同定のための入力系列†

富 永 昌 二*・田 中 幸 吉*・樋 口 清 伯**

* 大阪大学基礎工学部 豊中市待兼山町 1-1

** 京都工芸繊維大学工学部 京都市左京区松ヶ崎御所海道町

(昭和 47 年 8 月 14 日 受付)

On a Type of Input Sequence for System Identification

Shoji TOMINAGA*, Kokichi TANAKA* and Seihaku HIGUCHI**

(* Faculty of Engineering Science, Osaka University, Toyonaka
(** Faculty of Polytechnic Sciences, Kyoto Institute of Technology, Kyoto)

(Received August 14, 1972)

In recent years, there have been many studies on the system identification problem, which is that of estimating the parameter vector from noisy observations.

This paper deals with the synthesis of an input signal for identification. The system considered here is a scalar input and scalar output discrete linear system with Gaussian additive noise on the observations. The synthesis of the input signal is to determine the input sequence which minimizes the estimation error, subject to a given amplitude-constraint on the signal. It is assumed that the system is being operated off-line during the identification procedure, so that the input is open to choice.

In this paper, the input sequence is chosen to minimize the determinant of the covariance matrix in the least square estimation error. It follows from the above result that the input sequence is given by the repetition of the uncorrelated sequences which take the maximum values under a given amplitude-constraint.

Next the realization of the sequences which satisfy the condition is treated as a block problem in combinatorial analysis. The block design is settled according to the number of unknown parameters. Then the input sequence may be obtained and is called the Uncorrelated Minimum Length Sequence.

Finally in the case of the low order system, these input sequences are shown in the list. The example demonstrates that estimation error decreases rapidly by the use of the sequences proposed here, which makes them effective in the system identification.

1. ま え が き

系の動作特性を推定するいわゆるシステム同定問題に関する研究はすでに数多くなされている。離散時間的な線形定係数系のインパルス応答を同定するさいの入力信号に関する考察として、Levin¹⁾、有本²⁾らの研究があげられる。

一般に相関法との関係において、同定のための試験

入力信号として、 M 系列などの相関の小さい入力系列がよいとされている。しかし M 系列などを用いる場合には、相関を小さくするためには周期の長い系列を用いねばならない。実際にシステムのパラメータを推定するには、短時間に推定精度を上げることが望ましく、また効率がよいといえる。したがって、もし無相関な最短系列が存在すれば、入力系列としてそれをくりかえし用いて同定を行なうことができるであろう。このとき観測回数が周期の整数倍のところでは、系列には全く相関がなく、また同じ系列をくりかえし用いる形

† 電子通信学会回路とシステム理論研究会で発表 (昭 47・3)

であるから操作は簡単であり、有効な同定法であると予想される。

本論文において、線形定常な単入出力系において、観測値に加法的白色ガウス雑音が含まれ、かつ入力信号が物理的な制約からその振幅が制限されている場合を対象にする。推定方式は最小 2 乗法を用い、入力を決定する評価関数として一般化分散を定義し、この分散を最小にする入力系列の満足すべき条件を示した。

つぎに系列の構成方法を combinatorial analysis における block design の問題として考察している。そして未知パラメータの数に対応して、入力系列を表にした。例として、その系列を用いて同定を行なうと、推定誤差は急速に減少し、これが同定のための入力系列として有効であることを示した。

2. 入力の解析

2.1 入力決定の評価関数

線形定常な単入出力系の入出力関係は近似的に、

$$y_t = \sum_{i=1}^n h_i x_{t-i+1} + v_t \quad (t=n, n+1, \dots) \quad (1)$$

とあらわされる。ここで、 x_t, y_t, v_t はそれぞれ入力、出力、観測雑音であり、 $h_i (i=1, \dots, n)$ が推定すべき未知のインパルス応答系列である。さらに $x_i (i=1, 2, \dots)$ は決定しようとする入力信号系列で、その振幅は

$$|x_i| \leq a \quad (i=1, 2, \dots) \quad (2)$$

のように、制限されているものとする。簡単のため、(1) 式を行列であらわす。

$$y_t = X_t h + v_t \quad (3)$$

ただし

$$y_t = \begin{bmatrix} y_n \\ \vdots \\ y_{t+n-1} \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \quad v_t = \begin{bmatrix} v_n \\ \vdots \\ v_{t+n-1} \end{bmatrix}$$

$$x_t = \begin{bmatrix} x_{t+n-1} \\ \vdots \\ x_t \end{bmatrix} \quad X_t = \begin{bmatrix} x_n & \cdots & x_2 & x_1 \\ x_{n+1} & \cdots & x_3 & x_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{t+n-1} & \cdots & x_{t+1} & x_t \end{bmatrix}$$

