方法が研究されている.

(i) オブザーバを用いると, 一般に, システムの評価は初期状態に依存するので実用的に意味のある初期状態の範囲を定めて, その範囲内での増加分 ΔJ の最大値を最小にするように, オブザーバの固有値を決定する方法³⁾

(ii) 初期状態の統計的な性質を既知として, 増加

分の期待値を最小にする最適なオブザーバを設計する方法⁵⁾

しかし、これらのすべての議論は、はじめに理想的な仮定（すべての状態が直接測定できるという）において設定された2次形式評価 J を絶対なものとして、それに基づいてオブザーバの固有値をきめていこうとするものである。もともと、理想的なレギュレータにおける評価 J とオブザーバの固有値とは無関係なものであるし、また、最適レギュレータにおける2次形式評価 J が、システムの動的な挙動に対する1つの理想的な規範であることを考えると、 J にあまり固執することは無意味であると思われる。それよりもむしろ、状態変数が直接測定できない場合、オブザーバを用いたレギュレータ系がどのような動的挙動をするのか、定性的な性質を明確に把握しておくことのほうが重要と思われる。そこで、本稿ではオブザーバを考慮した新しい2次形式評価を考え、オブザーバによる状態変数の推定量を用いたレギュレータ系がその2次形式評価の意味でいかなる最適系であるかを、評価における重みとオブザーバの固有値との関係において考察する。

なお、本稿は、1入力1出力系を扱い、まず、2.でオブザーバの構成法の簡単なまとめを行ない、3.で ΔJ とオブザーバの固有値との関係を、文献(4)とは異なる方法によって示す。そしてさらに、これらを基礎にして、4.で、オブザーバの固有値と新評価関数との関係を論じ、数値例を与える。

2. 1入力1出力系のオブザーバの構成法

まず、対象とする系は完全可制御、かつ完全可観測であるとする。したがって一般性を失うことなく、系は可観測標準形で表わすことができる。

$$\dot{\mathbf{x}} = F\mathbf{x} + gu \quad (1)$$

$$y = h'\mathbf{x} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{x}$ は n 次元状態ベクトル、 u はスカラー入力、 y はスカラー出力である。

ただし、

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.1 n 次のオブザーバの場合

系(1)の全状態変数を推定するためのオブザーバは次式で表わされる^{6),7)}。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= F\mathbf{z} + gu + f(y - h'\mathbf{z}) \\ &= (F - fh')\mathbf{z} + gu + fy \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{z}$ は n 次元ベクトルである。また f も n 次元ベクトルでその要素は任意である。いま、

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t) \quad (t \geq 0) \quad (5)$$

とおくと、

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \exp[F - fh']t \cdot \mathbf{e}(0) \quad (6)$$

である。この $\mathbf{e}(t)$ がオブザーバによる推定誤差であり、 $\hat{\mathbf{x}}$ が $\mathbf{x}$ の推定量である。(6)から明らかのように、 $F - fh'$ の固有値がすべて負の実部を持てば誤差 $\mathbf{e}(t)$ は漸近的に0へ収束する。また、 $F - fh'$ の固有値は f を指定することによって決まるので、 $F - fh'$ の固有値が希望の負の実部をもつように f を決めればよいことになる。

2.2 $(n-1)$ 次のオブザーバの場合

オブザーバの方程式は

$$\dot{\mathbf{w}} = E\mathbf{w} + du + ly \quad (7)$$

ここで、

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-2} \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} c_0 - \alpha_0 c_{n-1} \\ c_1 - \alpha_1 c_{n-1} \\ \vdots \\ c_{n-2} - \alpha_{n-2} c_{n-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$l = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} \end{bmatrix} (\alpha_{n-2} - a_{n-1}) \quad (9)$$

