初期状態を考慮した最小等価系モデルの 入出力観測による作製†

大河内 正 明*・北 森 俊 行**

* 日本アイ・ビー・エム(株) 東京都港区六本木 3-2-12

** 東京大学工学部 東京都文京区本郷 7-3-1

(昭和 46 年 7 月 14 日 受付)

Construction of Minimal Equivalent Systems of Linear Multivariable Systems from Input-Output Observation

Masaaki OHKOHCHI and Toshiyuki KITAMORI

(* IBM Japan Ltd., Minato-ku, Tokyo

(** Faculty of Engineering, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo)

(Received July 14, 1971)

This paper presents a new method for constructing minimal state-variable models (minimal equivalent systems) of linear time-invariant multivariable systems of unknown structure from the input-output observation.

In contrast with earlier approaches which construct the model of all inputs and outputs in one phase, our method enlarges the model in multiple phases so as to satisfy the behavior of each added output variable.

The main results are as follows:

- 1) Multiple output systems are treated as a natural extension of a well-known single output system identification.
- 2) Minimal equivalent systems can be obtained in one of the canonical forms presented by Luenberger.
- 3) Systems with any initial state can be treated, so that minimal equivalent free systems can also be obtained by this method.

A method to transform the model into the Jordan canonical form is also considered.

1. ま え が き

内部構造が未知の対象系に対して数学モデルを作る場合、モデルとしては入出力に関し等価な範囲でできるだけ簡潔なものが望ましい。数学モデルとしては、制御理論の基礎になる状態方程式モデルが便利である。伝達関数や、インパルス応答から状態方程式を求める方法は Kalman¹⁾ らによって扱われているが、これらは初期状態が無視できる対象系にしか意味を持たない。

そこでわれわれは、内部構造未知で初期状態に制約がない線形多入力多出力の対象系に対し、入出力の観測により、状態変数最小の状態方程式モデルを作る方法を考察してみた。その結果、最小性を保ちつつ、1出力変数ずつ段階的にモデルを拡大する方針をとることにより、次のような特徴をもった方法が得られた。

① 同様の問題を扱った Gopinath²⁾ の方法などが多出力系の取扱いに苦勞しているのに対し、われわれの方法は、多出力系が周知の1出力系の取扱い³⁾ の自然な拡張として容易に扱える。

② 初期状態をも扱っているので、自由系のモデル

† 第10回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭46・8)

作製にも利用できる。

③ 最小状態変数モデルが Luenberger⁴⁾ の示した canonical form の 1 つ (以後 LCF と呼ぶ) で得られ、非規格化パラメータ数が少なく状態方程式の意味も把握し易い。

LCF からは、Jordan canonical form (以後 JCF と呼ぶ) へも容易に変換できる。

本稿は、この方法の基本方針・特徴を明らかにすることを目的として述べる。以下、2. では、扱う用語と問題を明確にし、3. では最小等価系の意味を具体的に説明する。4. でこの問題に関連する方法を概観し、5. 以下で新しい方法について述べる。

2. 用語と問題の設定

本稿では、次のように記述できる有限次元線形定係数離散時間系のみを扱う。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad t=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ はそれぞれ時刻 t における n 次状態ベクトル、 r 次入力ベクトル、 m 次出力ベクトルであり、 $\mathbf{x}_0$ は初期状態ベクトル、 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ はそれぞれ $n \times n$, $n \times r$, $m \times n$, $m \times r$ 定数行列である。

以後、(1) 式で表わされる系を系 $S(n, r, m, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{x}_0)$ または単に系 S と表わす。また、必要に応じて系 S_i のように添字などで系を区別する。(1) 式は $r=0$ のとき、 $\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{u}(t)$ がなくなり自由系を表わすが、以後の記述は、自由系の場合も入力に関する記述を取り除くことによりそのまま成立する。

定義 1: 等価性 任意の入力系列 $\{\mathbf{u}(t)\}_{t=0,1,2,\dots}$ に対して、系 S_1 の出力系列 $\{\mathbf{y}_1(t)\}_{t=0,1,2,\dots}$ と、系 S_2 の出力系列 $\{\mathbf{y}_2(t)\}_{t=0,1,2,\dots}$ が一致するとき、系 S_1 と系 S_2 は等価であるという。

定義 2: 最小等価系 系 S と等価な系のうちで、系 $\tilde{S}$ の状態空間の次元 (系の次数) が最小であるとき、系 $\tilde{S}$ を系 S の最小等価系と呼ぶ。

等価性・最小等価性を初期状態が零の系に対してのみ定義している文献も多いが、ここでは一般の初期状態を扱っていることに注意する必要がある。

ここで扱う問題は、 r 入力 m 出力の対象系が、有限次元線形定係数離散時間系と見なせることしか既知でないとき、その最小等価系の 1 つを、入出力の観測だけから (1) 式のように求めることである。ただし、観測入力は出力のフィードバックになっておらず、十分ランダムな変化をするものとする。