また雑音の平均と共分散はそれぞれ、

$$E[v_t] = 0 \quad E[v_t v_t^T] = \sigma^2 I \quad (4)$$

(I は $t \times t$ 単位ベクトル、 σ^2 は雑音の分散、 v_t^T は v_t の転置) とあたえられるものとする。

2 次形式の損失関数

$$J(h) = [y_t - X_t h]^T A^{-1} [y_t - X_t h] \quad (5)$$

(A は $t \times t$ 正値対称行列)

を最小にする不偏推定値 $\hat{h}$ は

$$\hat{h} = [X_t^T A^{-1} X_t]^{-1} X_t^T A^{-1} y_t$$

であたえられる。さらに $A = \sigma^2 I$ とおくと、推定値はすべての線形不偏推定値のなかで最小の共分散行列を

もつことが知られている³⁾。そしてこのとき、最小 2 乗推定値と誤差の共分散行列、分散は

$$\hat{h} = [X_t^T X_t]^{-1} X_t^T y_t \quad (6)$$

$$P_t \triangleq E[(h - \hat{h})(h - \hat{h})^T] = \sigma^2 [X_t^T X_t]^{-1} \quad (7)$$

$$V_t \triangleq E[(h - \hat{h})^T (h - \hat{h})] = \text{Tr}[\sigma^2 [X_t^T X_t]^{-1}]$$

(Tr : トレース) (8)

となる。

入力系列は推定誤差をできるだけ小さくなるように取られるのが自然であるから、 V_t を最小にする入力が最適であるといえる。ここでは解析しやすいように (7) 式からつぎの一般化分散⁴⁾を定義し、

$$GV_t \triangleq |P_t| = |\sigma^2 [X_t^T X_t]^{-1}| \quad (9)$$

これをもって入力を決定する評価関数とする。ここで $X_t^T X_t$ はつぎのような形をとり、かつ正則とする。

$$X_t^T X_t = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^t x_{i+n-1}^2 & \sum_{i=1}^t x_{i+n-1} x_{i+n-2} & \sum_{i=1}^t x_i x_{i+n-1} \\ \sum_{i=1}^t x_{i+n-1} x_{i+n-2} & \sum_{i=1}^t x_{i+n-2}^2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^t x_i x_{i+n-1} & \cdots & \sum_{i=1}^t x_i^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

このとき一般化分散についてつぎの定理がいえる。

【定理 1】 GV_t は t に関して単調減少する (証明は付録 1 参照)。

2.2 入力系列の満足すべき条件

(2) 式の制限のもとで、一般化分散 GV_t を最小にする入力系列の条件を求める。すなわち、

$$\frac{1}{GV_t} = \left| \frac{1}{\sigma^2} X_t^T X_t \right| \rightarrow \max \quad (11)$$

通常観測は有限回であるから、入力ベクトル $x_i (i=1, \dots, t)$ は n 次元空間の立方体内に存在する特定の v 種類のベクトル

$$\underline{x}_i = [\underline{x}_{i1}, \underline{x}_{i2}, \dots, \underline{x}_{in}]^T \quad (|\underline{x}_{pq}| \leq a \quad p=1, \dots, n$$

$$q=1, \dots, v); \quad i=1, \dots, v$$

をもって構成されるものとする。そして各 $\underline{x}_i (i=1, \dots, v)$ の取る回数を $n_i (i=1, \dots, v)$ とすれば、

$$n_1 + n_2 + \dots + n_v = t$$

である。このとき入力系列に関して、つぎの定理が得られる。

【定理 2】 次の条件をみたす系列 $\mathbf{x}^* = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_v)$ は、 t が v の倍数のところでは一般化分散を最小にする。

$$|\underline{x}_i| = a \quad (i=1, \dots, v) \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^v \underline{x}_i \underline{x}_{i+j} = 0 \quad (j=1, \dots, n-1) \quad (13)$$

ただし $\underline{x}_{i+v} = \underline{x}_i (i=1, \dots, v)$

【証明】 $\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_t$ はつぎのように書きかえられる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_t &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^t \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^v n_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \\ &= \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1v} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{n_1}{\sigma^2} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \frac{n_v}{\sigma^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1v} & \cdots & x_{nv} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^v \frac{n_i}{\sigma^2} x_{1i}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^v \frac{n_i}{\sigma^2} x_{1i} x_{ni} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^v \frac{n_i}{\sigma^2} x_{ni} x_{1i} & \cdots & \sum_{i=1}^v \frac{n_i}{\sigma^2} x_{ni}^2 \end{bmatrix} \quad (14) \end{aligned}$$