$\alpha_i (i=0, 1, \dots, n-2)$ は任意

$\mathbf{w}$ は $(n-1)$ 次元ベクトル

で与えられる^{6),7)}。

オブザーバの状態変数 $\mathbf{w}$ と系の状態変数 $\mathbf{x}$ とは次式で関係づけられる。

$$\mathbf{w} = T\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (9)$$

ここで、

$$T = \begin{bmatrix} 1 & & & & -\alpha_0 \\ & 1 & & & -\alpha_1 \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & & & & 1 - \alpha_{n-2} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{e}$ については、

$$\dot{\mathbf{e}} = E\mathbf{e} \quad (10)$$

が成り立つ。そして、推定量 $\hat{\mathbf{x}}$ は次式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{x}} = L_1 \mathbf{w} + L_2 \mathbf{y} \quad (11)$$

あるいは,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{e}} \quad (12)$$

ここで,

$$\tilde{\mathbf{e}} \triangleq L_1 \mathbf{e} \quad (13)$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

この $\tilde{\mathbf{e}}$ が $(n-1)$ 次のオブザーバによる推定誤差であり, (10) より, $\mathbf{e}(t) = \exp Et \cdot \mathbf{e}(0)$ なので, この推定誤差が減少するためには E の固有値がすべて負の実部をもたねばならない. (8) において α_i を適当に選ぶことにより, E の固有値を任意に指定することができる. 詳しい議論は参考文献 (6), (7) を参照されたい.

3. オブザーバの固有値と最適レギュレータの評価の増分との関係

評価として, 次式を考える.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\mathbf{x}' Q \mathbf{x} + r u^2] dt \quad (15)$$

ここで, Q は $n \times n$ 実数値対称正定行列であり, r は正数である.

オブザーバを用いて直接測定できない状態変数を推定し, その推定量 $\hat{\mathbf{x}}$ を使ってレギュレータ系を構成するとき, 状態変数がすべて利用できる場合に比べて評価 (15) には, 一般に増分が生じる. J. J. Bongiorno らによれば, その増分は次式で与えられる³⁾.

$$\Delta J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \tilde{\mathbf{e}}' M S M \tilde{\mathbf{e}} dt \quad (16)$$

ここで, $\tilde{\mathbf{e}}$ はオブザーバによる推定誤差であり, M は次の代数行列リカッチ方程式の実数値対称正定行列解である.

$$[0] = M F + F' M - M S M + Q \quad (17)$$

ただし,

$$S \triangleq g r^{-1} g' \quad (18)$$

以下では, n 次のオブザーバを用いた場合の ΔJ について論ずるが $(n-1)$ 次の場合も同様に考察できる. n 次の場合, (16) の $\tilde{\mathbf{e}}$ に相当するのが (5) より $\mathbf{e}$ であるから,

$$\Delta J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathbf{e}' M S M \mathbf{e} dt \quad (19)$$

となる. また, $M S M = (g' M)' r^{-1} (g' M) = n \times n$ 定数行列であり, $\text{rank } M S M = 1$ なので $M S M$ の固有値は

0 の $(n-1)$ 重根と $g' M$ の各要素の 2 乗和 ($= \lambda_M$ とする) である. ゆえに,

$$M S M = U_1 A_{M S M} U_1' = U_1 A_{M S M} U_1^{-1} \quad (20)$$

ここで, $A_{M S M} = \text{diag} \{ \lambda_M, 0, \dots, 0 \}$ なる直交行列 U_1' が存在する. かくして (19) は,

$$\Delta J = \frac{\lambda_M}{2} \int_0^\infty (\boldsymbol{\sigma}_1' U_1' \mathbf{e})^2 dt \quad (21)$$

ここで, $\boldsymbol{\sigma}_1' = [10 \dots 0]$

となる. (21) の計算を実行するには, (6) より $\mathbf{e}(t) = \exp [F - f h'] t \cdot \mathbf{e}(0)$ だから, $\exp [F - f h'] t$ を求める必要が生じる. いま,

$$D \triangleq F - f h' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad (22)$$

とおき, 固有値は相異なるとし, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とおけば,

$$A_D = V^{-1} D V \quad (22)$$

ここで, $A_D = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}$

なる正則行列 V が存在し, 次の関係が成立つ⁸⁾.