3. 最小等価系

本章では、系 S の状態方程式が与えられたとき、その最小等価系がなにを意味するかを、可制御性・可観測性との関連で説明する。

系 $S(n, r, m, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{x}_0)$ は、適当な正則行列 T により、系 $S(n, r, m, T^{-1}\mathbf{A}T, T^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}T, \mathbf{D}, T^{-1}\mathbf{x}_0)$ と状態変換すると、Fig. 1 のように 4 つの部分系の合成系として表わせる¹⁾。

$\mathbf{u}$: $r \times 1$ input vector
 $\mathbf{y}$: $m \times 1$ output vector
 S_{co} : controllable & observable subsystem
 $S_{c\sim o}$: controllable & unobservable subsystem
 $S_{c\sim o\sim}$: uncontrollable & observable subsystem
 $S_{c\sim o\sim}$: uncontrollable & unobservable subsystem
Fig. 1 Canonical structure of a linear time-invariant system S

ここで、非可観測な部分系 $S_{c\sim o}$, $S_{c\sim o\sim}$ は等価性に影響を与えない。 S_{co} の等価系は可制御可観測である限り次数は同じである²⁾が、可観測な自由部分系 $S_{c\sim o}$ は、後述する例 1 からわかるように、より低次の等価系をもつことがある。よって系 S の最小等価系 $\tilde{S}$ は Fig. 2 で与えられる。

Fig. 2 Minimal equivalent system $\tilde{S}$ of the system S shown by Fig. 1

【例 1】 自由系

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(t+1) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}_1(t) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) & (\lambda, a, b \neq 0) \end{cases} \quad (2)$$

は可観測で、初期状態の全要素は非零であるが、より低次の自由系

$$\begin{cases} \mathbf{x}_2(t+1)=[\lambda]\mathbf{x}_2(t) & \mathbf{x}_2(0)=[1] \\ \mathbf{y}_2(t)=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\mathbf{x}_2(t) \end{cases} \quad (3)$$

と等価になる。

系 S が自由部分系を含む場合は、系 S の状態方程式から単に可観測部分系を取り出すだけでは、最小等価系 $\tilde{S}$ が得られない点に注意する必要がある。

また、 S_{co} から S_{co} の最小等価系を求めることは、例 1 で (2) 式から (3) 式へ変換することに相当しているが、これは S_{co} が JCF で表わされていない場合は、あまり簡単ではない⁵⁾。

伝達関数やインパルス応答の最小実現は、初期状態を $\mathbf{o}$ として S_{co} を求めていることに相当している。

4. 従来の関連手法

1 出力系の場合には、最小等価系の次数 n において、入力 $\mathbf{u}$ と出力 $\mathbf{y}$ の間に、スカラー差分方程式

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t+n) + \alpha_1 \mathbf{y}(t+n-1) + \dots + \alpha_n \mathbf{y}(t) \\ = \mathbf{b}_0' \mathbf{u}(t+n) + \mathbf{b}_1' \mathbf{u}(t+n-1) + \dots + \mathbf{b}_n' \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

が成立し、係数が対象系に対し一意に決まるので、これを入出力の観測から (ノイズがあるときは最小 2 乗法などを用いて) 求め、phase-variable canonical form の状態方程式へ変換する方法³⁾ がよく知られている。

m 出力系 ($m > 1$) の場合は、最小等価系 $\tilde{S}$ の状態方程式から状態変数を消去して (4) 式に対応するベクトル差分方程式を求めると、

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t+p) + \mathbf{A}_1 \mathbf{y}(t+p-1) + \dots + \mathbf{A}_p \mathbf{y}(t) \\ = \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(t+p) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t+p-1) + \dots + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 p : 系 $\tilde{S}$ の observability index, $\mathbf{A}_i$: $m \times m$ 行列, $\mathbf{B}_i$: $m \times r$ 行列

となるが、(5) 式の係数行列が対象系に対して一意に決まらないため、1 出力系の場合よりも取扱いが困難になっている。

(5) 式を直接扱ったものに Valis⁶⁾ があるが、これは $\mathbf{o}$ でない列を $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p$ のある位置に、系 $\tilde{S}$ の次数 n だけ指定することにより、係数行列が対象系に対して一意に決まることを利用したものであり、最小 2 乗法によりパラメータを求めながら、非零に指定できる n 個の列を求めるアルゴリズムになっている。状態方程式への変換は述べられていない。

Gopinath²⁾ は、状態方程式モデルを直接求めるアルゴリズムを導いているが、高次モデルから次数を減らしながらあらゆる可能性を調べるため計算に無駄が多

い。また、得られる状態方程式は、観測行列だけしか規格化されない^{*1}。

筆者は、1 出力系の直和として状態方程式モデルを実現した後で最小化する方法なども検討してみた⁷⁾が、自由部分系の取扱いに苦勞するため、後述する方法よりも面倒である。