$\mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_t$ の階数は n であるから、 $v \geq n$ でなければならない。さらに行列に関してつぎの不等式が成立する⁶⁾。

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_t \right| &\leq \left(\sum_{i=1}^v \frac{n_i}{\sigma^2} x_{1i}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^v \frac{n_i}{\sigma^2} x_{ni}^2 \right) \\ &\quad \cdots \left(\sum_{i=1}^v \frac{n_i}{\sigma^2} x_{ni}^2 \right) \triangleq F \quad (15) \end{aligned}$$

(15) 式の右边を相加平均すると、

$$F \leq \left(\frac{1}{n\sigma^2} \sum_{i=1}^v n_i (x_{1i}^2 + x_{2i}^2 + \cdots + x_{ni}^2) \right)^n \quad (16)$$

となるが、とくに

$$\sum_{i=1}^v n_i x_{1i}^2 = \sum_{i=1}^v n_i x_{2i}^2 = \cdots = \sum_{i=1}^v n_i x_{ni}^2 \quad (17)$$

のとき (16) 式の等号が成立して、

$$F = \left(\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^v n_i x_{1i}^2 \right)^n \quad (18)$$

となる。さらにシュワルツの不等式を利用して、(18) 式は $n_i = \alpha x_{1i}^2 (i=1, \dots, v)$ のとき最大となる。 $n_1 + n_2 + \cdots + n_v = \alpha (x_{11}^2 + \cdots + x_{1v}^2) = t$ であるから、 F はこのとき、

$$F = \left(\frac{t \sum_{i=1}^v x_{1i}^4}{\sigma^2 \sum_{i=1}^v x_{1i}^2} \right)^n \leq \left(\frac{ta^2}{\sigma^2} \right)^n \quad (19)$$

となる。(19) 式は $x_{1i}^2 = a^2 (i=1, \dots, v)$ のとき等号になる。(17) 式をくりかえし用いて、

$$x_{ij}^2 = a^2 (i=1, \dots, n \quad j=1, \dots, v) \quad (20)$$

$$n_1 = n_2 = \cdots = n_v \triangleq n_0 (n_0 = t/v) \quad (21)$$

が成立するとき (16), (19) 式の等号が成立する。また、(15) 式は

$$\sum_{h=1}^v x_{ih} x_{jh} = 0 (i \neq j, i=1, \dots, n \quad j=1, \dots, v) \quad (22)$$

のとき等号が成立する。

ここで (14) 式にもどると、(14) 式は (21) 式により、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_t &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^t \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = \frac{n_0}{\sigma^2} \sum_{i=1}^v \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \\ &= \frac{n_0}{\sigma^2} [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_v] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_v^T \end{bmatrix} \quad (23) \end{aligned}$$

と書き改められる。 $\mathbf{X}_v = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_v]^T$ とおけば結局 $\mathbf{X}_t$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t &= [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_t]^T \\ &= [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_v, \dots, \mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_v]^T \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_v \\ \mathbf{X}_v \\ \vdots \\ \mathbf{X}_v \end{bmatrix} \Bigg\} n_0 \quad (24) \end{aligned}$$

のように $\mathbf{X}_v$ を n_0 回ならべた形におきかえられる。

$\mathbf{X}_t$ はもともと要素がシフトした行列であるから、(24) 式から $\mathbf{X}_v$ は $v \times n$ 巡回行列であることがわかる。すなわち $\mathbf{X}_v$ は

$$\mathbf{X}_v = \begin{bmatrix} x_n & x_{n-1} \cdots x_2 & x_1 \\ \vdots & & x_2 \\ x_v & & \vdots \\ \vdots & & x_n \\ x_{n-1} \cdots x_v \end{bmatrix} \quad (n \leq v \leq t) \quad (25)$$

のように表わされる。しかも (20), (22) 式は (25) 式の各要素が $\pm a$ を取り、かつ列に関する直交性をあらわしている。(証明終)

そして分散に関しても、つぎの定理を得る。

【定理 3】 t が v の倍数の場合、入力系列 $\mathbf{x}^*$ は分散を最小にする。(証明は付録 2 参照)