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \dots \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \dots \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 \dots \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$V = \Theta \cdot \Gamma^{-1} \quad (25)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_{n-1}(\lambda_1) & \theta_{n-1}(\lambda_2) & \dots & \theta_{n-1}(\lambda_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_2(\lambda_1) & \theta_2(\lambda_2) & \dots & \theta_2(\lambda_n) \\ \theta_1(\lambda_1) & \theta_1(\lambda_2) & \dots & \theta_1(\lambda_n) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

($i=1, 2, \dots, n$
 $k=0, 1, \dots, n-2$)

$$\theta_{k+1}(\lambda_i) = \theta_k(\lambda_i) \lambda_i + \alpha_{n-1-k} \text{ かつ } \theta_0(\lambda_i) = 1 \quad (27)$$

$$\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{r_2} & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \frac{1}{r_n} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$r_i = - \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_i} = \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j), \quad (29)$$

$$f(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = \sum_{i=0}^n \alpha_{n-i} \lambda^{n-i}, \quad \alpha_n = 1$$

これらを用いると,

$$\exp D t = V \cdot \exp A_D t \cdot V^{-1} \quad (30)$$

であり, D の固有値が負の無限遠に近づくときの様子を知るために, $\lambda_i = i \cdot \lambda (i=1, \dots, n)$ とおくと, (24) は

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \cdots \lambda^{n-1} \\ 1 & 2\lambda \cdots (2\lambda)^{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n\lambda \cdots (n\lambda)^{n-1} \end{bmatrix} \quad (31)$$

となる。そして (26) は、

$$\Theta = \begin{bmatrix} \lambda^{n-1} + \alpha_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_1 \cdots (n\lambda)^{n-1} + \alpha_{n-1}(n\lambda)^{n-2} + \cdots + \alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda^2 + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_{n-2} \cdots (n\lambda)^2 + \alpha_{n-1}(n\lambda) + \alpha_{n-2} \\ \vdots \\ \lambda + \alpha_{n-1} \cdots (n\lambda) + \alpha_{n-1} \\ 1 \cdots 1 \end{bmatrix}$$

となり、(29) は

$$r_i = \prod_{j=1}^n (\lambda_i - \lambda_j) = \prod_{j=1}^n (i-j) \lambda^{n-1} (i, j=1, \dots, n) \quad (32)$$

となって、

$$V \approx \begin{bmatrix} 0(\lambda^0) & 0(\lambda^0) & \cdots & 0(\lambda^0) \\ 0(\lambda^{-1}) & 0(\lambda^{-1}) & \cdots & 0(\lambda^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0(\lambda^{-(n-1)}) & 0(\lambda^{-(n-1)}) & \cdots & 0(\lambda^{-(n-1)}) \end{bmatrix}$$

$0(\lambda^i)$ は λ^i の order を示す。

が得られる。したがって (30) は

$$\exp Dt \approx \begin{bmatrix} 0(\lambda^0) & 0(\lambda^1) \cdots 0(\lambda^{n-1}) \\ 0(\lambda^{-1}) & 0(\lambda^0) \cdots 0(\lambda^{n-2}) \\ \vdots & \vdots \\ 0(\lambda^{-(n-1)}) & 0(\lambda^{-(n-2)}) \cdots 0(\lambda^0) \end{bmatrix} \quad (34)$$

となる。(21) における ΔJ の計算で必要となるのは、 $U_1'e$ の第 1 行目の要素であり、オブザーバの構成の仕方から、 $e(0)$ の要素のうち $e_n(0)$ は 0 とすることができる。 $(x_n$ は出力なので、 $z_n(0) = y(0)$ とすればよいから。) そこで、 $e(0) = [e_1(0) \cdots e_{n-1}(0) 0]'$ において、一般に $e_{n-1}(0) \neq 0$ と考えて、

$$e(t) = \exp Dt \cdot e(0) \approx [0(\lambda^{n-2})e^{2t}e_{n-1}(0), 0(\lambda^{n-3})e^{2t}e_{n-1}(0), \dots, 0(\lambda^{-1})e^{2t}e_{n-1}(0)]' \quad (35)$$