5. 新作製法

5.1 基本方針

Gopinath らの多出力系の取扱いが、全入出力についての最小等価系モデルを一度に作るものであるのに対し、新作製法は 1 出力変数ずつ、その挙動を満たすように最小等価系モデルを拡大していく方針をとる。つまり、 r 入力 m 出力の対象系に対して、 $l-1$ 個の出力 $y_1, \dots, y_{l-1}$ の挙動を満たす状態方程式ができているとき、追加した出力 y_l の挙動を、それまでの状態変数 $[s_1' \dots s_{l-1}']'$ の観測として説明を試み、それができない場合には、 $y_1, \dots, y_{l-1}$ の記述に影響を与えないように状態を必要最小限だけ拡大して $[s_1' \dots s_{l-1}' s_l']'$ とし y_l の挙動を記述する (この 1 段階を以後 Phase l と呼ぶ) ことを $l=1, 2, \dots, m$ において行なう。このとき、この最小等価系モデルは、状態空間の基底を適当にとることにより、次の LCF で表わせる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s_1(t+1) \\ s_2(t+1) \\ \vdots \\ s_m(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_m(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_m \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} h_1 & & & \\ & h_{21} & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_m(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} d_{10} \\ d_{20} \\ \vdots \\ d_{m0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

ただし、

$$F_i = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I \\ \vdots & & \\ -\mathbf{a}_i' & & \end{bmatrix} : n_i \times n_i, \quad F_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi_{ij}' \end{bmatrix} : n_i \times n_j$$

*1 Gopinath の方法を改良した Budin⁸⁾ の方法がその後発表され、計算量は改善されたがやはり観測行列だけしか規格化されない。

$$G_i = \begin{bmatrix} d_{i1} \\ d_{i2} \\ \vdots \\ d_{i,n_i} \end{bmatrix} : n_i \times r, \quad h_i = [1 \ 0 \cdots 0] : 1 \times n_i$$

$$h_{ij} = \begin{cases} \mathbf{o}' & (n_i \neq 0) \\ \varphi_{ij}' & (n_i = 0) \end{cases} : 1 \times n_j$$

$$\mathbf{s}_i(t) = [s_{i1}(t) \ s_{i2}(t) \ \cdots \ s_{i,n_i}(t)]' : n_i \times 1$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = [\alpha_i^{n_i}, \alpha_i^{n_i-1}, \dots, \alpha_i^1]' : n_i \times 1$$

$$\varphi_{ij} = [\varphi_{ij}^{n_i}, \varphi_{ij}^{n_i-1}, \dots, \varphi_{ij}^1]' : n_j \times 1$$

$$\mathbf{u} : r \times 1, \quad n = \sum_{i=1}^m n_i, \quad \text{prime}' \text{ は転置を表わす}$$

この LCF は周知の phase-variable canonical form の拡張になっており、非規格化パラメータは $n(m+r) + mr$ 以下になる。

最小等価系に限らず、一般に可観測系の状態方程式は、状態の正則変換により、一意に LCF で表わせる (付録 A 参照)。LCF で表わしたモデルの構造は、たとえば 3 出力系の場合 Fig. 3 のようになる。

Fig. 3 Structure of the 3-output system in LCF

5.2 入出力間に成立する差分方程式

LCF の状態変数と入出力との関係および入出力間に成立するスカラー差分方程式を (6) 式から求める。

$y_1, \dots, y_{l-1}$ についての差分方程式と $s_1, \dots, s_{l-1}$ がすでに決まっているとき、 y_l についての差分方程式と s_l は次のようになる。 ($l=1, 2, \dots, m$)

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_l(t) &= \begin{bmatrix} y_l(t) \\ y_l(t+1) \\ \vdots \\ y_l(t+n_l-1) \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} d_{l0} & & & \\ d_{l1} & d_{l0} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ d_{l,n_l-1} & \cdots & d_{l1} & d_{l0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{u}(t+1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(t+n_l-1) \end{bmatrix} \quad (7) \\ y_l(t+n_l) &+ \alpha_l^1 y_l(t+n_l-1) + \cdots + \alpha_l^{n_l} y_l(t) \\ &= \varphi_{l1}^1 y_1(t+n_l-1) + \varphi_{l1}^2 y_1(t+n_l-2) + \cdots + \varphi_{l1}^{n_1} y_1(t) \\ &+ \varphi_{l2}^1 y_2(t+n_l-1) + \varphi_{l2}^2 y_2(t+n_l-2) + \cdots + \varphi_{l2}^{n_2} y_2(t) \\ &\cdots \cdots \cdots \\ &+ \varphi_{l,l-1}^1 y_{l-1}(t+n_l-1) + \cdots + \varphi_{l,l-1}^{n_{l-1}} y_{l-1}(t) \\ &+ b_l^{\mu_l} \mathbf{u}(t+\mu_l-1) + b_l^{\mu_l-1} \mathbf{u}(t+\mu_l-2) + \cdots + b_l^1 \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし

$$\mu_l = \max \{n_1, n_2, \dots, n_{l-1}, n_l+1\}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_l^{n_l+1} \\ a_l^{n_l} \\ \vdots \\ a_l^1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \alpha_l^1 & & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \alpha_l^{n_l} & \cdots & \alpha_l^1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{l0} \\ d_{l1} \\ \vdots \\ d_{l,n_l} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} c_{li}^{n_i} \\ c_{li}^{n_i-1} \\ \vdots \\ c_{li}^1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varphi_{li}^1 & & & \\ & \varphi_{li}^2 & \varphi_{li}^1 & \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \varphi_{li}^{n_i} & \cdots & \varphi_{li}^2 & \varphi_{li}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{l0} \\ d_{l1} \\ \vdots \\ d_{l,n_i-1} \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, l-1) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} b_l^{\mu_l} \\ \vdots \\ b_l^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_l^{\mu_l} \\ \vdots \\ a_l^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{l1}^{\mu_l} \\ \vdots \\ c_{l1}^1 \end{bmatrix} - \cdots - \begin{bmatrix} c_{l,l-1}^{\mu_l} \\ \vdots \\ c_{l,l-1}^1 \end{bmatrix}$$