2.3 系列長に関する考察

前節で述べた系列 $\mathbf{x}^*$ をくりかえし用いると、 t が v の倍数のところで無相関となり分散は最小となる。一般の場合、すなわち $t = mv + l (m, l$ は正整数 $l < v)$ とすれば $\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_t$ は $\mathbf{X}_v^T \mathbf{X}_v = va^2 \mathbf{I}$ より、それぞ

$$\mathbf{X}_t = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{X}_v \\ \vdots \\ \mathbf{X}_v \\ \cdots \cdots \cdots \\ x_n \cdots x_1 \\ \vdots \\ x_{n+l-1} \cdots x_l \end{bmatrix} \right\} m \quad (26)$$

$$\mathbf{X}_l^T \mathbf{X}_l =$$

$$\begin{pmatrix} ta^2 & \sum_{i=0}^{l-1} x_{n+i} x_{n+l-1} & \cdots & \sum_{i=0}^{l-1} x_{n+i} x_{l+1} \\ \sum_{i=0}^{l-1} x_{n+i} x_{n+l-1} & ta^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{l-1} x_{n+i} x_{l+1} & \cdots & \cdots & ta^2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

となる。(27) 式の対角項以外の (i, j) 要素の絶対値は、 $0 < l \leq v/2$ ならば、

$$\left| \sum_{k=0}^{l-1} x_{n+k-l+1} x_{n+k-j+1} \right| \leq la^2 \leq \frac{va^2}{2} \quad (28)$$

また $v/2 \leq l < v$ ならば、

$$\left| \sum_{k=0}^{l-1} x_{n+k-l+1} x_{n+k-j+1} \right| = \left| \sum_{k=l}^v x_{n+k-l+1} x_{n+k-j+1} \right| \leq (v-l)a^2 \leq \frac{va^2}{2} \quad (29)$$

となり、いずれも $va^2/2$ でおさえられる。 t が v に比べて十分大きくなると (27) 式の対角項以外の要素は対角項に比べて十分小さくなる。すなわち $[\mathbf{X}_l^T \mathbf{X}_l]^{-1} \doteq (1/ta^2) \mathbf{I}$ ($t \gg v$) となる。したがって分散は

$$V_t = \frac{n\sigma^2}{ta^2} \quad (t = mv) \quad (30)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t V_t = \frac{n\sigma^2}{a^2} \quad (t \asymp mv)$$

となる。また (28), (29) 式より v ができるだけ小さいほど誤差は小さく理想曲線 ((30) 式) への収束も速いといえる。

以上の考察よりつぎの条件をみたす系列 $\mathbf{x}^*$ を無相関最短系列 (UM 系列) とよぶ。

- 1) 入力系列は値として上限をとる ((12) 式)
- 2) $(n-1)$ 回の巡回にすべて直交する ((13) 式)
- 3) $v \geq n$ の範囲で長さが最短である

そして実際の測定にはこの系列をくりかえし用いて観測を行なうのである。

3. 入力系列の構成

ここでは前章に述べた条件をみたす系列を構成する。簡単のため上限 a は 1 とする。また系列を i 回巡回して直交すれば、逆向きに i 回巡回しても直交する。このことは巡回置換を σ_i で表わすと、

$$\mathbf{x}^* \perp \mathbf{x}^{*\sigma_i} \iff \mathbf{x}^{*\sigma_i} \perp \mathbf{x}^* \quad (31)$$

と表現できる。つぎに集合 V, B_0 を

$$V = \{0, 1, 2, \dots, v-1\} \quad (32)$$

$$B_0 = \{i | x_i = -1\} \quad (33)$$

と定義し、 l 回の巡回置換に対して、

$$B_l = \{i + l \pmod{v} | i \in B_0\}^* \quad (34)$$

を定義する。集合 B_0 の要素の数を k , B_0 と B_l に共通に -1 を含む要素の数を λ とする。

$$\# \{B_0\} = k \quad (35)$$

$$\# \{B_0 \cap B_l\} = \lambda \quad (36)$$

$\mathbf{x}^*$ と $\mathbf{x}^{*\sigma_l}$ の要素をそれぞれかけ合せて -1 となる数は $2(k-\lambda)$ 個であるから Fig. 1 を参照して l 回巡回して直交するためには

Fig. 1 Orthogonality of sequence

$$2(k-\lambda) = v/2$$

$$v = 4(k-\lambda) \quad (37)$$

でなければならない。かくして、つぎの定理が得られる。

【定理 4】 巡回置換に対して直交する系列の長さ v は 4 の倍数である。

3.1 $\mathbf{x}^* \perp \mathbf{x}^{*\sigma_i} (i=1, \dots, v-1)$ の場合

これは系列として最も長さの短い場合である。このとき (36) 式はすべての $l (l=1, \dots, v-1)$ に対して成立しなければならない。また (33), (34) 式を

$$B_0 = \{b_1, b_2, \dots, b_k\} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} B_l &= \{b_1 + l, b_2 + l, \dots, b_k + l \pmod{v}\} \\ &= \{b'_1, b'_2, \dots, b'_k\} \end{aligned} \quad (39)$$