となる。もし、 U_1' の第 1 行が $[0 \cdots 0 \ x \ x]$ (x : ゼロでない要素) ならば、 $U_1'e$ の第 1 行目の order は $0(\lambda^0)e^{2t}$ となり、(21) は、

$$\Delta J \approx \frac{\lambda_M}{2} \int_0^\infty e^{2\lambda t} e_{n-1}^2(0) dt = \frac{\lambda_M e_{n-1}^2(0)}{-4\lambda} \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow -\infty) \quad (36)$$

となる。もし、 U_1' の第 1 行が $[0 \cdots 0 \ x \ x \ x]$ ならば、 $U_1'e$ の第 1 行目の order は $0(\lambda^1)e^{2t}$ となり、(21) は、

$$\Delta J \approx \frac{\lambda_M \cdot e_{n-1}^2(0)}{-4} \cdot \lambda \rightarrow \infty \quad (\lambda \rightarrow -\infty) \quad (37)$$

となる。以上のように、 U_1' の構造によって ΔJ の変化が左右されるが、一般に U_1' の第 1 行が (36) の場合のように $[0 \cdots 0 \ x \ x]$ なることは、ほとんど起こりえないので (19) の ΔJ はオブザーバの固有値を負の無限遠に近づけると、 $n \geq 3$ ではほとんどの場合無限大となる。なお、 $(n-1)$ 次のオブザーバを用い、

た場合には、 $y(0) = 0$ ならば、ほぼ同様な結論が得られ、 $y(0) \neq 0$ ならば、 $n \geq 2$ のいかなる場合も ΔJ は無限大となることがわかる。

4. オブザーバを考慮した新しい評価

3. においてオブザーバによる推定誤差のために評価 (15) には増分が生じ、しかもオブザーバの固有値によっては $\Delta J \gg J^*$ (J^* は状態変数がすべて利用できる場合の最小評価値) の可能性が大であることがわかった。こういう場合には、評価 (15) を最小にする制御則 u を見つけるという問題はあまり意味がない。そこで、 $u = -k'x$ を用いるときにこの制御則はどのような 2 次形式評価を最適にしているかを考えることにする。

ここでは、 $(n-1)$ 次のオブザーバの場合について述べるが、 n 次の場合についても同様に論ずることができる。推定量 $\hat{x}$ は系の状態変数 x とオブザーバによる推定誤差 $\tilde{e}$ との線形結合で表わされるので、系の方程式として、(1) と (10) を用いて、

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\tilde{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (38)$$

を考え、評価として

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \{ [x' e'] Q \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + ru^2 \} dt \quad (39)$$

を考える。ここで、

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2' & Q_3 \end{bmatrix} > 0, \quad r > 0 \quad (40)$$

Q_1 は $n \times n$ 実数値対称正定行列

Q_2 は $n \times (n-1)$ 実数値行列

Q_3 は $(n-1) \times (n-1)$ 実数値対称正定行列

(38) は完全可制御ではないが、 (F, g) が完全可制御、 E が安定行列とすれば、(39) を最小にする最適制御則 u^* を得ることができる。(証明は付録を参照)

$$u^* = -k^* \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$k^* = r^{-1} [g' 0] M$$

ここで、 M は次の代数行列リカッチ方程式の実数値対称正定行列解である。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F' & 0 \\ 0 & E' \end{bmatrix} M - M \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix} [r^{-1}] [g'^0] M + Q \quad (42)$$

そして、

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2' & M_3 \end{bmatrix} \quad (43)$$