$$\mu_l > n_l + 1 \text{ のとき } a_l^{\mu_l} = a_l^{\mu_l-1} = \cdots = a_l^{n_l+2} = \mathbf{o}'$$

$$\mu_l > n_l \text{ のとき } c_{li}^{\mu_l} = c_{li}^{\mu_l-1} = \cdots = c_{li}^{n_l+1} = \mathbf{o}' \quad (i=1, 2, \dots, l-1)$$

【証明】 $n_l \neq 0$ のとき (6) 式から

$$\begin{aligned} y_l(t) &= s_{l1}(t) + d_{l0} \mathbf{u}(t) \\ s_{l1}(t+1) &= s_{l2}(t) + d_{l1} \mathbf{u}(t) \\ s_{l2}(t+1) &= s_{l3}(t) + d_{l2} \mathbf{u}(t) \\ &\cdots \cdots \cdots \\ s_{l,n_l-1}(t+1) &= s_{l,n_l}(t) + d_{l,n_l-1} \mathbf{u}(t) \\ s_{l,n_l}(t+1) &= \varphi_{l1}^1 s_1(t) + \cdots + \varphi_{l,l-1}^1 s_{l-1}(t) - \boldsymbol{\alpha}_l' s_l(t) \\ &\quad + G_l \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

を得る。(9) 式から $s_l(t)$ が (7) 式のように求まり、 s_l および既に得られている $s_1, \dots, s_{l-1}$ を (10) 式に代入して整理すると (8) 式を得る。 $n_l=0$ の場合も、(8) 式は同様に成立する。

以後、(8) 式を y_l についての差分方程式、 n_l をその次数と呼ぶことにする。

5.3 差分方程式から LCF への変換

前節の変換を逆にたどれば、 $y_1, \dots, y_{l-1}$ についての LCF が既知のとき (8) 式のように得られた y_l の差分方程式から対応する LCF のパラメータを求める手順が次のように得られる。

(8) 式の係数から

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_{li}^{n_i} \\ c_{li}^{n_i-1} \\ \vdots \\ c_{li}^1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varphi_{li}^1 & & & \\ & \varphi_{li}^2 & \varphi_{li}^1 & \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \varphi_{li}^{n_i} & \cdots & \varphi_{li}^2 & \varphi_{li}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{l0} \\ d_{l1} \\ \vdots \\ d_{l,n_i-1} \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, l-1) \quad (11) \\ \begin{bmatrix} a_l^{n_l+1} \\ \vdots \\ a_l^1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_l^{n_l+1} \\ \vdots \\ b_l^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{l1}^{n_l+1} \\ \vdots \\ c_{l1}^1 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} c_{l,l-1}^{n_l+1} \\ \vdots \\ c_{l,l-1}^1 \end{bmatrix} \quad (12) \end{aligned}$$

ただし、 $n_l+1 > n_l$ のとき

$$c_{li}^{n_l+1} = c_{li}^{n_l} = \cdots = c_{li}^{n_l+1} = \mathbf{o}' \quad (i=1, \dots, l-1)$$

とすると

$$\begin{bmatrix} d_{l0} \\ d_{l1} \\ \vdots \\ d_{l, n_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \alpha_l^1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ \alpha_l^{n_l} & \cdots & \alpha_l^1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_l^{n_l+1} \\ a_l^{n_l} \\ \vdots \\ a_l^1 \end{bmatrix} \quad (13)^{*1}$$

となり、(8) 式の係数とあわせて LCF のパラメータ

$$\alpha_l^1, \alpha_l^2, \dots, \alpha_l^{n_l}; d_{l0}, d_{l1}, \dots, d_{l, n_l} \\ \varphi_{li}^1, \varphi_{li}^2, \dots, \varphi_{li}^{n_l} (i=1, 2, \dots, l-1)$$

が得られる。

ここで、(11)~(13) 式の手順は、前節の変換式の一部 ($b_l^{\mu_l}, b_l^{\mu_l-1}, \dots, b_l^{\mu_l+2}$ に関する式) を使用していないので、与えられた (8) 式の差分方程式と、それから導いた LCF が同じ入出力関係を満たすとはただしにはいえない。そこで、求めた LCF を前節の変換で再び差分方程式に戻して、両差分式を比較してみる。差分方程式の係数のうち、 α_i と $\varphi_{li} (i=1, \dots, l-1)$ は、LCF でそのまま用いられているので問題ない。いま、両差分式の u の係数を $b_l^{\mu_l}, \dots, b_l^{\mu_l}$ および $\tilde{b}_l^{\mu_l}, \dots, \tilde{b}_l^{\mu_l}$ として、両差分方程式の差をとると、

$$(b_l^{\mu_l} - \tilde{b}_l^{\mu_l})u(t + \mu_l - 1) + \dots + (b_l^1 - \tilde{b}_l^1)u(t) = 0$$