と表現する。 B_l は B_0 の要素を l 回巡回置換してできる要素からなる集合であり、 λ は $b_i = b'_m (i, m=1, \dots, k)$ となる要素の数である。そして $b'_m \equiv b_j + l \pmod{v}$ となる b_j が B_0 の要素としてかならず存在する。したがって (36) 式は

$$\begin{aligned} \# \{(b_i, b'_m) | b_i = b'_m\} &= \# \{(b_i, b_j) | b_i - b_j \equiv l \pmod{v}\} \\ &= \lambda \end{aligned} \quad (36)$$

$$(i, j=1, \dots, k)$$

とかきかえられる。すなわち、すべての巡回置換 $\sigma_i (i=1, \dots, v-1)$ に対して直交するための必要十分条件は (37) 式と次式が成立することである。

$$V \ni \forall l \neq 0$$

*1 以後 $i + l \pmod{v}$ の表現は modulo v による加算をあらわす。

$$\# \{B_0 \cap B_l\} = \{(b_i, b_j) | b_i - b_j \equiv l \pmod{v}\} = \lambda \text{ (一定)} \quad (40)$$

また、明らかに

$$\# \{(b_i, b_j)\} = \sum_{l=0}^{v-1} \# \{(b_i, b_j) | b_i - b_j \equiv l \pmod{v}\} \quad (41)$$

であるが、この数を2通りに計算する。(41)式の左辺は明らかに k^2 個であり、右辺は

$$k + \sum_{l=1}^{v-1} \# \{(b_i, b_j) | b_i - b_j \equiv l \pmod{v}\} \\ = k + \lambda(v-1)$$

となる。したがって

$$k^2 = k + \lambda(v-1) \quad (42)$$

となる。 k は系列中の -1 の数であるが、 $+1$ について計算しても同じことがいえるので

$$k \leq v/2 \quad (43)$$

としてよい。(37), (42)式より v を消去して k について解くと、

$$k = ((4\lambda + 1) + \sqrt{4\lambda + 1})/2 \quad (44)$$

となる。 $\beta = \sqrt{4\lambda + 1}$ とおけば、 λ は整数であることより容易に β は奇数であることがわかる。これより、

$$k - \lambda = \left(\frac{\beta + 1}{2} \right)^2 \triangleq u^2 \quad (45)$$

とかける。ふたたび、(37), (42), (45)式よりパラメータ v, k, λ はつぎのようにきまる。

$$v = 4u^2, \quad k = 2u^2 - u, \quad \lambda = u^2 - u \quad (46)$$

ここで節のはじめに述べたことを行列で表現する。

(32)式の $V = \{P_0, P_2, \dots, P_{v-1}\}$ の要素を点と呼んで行に、また (34)式の $B_l = \{i + l \pmod{v} | i \in B_0\}$ ($l = 0, 1, \dots, v-1$) をブロックと呼んで列に対応させる。このとき、 $v \times v$ 行列 $A = [a_{ij}]$ をつぎのように定める。

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & P_i \in B_j \\ 1 & P_i \notin B_j \end{cases} \quad (i, j = 0, \dots, v-1) \quad (47)$$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} B_0 & B_1 & \dots & B_{v-1} \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{v-1} \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0v-1} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1v-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{v-10} & a_{v-11} & \dots & a_{v-1v-1} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (48)$$

行列 A は巡回しており、各列に -1 が k 個、残りは $+1$ である。また (40) 式は任意の2列に共通に λ 個の点を含むことを示している。(48)式は行(ブロック)と列(点)を入れかえても同じことがいえるから対称である。行列 A のこのような配置は combinatorial analysis において、巡回的な (v, k, λ) -block design⁷⁾ と呼ばれている。また、 A はいわゆる巡回アダマール行列であり、逆に A がきまると B_l ($l = 0, \dots, v-1$) が (34) 式のように求まる。上に述べたことを

まとめてつぎの定理を得る。

【定理 5】 $x^* \perp x^{*oi}$ ($i = 1, \dots, v-1$) なる系列が存在するための必要十分条件は、つぎのパラメータをもつ巡回的な (v, k, λ) -block design が存在することである。

$$v = 4u^2, \quad k = 2u^2 - u, \quad \lambda = u^2 - u$$

定理5で述べたようなパラメータをもつ巡回的な block design は $u=1$ のときは存在する。しかし $u \leq 100$ に対して、 $u=39, 60, 78, 93$ 以外の非存在性がすでに確かめられている⁸⁾。したがって、同定に必要とする系列は $v=4$ 以外はほぼ存在しないといえる。