M_1 は $n \times n$ 実数値対称正定行列

M_2 は $n \times (n-1)$ 実数値行列

M_3 は $(n-1) \times (n-1)$ 実数値対称正定行列

とおき、(42) を分割すると、

$$[0] = M_1 F + F' M_1 - M_1 g r^{-1} g' M_1 + Q_1 \quad (44)$$

$$[0] = M_2 E + F' M_2 - M_1 g r^{-1} g' M_2 + Q_2 \quad (45)$$

$$[0] = M_3 E + E' M_3 - M_2' g r^{-1} g' M_2 + Q_3 \quad (46)$$

となる。また (41) は

$$u^* = -k_1' x - k_2' e$$

$$k_1' \triangleq r^{-1} g' M_1, \quad k_2' \triangleq r^{-1} g' M_2 \quad (47)$$

となる。いっぽう、推定量 $\hat{x}$ は (12), (13) より、 $\hat{x} = x + L_1 e$ であり、この $\hat{x}$ を使って制御則をつくると、

$$u = -k' \hat{x} = -k' x - k' L_1 e \quad (48)$$

となる。(47) と (48) とが一致するためには、

$$k' = k_1' \text{ かつ } k' L_1 = k_2' \text{ すなわち } g' M_1 L_1 = g' M_2 \quad (49)$$

でなければならない。(49) が成立するための十分条件は、

$$M_2 = M_1 L_1 \quad (50)$$

であり、必要条件は g の構造によるために明確な形はわからないので、(50) の仮定のもとに議論をすすめることにする。(14) の L_1 の形から、(50) の M_2 は M_1 の第 n 列目を削ったものになっている。(50) を (45) へ代入し、(44) を使うと、

$$Q_2 = Q_1 L_1 + M_1 (F L_1 - L_1 E) \quad (51)$$

となり、さらに整理すると、

$$Q_2 = Q_1 L_1 + M_1 \begin{bmatrix} \vdots & \alpha_0 \\ 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \alpha_{n-2} \\ \vdots & 1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

を得る。 Q_3 は $Q > 0$ の条件を満たすように決めればよい。 M_3 は (46) によって Q_3 と関係づけられており、 Q_3 を決めることによって決まる。

以上のことを簡単な例題で考えてみることにする。

例 題

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (53)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \quad (54)$$

$$\begin{cases} Q_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r=1 \end{cases} \quad (55)$$

で記述される系を考える。いま、オブザーバの固有値を $-\alpha (\alpha > 0)$ とすると、

$$\dot{e} = -\alpha e \quad (56)$$

となる。このとき Q と M がどのように求まるかを調べる。まず、(44) より M_1 が求まり、それを (50) へ代入すると M_2 が求まる。その結果、(52) より Q_2 も求まる。そして、 $Q_3 = q$ とおけば、

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2\alpha+3 \\ 0 & 1 & \alpha+2 \\ 2\alpha+3 & \alpha+2 & q \end{bmatrix} \quad (57)$$

が得られる。条件 $Q > 0$ から、

$$q > \frac{1}{2} (6\alpha^2 + 20\alpha + 17) \quad (58)$$

となる。また、(46) より M_3 が求まる。

$$M_3 = \frac{1}{2\alpha} (q-4) > \frac{3}{2}\alpha + 5 + \frac{9}{4\alpha} \quad (59)$$

こうして M は次のように得られる。

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & M_3 \end{bmatrix} \quad (60)$$

(58), (59) より、 $\alpha \rightarrow$ 大のとき、 $q \rightarrow$ 大、 $M_3 \rightarrow$ 大となり、推定誤差の減衰を速める (いまの場合、 α を大きくする) ときには、評価において、 e への重み Q_2, Q_3 の要素を大きくしなければならないことがわかる。そして、それに伴って評価の値も大きくなる。この増大は、オブザーバの推定能力に対応していると考えられる。