となり、両差分方程式が一致しないならば、入力 u が $\mu_l - 1$ 次以下の自己回帰式を満たすことになり、十分ランダムな入力を扱っていることに反する。したがって十分ランダムな入力系列に対して成立する (8) 式の差分方程式から導いた LCF は、対象系の入出力関係を満たす。

5.4 最小性の検討と作製法のまとめ

phase l において、対象系の入出力関係を満たす (8) 式のような y_l の差分方程式は、次数 n_l の異なるものなど無数に存在する。本節では、これらのうちで、次数 n_l が最小のものについて検討するとともに、作製法をまとめる。

【性質 1】 対象系の最小等価系の LCF 表示から導いた y_l の差分方程式が、対象系の入出力関係を満たす最小次数の差分方程式であり、その係数は対象系に対して一意に決まる。

【証明】 phase l において、より低次の y_l の差分方程式が成立すれば、(11)~(13) 式で変換した LCF も対象系の入出力関係を満足し、かつ最小等価系よりも低次になって矛盾する。また、最小次数で係数の異なる 2 つの y_l の差分方程式が存在すれば、2 式の差をとることにより、より低次の差分方程式か、入力の自己回帰式が成立することになって矛盾する。

異なる LCF からは異なる差分方程式が導かれるから、性質 1 により、任意の最小等価系は同一の LCF へ正則変換できなければならない。

以上を最小等価系モデルの作製法とともに定理としてまとめると次のようになる。

【定理】 十分ランダムな入力系列に対して成立する (8) 式の差分方程式のうち、次数 n_l が最小のものを入出力の観測から $l=1, 2, \dots, m$ の順に求めて、(11)~(13) 式の手順で LCF に変換すると、それが最小等価系モデルの 1 つになり、任意の最小等価系と状態空間の座標のとり方の違いしかない。LCF の状態ベクトルも (7) 式から求まる。

6. 数 値 例

【例 2】 JCF 表示の 2 出力系

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

を満たす次の 12 組のデータから最小等価系モデルを作る。

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$u(t)$	-1	2	3	-6	-2	1	-1	7	0	1	-3	-
$y(t)$	0	0	0	-1	-1	3	5	3	-2	-11	-17	-20
	0	-1	0	4	2	-2	-5	-9	-6	-3	1	2

データを満たす最小次数の差分方程式が、

$$\begin{cases} y_1(t+3) - 3y_1(t+2) + 3y_1(t+1) - y_1(t) = u(t) \\ y_2(t) = y_1(t+2) - y_1(t+1) \end{cases}$$

で得られ、 $n_1=3, n_2=0$ となる。よって、(11)~(13) 式と (7) 式により、

$$\begin{bmatrix} d_{10} \\ d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -3 & 1 & & 0 \\ & 3 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_1(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_1(1) \\ y_1(2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{10} & d_{10} & 0 \\ d_{11} & d_{11} & d_{10} \\ d_{12} & d_{11} & d_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d_{20} = a_2^1 = b_2^1 + [\varphi_{21}^3 \ \varphi_{21}^2 \ \varphi_{21}^1][d_{10} \ d_{11} \ d_{12}]'$$

$$= 0 + [0 \ -1 \ 1][0 \ 0 \ 0]' = 0$$

が求まり、次の LCF 表示の最小等価系モデルが得られる。

*2 逆行行列が対角要素 1 の三角行列のため、 $d_{10}, d_{11}, \dots$ の順に容易に計算できる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{s}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{s}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \mathbf{s}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{s}(t) \end{array} \right.$$

この例題は Budin⁸⁾ の扱ったものであり、Budin は次の最小等価系モデルを得ている。

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{s}}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ \bar{\mathbf{s}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}(t) \end{array} \right.$$

【例 3】 ある 2 入力 4 出力の対象系 S に、十分ランダムな入力を加えて入出力を観測して、最小次数の差分方程式が次のように得られたとする。

$$\begin{aligned} y_1(t+2) - 0.2 y_1(t+1) - 0.03 y_1(t) &= [7 \ 1] u(t+1) + [-1.3 \ 0.1] u(t) \\ y_2(t+2) - 0.3 y_2(t+1) - 0.1 y_2(t) &= -0.5 y_1(t+1) - 0.05 y_1(t) \\ &\quad + [0.5 \ 0] u(t+2) + [1.85 \ 5] u(t+1) \\ &\quad + [3.05 \ -1] u(t) \\ y_3(t) &= -15 y_1(t+1) - 5.5 y_1(t) \\ &\quad + 10 y_2(t+1) + 2 y_2(t) \\ &\quad + [-5 \ 0] u(t+1) + [84 \ -35] u(t) \\ y_4(t+1) - 1.2 y_4(t) &= -2 y_1(t+1) - 0.2 y_1(t) - 2 y_2(t+1) + y_2(t) \\ &\quad + [1 \ 0] u(t+1) + [17.5 \ 9] u(t) \end{aligned}$$