3.2 $x^* \perp x^{*oi}$ ($i = 1, \dots, v/2-1, v/2+1, \dots, v-1$) の場合

3.1で述べたように、巡回アダマール行列は 4×4 以外にはほぼ存在しない。 v は4の倍数であるから $v = 4u$ とおくと、 $x^* = x^{*+u}$ と (31) 式より

$$x^* \perp x^{*oi} \quad (i = 1, \dots, j \text{ ただし } j \leq 2u-1) \quad (49)$$

ならば、

$$x^* \perp x^{*oi} \quad (i = 1, \dots, j, 4u-j, 4u-j+1, \dots, 4u-1) \quad (50)$$

がいえる。したがって、つぎにちょうど $1/2$ 周期巡回すると直交しないが、他とはすべて直交する場合

$$x^* \perp x^{*oi} \quad (i = 1, \dots, 2u-1, 2u+1, \dots, 4u-1) \quad (51)$$

を考える。すなわち $\# \{B_0 \cap B_{2u}\} \equiv \lambda$ となり、他は 3.1 と同じである。

【定理 6】 $x^* \perp x^{*oi}$ ($i = 1, \dots, 2u-1, 2u+1, \dots, 4u-1$) なる系列が存在するための必要かつ十分条件はつぎのパラメータをもつ巡回的な (v, k, λ, μ) -design^{*2} が存在することである。

$$v = 4u^2, \quad k = 2u-1-m, \quad \lambda = u-1-m, \quad \mu = m^2+m \quad (\text{ただし } 0 \leq m^2+m < k)$$

【証明】 (40) 式はつぎのように書き換えられる。 $V \ni \forall l \neq 0, 2u$

$$\# \{(b_i, b_j) | b_i - b_j \equiv l \pmod{v}\} = \lambda \text{ (一定)} \quad (52)$$

また B_0 と B_{2u} に共通に含まれる要素の数を μ とする。

$$\# \{(b_i, b_j) | b_i - b_j \equiv 2u \pmod{v}\} = \mu \quad (53)$$

3.1と同様に (b_i, b_j) の数を2通りに計算する。すなわち、

$$\# \{(b_i, b_j)\} = \sum_{l=0}^{4u-1} \# \{(b_i, b_j) | b_i - b_j \equiv l \pmod{v}\} \quad (54)$$

において左辺は k^2 であり、右辺は

$$\# \{(b_i, b_j) | b_i - b_j \equiv 0 \pmod{v}\} + \# \{(b_i, b_j) | b_i - b_j$$

*2 題意から明らかに block design をなさないので単に design と呼ぶ。

$$\equiv 2u \pmod{v} \} + \lambda(4u-2)$$

$$= k + \mu + \lambda(4u-2)$$

である。したがって、

$$k^2 = k + \mu + \lambda(4u-2) \quad (55)$$

となる。(37) 式を使って k について解くと、

$$k = \frac{1}{2} \{ (4u-1) - \sqrt{4\mu+1} \} \quad (56)$$

となるが、右辺の平方根の中が平方数ならば、 k は整数になることが容易にわかる。したがって $\sqrt{4\mu+1} = 2m+1 (m \geq 0)$ とすれば、 v, k, λ, μ は定理のように求

まる。

逆に、このようなパラメータをもつ design が存在すれば行列 A より、 $B_i (i=0, \dots, v-1)$ が (33), (34) 式のように求まり (36), (37) 式より、系列の直交性がわかる。 (証明終)

定理 6 の特別な場合として $\mu=0$ とおくと、

$$v=4u, \quad k=2u-1, \quad \lambda=u-1 \quad (57)$$

となる。

【例】 $(v, k, \lambda, \mu) = (8, 3, 1, 0)$ の場合を (48) 式の行列 A で示す。

	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	
$A =$	0	1	1	1	1	-1	1	-1	$B_0 = \{1, 2, 4\}$
	1	-1	1	1	1	1	-1	1	$B_1 = \{2, 3, 5\}$
	2	-1	-1	1	1	1	1	-1	$B_2 = \{3, 4, 6\}$
	3	1	-1	-1	1	1	1	-1	$B_3 = \{4, 5, 7\}$
	4	-1	1	-1	-1	1	1	1	$B_4 = \{5, 6, 0\}$
	5	1	-1	1	-1	-1	1	1	$B_5 = \{6, 7, 1\}$
	6	1	1	-1	1	-1	-1	1	$B_6 = \{7, 0, 2\}$
	7	1	1	1	-1	1	-1	-1	$B_7 = \{0, 1, 3\}$