5. 結 言

以上、オブザーバを考慮した新しい評価に対して推定量を用いた制御則がどのような 2 次形式評価を最適にしているかについて考察し、十分条件を得た。この場合、推定誤差の減衰を速めるときには、誤差にかかる重みを系の状態変数にかかる重みに比して大きくしなければならない。このことはオブザーバの推定能力に対応していると考えられ、3. における増分との関連で考えるならば、評価における増分は推定誤差による結果であり、誤差の減衰を速めれば速めるほどその増分は増大するということから、最初の評価には含まれていないオブザーバの推定能力への評価が、暗にその増分に対応していると考えられることができる。

最後に、有益な助言をいただいた本学助手細江繁幸氏に深く感謝する。

参 考 文 献

- 1) D.G. Luenberger: Observing the State of a Linear

- System, IEEE. Trans. on Military Electronics, MIL-8, 74/78 (1964)
- 2) D. G. Luenberger: Observers for Multivariable Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-11-2, 190/197 (1966)
 - 3) J. J. Bongiorno & D. C. Youla : On Observers in Multi-variable Control Systems, Int. J. Control, 8-3, 221/243 (1968)
 - 4) J. J. Bongiorno & D. C. Youla : (Correspondence) Discussion of "On Observers in Multi-variable Control Systems", Int. J. Control, 12-1, 183/190 (1970)
 - 5) M. M. Newmann : Specific Optimal Control of the Linear Regulator Using a Dynamical Controller Based on the Minimal-order Luenberger Observer, Int. J. Control, 12-1, 33/48 (1970)
 - 6) Chi-Tsong Chen : Introduction to Linear System Theory, 259/298 Holt, Rinehart and Winston (1970)
 - 7) B. D. O. Anderson & J. B. Moore : Linear Optimal Control, 145/191 Prentice-Hall (1971)
 - 8) I. Kaufman : The Inversion of the Vandermonde Matrix and the Transformation to the Jordan Canonical Form, IEEE Trans. on Automatic Control AC-14-6, 774/777 (1969)
 - 9) R. E. Kalman : When is a Linear Control System Optimal?, Trans. ASME, J. Basic Engrg., ser. D, 86, 51/60 (1964)
 - 10) R. Bellman : Introduction to Matrix Analysis, 223/239 McGraw-Hill (1960)

□ 付

系の方程式として、次式(1)を考え、評価は(2)を考えることにする。

$$\dot{\mathbf{x}} = \bar{F}\mathbf{x} + \bar{g}u \quad (1)$$

$$J[\mathbf{x}(t)] = \frac{1}{2} \int_t^\infty [\mathbf{x}'Q\mathbf{x} + ru^2] dt \quad (2)$$

ここで、

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ e \end{bmatrix}, \quad \bar{F} \triangleq \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}, \quad \bar{g} \triangleq \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$Q > 0, \quad r > 0$$

である。いま、 (F, g) は完全可制御であり、 E は安定行列であるとする。そして、最適制御則を次のように仮定する。

$$u = -k'\mathbf{x} \quad (4)$$

ここで、 k は $(2n-1)$ 次のベクトルで要素は未知である。(4)を(1)、(2)へ代入すると、

$$\dot{\mathbf{x}} = (\bar{F} - \bar{g}k')\mathbf{x} \quad (5)$$

$$J[\mathbf{x}(t)] = \frac{1}{2} \int_t^\infty \mathbf{x}'(Q + krk')\mathbf{x} dt \quad (6)$$

が得られ、(6)の時間全微分をとると、

$$\dot{J}[\mathbf{x}] = -\frac{1}{2} \mathbf{x}'(Q + krk')\mathbf{x} \quad (7)$$

となる。 $\dot{J}$ は $\mathbf{x}$ に関して2次形式であり、系(5)は線形なので、 J もまた次の2次形式で与えられると仮定する。

$$J[\mathbf{x}(t)] = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(t) M \mathbf{x}(t) \quad (8)$$