このとき、 $n_1=n_2=2$, $n_3=0$, $n_4=1$ であり、(11)~(13) 式の変換により、LCF 表示の最小等価系 $\tilde{S}_L$ (5, 2, 4, $F, G, H, D, \mathbf{s}_0$) が次のように得られる。

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0.03 & 0.2 & & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ -0.05 & -0.5 & 0.1 & 0.3 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -0.2 & -2 & 1 & -2 & 1.2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0.1 & 0.3 \\ \cdots & \cdots \\ 2 & 5 \\ 0.2 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -5.5 & -15 & 2 & 10 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_0 = [0 \ 0 \ 1 \ -0.2 \ 1]'$$

ただし、初期状態 $\mathbf{s}_0$ は (7) 式によって求めた値であるとする。

次に、 $\tilde{S}_L$ から JCF 表示 $\tilde{S}_J$ (5, 2, 4, $A, B, C, D, \mathbf{x}_0$) への変換を扱う。(付録 B 参照)

行列 F のパラメータによって、

$$\begin{aligned} \beta_1(s) &= s^2 - 0.2s - 0.03 & \beta_2(s) &= s^2 - 0.3s - 0.1 \\ \beta_3(s) &= 1 & \beta_4(s) &= s - 1.2 \\ \psi_{21}(s) &= -0.5s - 0.05 & \psi_{31}(s) &= -15s - 5.5 \\ \psi_{32}(s) &= 10s + 2 & \psi_{41}(s) &= -2s - 0.2 \\ \psi_{42}(s) &= -2s + 1 & \psi_{43}(s) &= 0 \end{aligned}$$

とおくと、 $\beta_i(s)=0$ ($i=1, \dots, 4$) の根 $s=0.3, -0.1; 0.5, -0.2; 1.2$ がすべて相異なるので、行列 A は、

$$A = \text{diag}\{0.3, -0.1, 0.5, -0.2, 1.2\}$$

で与えられ、行列 C は、(B・3) 式によって、

$$\begin{aligned} c_{1(0.5)} &= c_{2(-0.2)} = c_{1(1.2)} = c_{2(1.2)} = c_{3(1.2)} = 0 \\ c_{1(0.3)} &= c_{1(-0.1)} = c_{2(0.5)} = c_{2(-0.2)} = c_{4(1.2)} = 1 \\ c_{2(0.3)} &= (1 \cdot \psi_{21}(0.3)) / \beta_2(0.3) = 2 \\ c_{3(0.3)} &= (1 \cdot \psi_{31}(0.3) + 2 \cdot \psi_{32}(0.3)) / \beta_3(0.3) = 0 \\ c_{4(0.3)} &= (1 \cdot \psi_{41}(0.3) + 2 \cdot \psi_{42}(0.3) \\ &\quad + 0.4 \cdot \psi_{43}(0.3)) / \beta_4(0.3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} c_{2(-0.1)} &= 0 & c_{3(-0.1)} &= -4 & c_{4(-0.1)} &= 0 \\ c_{3(-0.5)} &= 7 & c_{4(-0.5)} &= 0 \\ c_{3(-0.2)} &= 0 & c_{4(-0.2)} &= -1 \end{aligned}$$

を得るので、

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

で与えられる。\$A, C\$ が決まると、変換行列 \$P\$ が

$$P = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 A \\ c_2 \\ c_2 A \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.5 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

として求まり、制御行列 \$B\$ や初期状態ベクトル \$\mathbf{x}_0\$ も

$$B = P^{-1}G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = P^{-1}\mathbf{s}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

として得られるので、JCF 表示 \$\tilde{S}_J\$ は完全に求まる。 $\tilde{S}_J$ から系 \$S\$ は不安定な自由部分系をもつことがわかる。

7. あとがき

十分ランダムな入力系列に対して成立する最小次数の差分方程式 (8) を介して、LCF 表示の最小等価系モデルを 1 出力変数ずつ段階的に拡大していく方法を示した。その主要な特徴は 1. で述べた①, ②, ③であり、主要な結論は 5.4 の定理である。

\$y_i\$ についての最小次数差分方程式の次数、係数を求めるについては、本方法が 1 出力系の場合の自然な拡張になっていることから、1 出力系に用いられる手

法の多くが適用できよう。筆者が実際に用いた数値計算法の概要は付録 C で述べる。これは最小 2 乗法の要領を用いているため、ノイズがある場合にもある程度利用できよう。