A は 8×8 の巡回行列で各列 (行) に -1 が 3 個あり残りは $+1$ である。任意の 2 列 (行) に共通に 1 個の -1 を含み、ただし第 i 列 (行) と $(i+4) \pmod{v}$ 列 (行) に共通に含まれる点はない。そして、任意の第 i 列 (行) は、 $(i+4) \pmod{v}$ 列 (行) 以外とはすべて直交している。したがって A の任意の列 (行) が求める系列となる。(例終)

つぎに、 $(v, k, \lambda, 0)$ -design に対応する系列の配置 Fig. 2 はのように、円周上を $4u$ に分割し番号を付

Fig. 2 Location of x^* in $(v, k, \lambda, 0)$ -design
(○: $+1$, ●: -1)

ける。そして番号 $1, 2u$ に $+1$ を固定し、他は互に向い合った番号と異なる符号を配置するようになっている。

3.3 UM 系列

UM 系列は $(n-1)$ 回まで巡回して、すべて直交する系列のうちで最も周期の短い系列であった。3.1 に

おいてすべての巡回置換に対して直交する系列は $n=4$ の場合のみである。また 3.2 において $(v/2-1)$ までのすべての巡回置換に対して直交する系列の構成を示した。したがって、 v は 4 の倍数であることより、 $n=2m$ (偶数) ならば 3.2 の $v=4m$ の系列を、また $n=2m-1$ (奇数) のときも同じ系列を用いると周期が最短となる。以上のことより UM 系列は未知パラメータ数によりつぎのように決定できる。

- 1) $2 \leq n \leq 4$ $v=4$ の完全直交系列
- 2) $n > 4$ ($n=2m-1, 2m$) $v=4m$ の半直交系列*

n が比較的小さい場合について系列を Table 1 に示す。ただし半直交系列は $(v, k, \lambda, 0)$ の代表的なものを示した。また周期は長くなるが定理 2 をみたら系列を M 系列からも構成できる⁹⁾。

ここで従来からよく知られている M 系列と、さらに (13) 式をみたら M 系列の振幅を調整した系列¹⁰⁾ (これを変形 M 系列とよぶ) と比較しよう。 M 系列 (変形 M 系列) では周期が 3, 7, 15, 31, ..., ととれ、しかも $v \geq n$ である以外条件はない。たとえば $5 \leq n \leq 7$ の範囲では、周期 7 の M 系列 (変形 M 系列) の方が UM 系列よりも長さの点で短くなる。とくに $n=7$ のとき、 M 系列 (変形 M 系列) では周期 7, UM 系列では周期 16 を用いることになる。したがってその差は 2 倍以上ある。

*3 1/2 周期までの巡回に対してすべて直交するという意味である。

Table 1 Some representative uncorrelated minimum length sequences (UM-seq.)

n	UM-seq. x^*	period
2, 3, 4	1 1 1 -1	4
5, 6	1 1 1 1 -1 1 1 -1 -1 -1 1 -1	12
7, 8	1 1 1 -1 1 1 1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 -1 1	16
9, 10	1 1 1 -1 1 -1 -1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 -1 1 1 1 -1	20
11, 12	1 1 -1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 1 1 1 1	24
13, 14	1 1 1 1 1 1 -1 -1 1 1 -1 1 -1 1 1 -1 -1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 -1 1 -1	28

実際、系列 (AAABABB) において、 $A=1, B=-1$ とおいた M 系列 (M -seq.), $A=1-1/\sqrt{2}, B=-1$ とおいた変形 M 系列 ($MM1$ -seq.), および $A=1, B=\sqrt{2}-2$ とした変形 M 系列 ($MM2$ -seq.) との比較は Fig. 3 のように示される。 t が小なところでは

Fig. 3 Comparison of variance between UM-sequence and the other sequences ($\sigma^2=1$)

は周期の違いのため UM 系列と他の系列との分散の差は認められないが、 t の増加とともに UM 系列を用いた分散は理想曲線 ($7/t$) ((30) 式) に一致して急激に減少してゆくことがわかる。

M 系列に関しては、それが無相関系列でないため相関の影響が観測回数を増しても常に残ってくることに起因する。他方 $MM2$ 系列は M 系列よりも改善されるが UM 系列との違いは明らかである。これは振幅として上限を知らないため入力信号電力が小さくなり、出力中の未知パラメータに関する情報量が減少するためである²⁾。同様のことは $MM1$ 系列と $MM2$ 系列との間にもいえる。ところが、UM 系列は振幅としてその上限を取り、しかも無相関最短であるから t が周