ここで、 M は定数行列であり、初期値 $\mathbf{x}(0)$ に対する評価は $J[\mathbf{x}(0)]$ で与えられる。(8)の時間微分は、

$$\dot{J}[\mathbf{x}] = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{x}}' M \mathbf{x} + \mathbf{x}' M \dot{\mathbf{x}}\} \quad (9)$$

録 □

となる。(5)を(9)に代入すると

$$\dot{J}[\mathbf{x}] = \frac{1}{2} \mathbf{x}' \{(\bar{F} - \bar{g}k')' M + M(\bar{F} - \bar{g}k')\} \mathbf{x} \quad (10)$$

が得られる。すべての $\mathbf{x}$ に対して、(7)と(10)とが等しくなるためには、次式が成立していなければならない。

$$(\bar{F} - \bar{g}k')' M + M(\bar{F} - \bar{g}k') = -(Q + krk') \quad (11)$$

(8)で仮定したように、評価値は M によって決まる。その M は(11)より k' の関数となっている。評価を最小にする k' を求めるために、(11)の両辺を k' で微分すると、 $\partial M / \partial k' = [0]$ 、 $\partial k' / \partial k' = I$ の性質を使って、

$$k' = r^{-1} \bar{g}' M \quad (12)$$

を得る。これを(11)へ代入すると、

$$[0] = M\bar{F} + \bar{F}'M - M\bar{g}r^{-1}\bar{g}'M + Q \quad (13)$$

となる。ここで、

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2' & M_3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2' & Q_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

M_1, Q_1 は $n \times n$ 実数値対称正定行列

M_2, Q_2 は $n \times (n-1)$ 実数値行列

M_3, Q_3 は $(n-1) \times (n-1)$ 実数値対称正定行列

とおいて、(13)を分割すると、

$$[0] = M_1 F + F' M_1 - M_1 g r^{-1} g' M_1 + Q_1 \quad (15)$$

$$[0] = M_2 E + F' M_2 - M_1 g r^{-1} g' M_2 + Q_2 \quad (16)$$

$$[0] = M_3 E + E' M_3 - M_2' g r^{-1} g' M_2 + Q_3 \quad (17)$$

が得られる。(15)は M_2, M_3 とは無関係であり、しかも $e \equiv 0$ のときのレギュレータ問題と同じになるので $M_1 > 0$ が求まる。そして、 $F - g r^{-1} g' M_1$ は安定行列になることが知られている⁹⁾。(12)は、

$$k' = [r^{-1}g'M_1, r^{-1}g'M_2] \quad (18)$$

となり、最初に仮定した最適制御則 (4) は、

$$u^* = -[r^{-1}g'M_1, r^{-1}g'M_2]x \quad (19)$$

となる。(5)へ(18)を代入すると、

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} F - gr^{-1}g'M_1 & -gr^{-1}g'M_2 \\ 0 & E \end{bmatrix} x \quad (20)$$

となる。 M_2 については、(16)は次のように書き直すことができる。

$$[0] = M_2 E + (F - gr^{-1}g'M_1)' M_2 + Q_2 \quad (21)$$

そして、(21)の解 M_2 は次の定理によって存在が保証される。

<定理>

$$AX + XB = C \quad (a)$$

ここで、 A, B, C, X はそれぞれ $m \times m, n \times n, m \times n,$

$m \times n$ 定数行列である。

(a) がすべての C に対して解をもつための必要十分条件は $\lambda_i + \mu_j \neq 0$ である。

ここで、 λ_i, μ_j はそれぞれ A, B の特性根である (証明は文献 (10) を参照されたい)。

(21) に対して、(a) において、

$$A = (F - gr^{-1}g'M_1)', \quad B = E, \quad C = -Q_2$$

とおけば、 $F - gr^{-1}g'M_1$ と E はともに安定行列であることから、これらの行列の固有値はすべて負の実部をもち、定理の条件を満たすので解は存在する。また、(20) は漸近安定となる。このように (19) によって決まる制御則 u^* を用いれば、閉ループ系は漸近安定となっていることがわかる。(証明終)