本稿で述べなかったノイズの処理や入力が十分ランダムでないときの取扱い⁷⁾については、数値計算法の詳細とともに次の機会に紹介したい。

最後に、有益な御助言をくださった東京大学寺尾満教授をはじめ、寺尾・北森両研究室の諸氏に感謝します。

参考文献

- 1) R. E. Kalman: Mathematical Description of Linear Dynamical Systems, J. SIAM Control, Ser. A, 1-2, 152/192 (1963)
- 2) B. Gopinath: On the Identification of Linear Time-Invariant Systems from Input-Output Data, Bell Systems Tech. J., 48-5, 1101/1113 (1969)
- 3) R. C. K. Lee: Optimal Estimation, Identification and Control, MIT Press (1964)
- 4) D. G. Luenberger: Canonical Forms for Linear Multivariable Systems, IEEE Trans., AC-12, 290/293 (1967)
- 5) 大河内: 最小等価フリーシステムについて, 第 10 回計測自動制御学会学術講演会予稿集, 273/274 (1971)
- 6) J. Vališ: On-Line Identification of Multivariable Linear Systems of Unknown Structure from Input Output Data, IFAC Symposium (Prague), Paper 1.5 (1970)
- 7) 大河内: 未知次数線形多変数系の同定に関する研究, 東京大学修士論文 (1971)
- 8) B. A. Budin: Minimal Realization of Discrete Linear Systems from Input-Output Observations, IEEE Trans., AC-16, 395/401 (1971)
- 9) C. T. Chen and C. A. Desoer: A Proof of Controllability of Jordan Form State Equations, IEEE Trans., AC-13, 195/196 (1968)

□ 付録 A 状態方程式の LCF への変換 □

状態方程式既知の任意の可観測系 \$S(n, r, m, A, B, C, D, \mathbf{x}_0)\$ を (6) 式の LCF 表示へ変換する方法を扱う。

$$R = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, \quad c_i: 1 \times n \text{ 行ベクトル}$$

とすると、系 \$S\$ が可観測だから \$\text{rank } R = n\$ となる。

ここで、行列 \$R\$ の \$nm\$ 個の行ベクトルの中から

$$c_1, c_1 A, \dots, c_1 A^{n-1}; \quad c_2, c_2 A, \dots, c_2 A^{n-1}; \quad \dots; \quad c_m, c_m A, \dots, c_m A^{n-1}$$

の順に線形独立なものを探すと、

$$\begin{aligned} & c_1, c_1 A, \dots, c_1 A^{n_1-1}; \\ & c_2, c_2 A, \dots, c_2 A^{n_2-1}; \\ & \dots \\ & c_m, c_m A, \dots, c_m A^{n_m-1} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

のように \$n (= \sum_{i=1}^m n_i)\$ 個の行ベクトルが求まる⁴⁾。このとき、\$c_l A^{n_l}\$ は、線形独立な \$\sum_{i=1}^l n_i\$ 個の行ベクトル

\$c_1, c_1 A, \dots, c_1 A^{n_1-1}; \dots; c_l, c_l A, \dots, c_l A^{n_l-1}\$ に線形従属であるから、これらの線形結合として、

$$\begin{aligned} c_l A^{n_l} &= \varphi_{l1}^{n_l} c_1 + \varphi_{l1}^{n_l-1} c_1 A + \dots + \varphi_{l1} c_1 A^{n_1-1} \\ &+ \dots \\ &+ \varphi_{li} c_{i-1}^{n_i-1} c_{i-1} + \varphi_{li} c_{i-1}^{n_i-2} c_{i-1} A + \dots \end{aligned}$$

$$+\varphi_{l,l-1}c_{l-1}A^{n_{l-1}-1} \\ -\alpha_l^{n_l}c_l-\alpha_l^{n_l-1}c_lA-\cdots-\alpha_l^1A^{n_l-1} \quad (\text{A} \cdot 2)$$

と表わせ、この係数は系 S に対して一意に決まる。

ここで、(A・1) 式の行ベクトルを並べて正則行列

$$P = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1A^{n_1-1} \\ \vdots \\ c_m \\ c_mA^{n_m-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A} \cdot 3)$$

を作り、系 S を P で状態変換して系 $S(n, r, m, PAP^{-1}, PB, CP^{-1}, D, Px_0)$ と表わすと、(A・2) 式の関係からこれが (6) 式の LCF 表示になる。

□ 付録B LCF から JCF への変換 □

LCF はパラメータが実数で固有値の性質にも煩わされないで、シミュレーション用モデルなどには便利だが、対象系をモードに着目して調べるには JCF の方が便利である。ここでは LCF と JCF の間の変換法を扱う。

JCF 表示の可観測系 $S_J(n, r, m, A, B, C, D, x_0)$ から (6) 式の LCF 表示 $S_L(n, r, m, F, G, H, D, s_0)$ への変換は、付録Aの適用で一意に求まる。いま、

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & J_p \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_i \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ r_i \\ \downarrow \end{matrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

とし、(A・2) 式の係数を用いてスカラー s の多項式

$$\begin{cases} \beta_i(s) = s^{n_i} + \alpha_i^1 s^{n_i-1} + \cdots + \alpha_i^{n_i} \\ \psi_{ij}(s) = \varphi_{ij}^1 s^{n_j-1} + \varphi_{ij}^2 s^{n_j-2} + \cdots + \varphi_{ij}^{n_j} \end{cases} \quad (\text{B} \cdot 1)$$

を導入すると、(A・2) 式は次の行列関数で表わせる。

$$c_l \beta_l(A) = c_1 \psi_{l1}(A) + c_2 \psi_{l2}(A) + \cdots + c_{l-1} \psi_{l,l-1}(A) \\ (l=1, 2, \dots, m) \quad (\text{B} \cdot 2)$$