期の倍数のところでは最適となり、それ以外のところでも t の増加とともに相関の影響は減少する。これらの点から UM 系列は望ましい系列とおもわれる。

4. む す び

本論文では、線形定常な単入出力系で観測値に加法的白色ガウス雑音が含まれ、かつ入力信号の振幅が制限されている場合について、インパルス応答を同定するための入力系列について解析した。最小 2 乗法による推定誤差の共分散行列式を一般化分散と定義し、入力決定の評価関数とした。これに従って入力系列を求めると、それは値として上限をとり、未知パラメータ数だけ巡回置換しても相関がなく、かつ周期の最も短い系列をくりかえしたものとして求めた。そして、その UM 系列の構成を block design といわれる配置問題として考察することにより、未知パラメータ数のほぼ 2 倍の長さのものが存在することを示した。さらに、従来から知られている系列と比較して UM 系列が望ましい系列であることを示した。

最後に、本論文に関し熱心に御検討いただいた本学情報工学科田中研究室田村進一助手、ならびに block design に関し有益な御教示をいただいた本学理学部数学科永尾 汎教授に深く感謝する。

参 考 文 献

- 1) M. T. Levin : Optimum Estimation of Impulse Response in Presence of Noise, IRE on CT, CT-7, 50/56 (1960)
- 2) 有本 : システム同定のための入力信号, 計測自動制御学会論文集, 6-6, 517/522 (1970)
- 3) 鈴木・古谷・藤井 : 動特性推定に用いるプロセスの操業データの処理方法, 計測自動制御学会論文集, 4-2, 175/181 (1968)
- 4) 竹内 : 数理統計学, p. 337, 東洋経済出版 (1967)
- 5) 遠山 : 行列論, p. 175, 共立出版 (1970)
- 6) R. Bellman : Introduction to Matrix Analysis, p. 126, McGrawHill (1960)
- 7) M. Hall : Combinatorial Theory (邦訳組合せ理論) 120/144, 吉岡書店 (1971)

- 8) K. Yamamoto: Decomposition fields of Difference sets, Pacific Journal of Mathematics, 13, 1 (1963)
 9) 富永・田中・樋口: 同定のための入力系列, 電子通信

- 学会回路とシステム理論研究会資料, CT-71-76(1972)
 10) 古田・伊沢: プロセス動特性の一測定法, 計測自動制御学会論文集, 3-9, 665/674 (1964)

□ 付 録 1 □

【定理 1 の証明】 $\mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_t$ は $n \times n$ 正値対称行列であるから, その固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n (\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n)$ とすれば, それはすべて正である. $\mathbf{X}_{t+1}^T \mathbf{X}_{t+1}$ の固有値を $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ であらわす. $\mathbf{X}_{t+1}^T \mathbf{X}_{t+1}$ は

$$\mathbf{X}_{t+1}^T \mathbf{X}_{t+1} = [\mathbf{X}_t^T : \mathbf{x}_{t+1}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_t \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{X}_{t+1}^T \end{bmatrix}$$

$$= [\mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_t + \mathbf{x}_{t+1} \mathbf{x}_{t+1}^T]$$

となるが, $\mathbf{x}_{t+1} \mathbf{x}_{t+1}^T$ は非負対称行列であるから $\mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_t$

の摂動項となり, 固有値を大きい順 ($\lambda'_1 \leq \dots \leq \lambda'_n$) にならべると次の不等式が成立する⁵⁾.

$$\lambda_1 \leq \lambda'_1, \lambda_2 \leq \lambda'_2, \dots, \lambda_n \leq \lambda'_n$$

したがって, 一般化分散は

$$GV_{t+1} = |\sigma^2 [\mathbf{X}_{t+1}^T \mathbf{X}_{t+1}]^{-1}| = \prod_{i=1}^n \frac{\sigma^2}{\lambda'_i} \leq \prod_{i=1}^n \frac{\sigma^2}{\lambda_i}$$

$$= GV_t$$

となり単調減少する.

(証明終)

□ 付 録 2 □

【定理 3 の証明】 $[\mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_t]^{-1}$ の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ はすべて正であり, 分散, 一般化分散はそれぞれ

$$V_t = \text{Tr} \left[\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_t \right]^{-1} = \sum_{i=1}^n \sigma^2 \lambda_i$$

$$GV_t = \left| \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_t \right|^{-1} = \prod_{i=1}^n \sigma^2 \lambda_i$$

である. また

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \lambda_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

なる不等式はよく知られている. これを使って V_t と GV_t の間にはつぎの不等式が成立する.

$$GV_t = \prod_{i=1}^n \sigma^2 \lambda_i \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 \lambda_i \right)^n = \left(\frac{1}{n} V_t \right)^n$$

上式で等号が成立すれば, GV_t の最小問題と V_t の最小問題は一致する. 定理 2 を満足する入力系列を用いると $\mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_t = t\sigma^2 \mathbf{I}$ より, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ であるから等号が成立し分散は最小となる. (証明終)