ここで、 s の多項式 $f(s)$ に対して、

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(J_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(J_p) \end{bmatrix}, \quad f(J_i) = \begin{bmatrix} f_{i0} f_{i1} \cdots f_{i, r_i-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & f_{i0} \end{bmatrix}$$

$$f_{ik} = f^{(k)}(\lambda_i)/k!$$

であることに注意して、(B・2) 式を用いれば、 S_L のパラメータから S_J のパラメータが得られる。たとえば、 S_J のシステム行列 A が相異なる固有値で対角化される場合の結果をまとめると次のようになる。

$\beta_i(s)=0 (i=1, 2, \dots, m)$ の全部の根が相異なるとき、これらの根が S_J のシステム行列 A を対角化する。また、 $\beta_i(s)=0$ の任意の 1 根を λ_i とすると、観測行列 C の λ_i に対応する列の第 l 要素 $c_{l(\lambda_i)}$ は

$$c_{l(\lambda_i)} = \begin{cases} 0 & (l < i) \\ 1 & (l = i) \\ \left(\sum_{j=1}^{l-1} c_{j(\lambda_i)} \psi_{ij}(\lambda_i) \right) / \beta_i(\lambda_i) & (l > i) \end{cases} \quad (\text{B} \cdot 3)$$

で与えられる。行列 A, C が求まると、変換行列 P も (A・3) 式のように決まって、JCF 表示 $S_J(n, r, m, A, P^{-1}G, C, D, P^{-1}s_0)$ が得られる。

$\beta_i(s)=0 (i=1, \dots, m)$ の根の間に共通根がある場合は、系 S_J が可観測であるから、 $\beta_i(s)=0$ の根の内で共通するものは同一の Jordan block の対角要素に並ぶ⁹⁾ ことなどを考慮して、(B・2) 式を利用すれば、同様に JCF 表示が得られる。

□ 付録C 差分方程式の次数・係数の数値計算法 □

【1 入力 1 出力系の場合】

① ε, ν を設定する。ただし、 ε は収束判定用であ

り、ノイズのない場合は計算機精度によって決める。

ν は推定最大次数であり、データ数やモデルとしての

許容次数などを考慮して決める。データ数 N に対して $\nu \leq (N-1)/2$ にとる必要がある。

データの積和行列 $Q = \sum_{t=1}^{N-\nu} s(t)s'(t)$ を作る。ただし、

$$s(t) = [u(t), u(t+1), \dots, u(t+\nu); y(t)y(t+1) \dots y(t+\nu)]'$$

$k \leftarrow 0, i_u \leftarrow 1, i_y \leftarrow \nu+2$ とする。ただし、 k は次数 n の仮定値であり、 i_u, i_y は掃出計算の枢軸の位置を示す変数である。以下、行列 Q を行操作による掃出計算で変形していく。

② 行列 Q の第 (i_u, i_u) 要素が、 $Q(i_u, i_u) < \varepsilon$ ならば入力系列が不適当だから計算を打切る。

$Q(i_u, i_u)$ を枢軸として行列 Q を掃出す。

$$i_u \leftarrow i_u + 1$$

③ $Q(i_y, i_y) < \varepsilon$ ならば、収束したので④へ進む。

$k \leftarrow \nu$ ならば、まだ収束していないが、許容次数限度に達したので④へ進む。

$Q(i_y, i_y)$ を枢軸として行列 Q を掃出す。

$$i_y \leftarrow i_y + 1, k \leftarrow k + 1 \text{ として②へ戻る。}$$

④ $n \leftarrow k, J \leftarrow Q(i_y, i_y)$ とする。

行列 Q の第 i_y 列から、パラメータ $b, -\alpha$ を次のように取出す。

$$\text{ただし、} b = [b^1 b^2 \dots b^{n+1}]' : (n+1) \times 1$$

$$\alpha = [\alpha^n \alpha^{n-1} \dots \alpha^1]' : n \times 1$$

ここで得られた n, b, α, J は求める次数、係数と収束

の評価値であり、次の関係を満たしている。

$$\begin{aligned} y(t+n) &= -\alpha^1 y(t+n-1) - \alpha^2 y(t+n-2) - \dots \\ &\quad - \alpha^n y(t) \\ &\quad + b^{n+1} u(t+n) + \dots + b^1 u(t) + \delta(t) \end{aligned} \quad (C.1)$$

$$J = \min_{\alpha, b} \sum_{t=1}^{N-\nu} \delta(t)^2$$

ただし、 $\delta(t)$ は (C.1) 式の式誤差であり、ノイズや計算誤差がない場合には、最小等価系の次数 n で 0 になるべきものである。

[r 入力 m 出力系の場合]

$$s(t) = [u_1(t) \dots u_1(t+\nu); \dots; u_r(t) \dots u_r(t+\nu); y_1(t) \dots y_1(t+\nu); \dots; y_m(t) \dots y_m(t+\nu)]'$$

に対して $Q = \sum s(t)s'(t)$ を作り (8) 式の係数が出てくるように枢軸をとりながら掃出計算を加える。

phase l の計算で、phase $1 \sim l-1$ の掃出計算が活用できるので、全差分方程式の次数、係数は Q に対する合計 $n+r \cdot \max \{n_i+1\}$ 回の掃出計算だけで求まる。