サイリスタ増幅器を含む閉ループ系の 1/2 次調波自励振動

池 田 義 弘・畑 四 郎

大阪府立大学工学部 堺市百舌鳥梅町四丁 804

(昭和 47 年 4 月 5 日 受付)

1/2-Harmonic Self-Oscillation in Closed-Loop System with Thyristor Amplifier

Yoshihiro IKEDA and Shiro HATA

(College of Engineering, University of Osaka Prefecture, Sakai)

(Received April 5, 1972)

A closed loop system consisting of a thyristor amplifier frequently generates subharmonic self-oscillations, which cause deterioration of the accuracy of the system.

In this paper, the relations between the magnitude of 1/2-harmonic self-oscillation and the open loop gain of the control system are presented. From experimental results, it is shown that unbalance of elements and disturbance, such as fluctuation of the power source, promote the generation of the oscillation.

1. 緒 言

サイリスタ増幅器を含む閉ループ制御系では制御出力が電源周波数の整数分の一で振動する、いわゆる分数調波自励振動を生じ制御系の精度を劣化させる。この現象は素子のスイッチング動作を利用した増幅器を含む制御系に共通して生じるものと思われる。すでに筆者らは追値制御系のように平衡点が原点にある場合には、分数調波自励振動の安定性が記述関数法により論じられることを明らかにした¹⁾。本研究では平衡点が原点以外にある場合に生じる 1/2 次調波振動を解析している。平衡点が原点にある場合とは異なり、常に平衡点がリップル成分により乱されている。この問題に対しては、Fallside²⁾、Щипило³⁾、Parrish⁴⁾ らの研究があるが、最も厳密と思われる Fallside らのインパルス法でもかなり理論値と実験値が異なる⁵⁾。この点を含めて 1/2 次調波自励振動の発生機構はまだ十分に解析されていない。本論文では、まずサイリスタ増幅器の出力波形をフーリエ級数展開し、サイリスタの点弧位相を決定する式に基づいて振動とループゲインの関係について解析し、1/2 次調波自励振動の場合は

両者の厳密な関係が求まることを明らかにした。次に、本解析方法の有用性を実証するために実際に定電圧制御系を構成して、1/2 次調波自励振動の実験を行なった。その結果、理論値が実験値とさきわめてよく一致することが明らかになった。さらに、理論値より低いゲインにおいて発生する微小な 1/2 次振動は回路の不平衡に起因するものであることを確かめた。

2. サイリスタ増幅器

まず、ここでサイリスタ増幅器の概要を述べる。負荷に与える直流電力を制御する方式としては、サイリスタによるチョップ回路方式、順変換方式があるが、ここでは Fig. 1 に示すような順変換回路をとりあげる。図で m 相交流電源の各相に接続されたサイリスタの陽極には $e = f(\Omega t)$, $f(\Omega t + 2\pi/m)$, ... なる電圧が加わっている。サイリスタの位相制御方式としては各半波について

$$g(\alpha t) = \frac{1}{a} \left\{ - \int_{\alpha t}^{\pi} f(\alpha \tau) d\Omega \tau + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(\alpha \tau) d\Omega \tau \right\} \quad (1)$$

ただし、 a は任意定数

で与えられる電圧と入力電圧 $v_i(t)$ との和が 0 になる

Fig. 1 Schematic diagram of converter

時刻にゲートパルスが発生し、サイリスタを点弧する。すなわち、

$$v_i(t) + g(\omega t) = 0 \quad (2)$$

が点弧位相を決定する式である。このとき、出力電圧の平均値は次式で与えられる。

$$v_0 = \frac{2}{\pi} \int_{\omega t}^{\pi} f(\omega \tau) d\omega \tau = \frac{2a}{\pi} v_i + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega \tau) d\omega \tau$$

したがって、この場合は点弧時における入力とその半波間での出力の平均値の間には線形関係が成立する。

3. 振動現象の解析

Fig. 2 に示す制御系において、 G_1 , G_2 は任意の線

Fig. 2 Block diagram of control system with thyristor amplifier

形フィルタ、 K は前置増幅器、 K_A は前章で述べたサイリスタ増幅器である。定電圧制御系などがその代表的な例である。

サイリスタ増幅器の出力電圧はフーリエ級数を用いて、一般に次式で与えられるものとする。

$$v(t) = v_0(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\alpha) \sin(nm\Omega t + \phi_n) \quad (3)$$

ここで、 $v_0(\alpha)$ は出力の平均値、 m は相数、 α は点弧位相である。また、サイリスタ増幅器の入力 $v_i(t)$ は Fig. 2 から

$$v_i(t) = KG_{1(p)} \{v_r(t) - G_{2(p)} v(t)\} \quad (p = d/dt) \quad (4)$$

で与えられる。点弧位相を決定する式は(2)式から

$$v_i(t) + g(\omega t - 2k\pi/m) = 0 \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

であり、(5)式を満たす時刻にゲートパルスが発生し、サイリスタを点弧する。 $v_r(t)$ は一定とし、(3)、(4)式と(5)式を用いて次式を得る。

$$\begin{aligned} & K[G_1(j\Omega) v_r - K[G_1(j\Omega) \cdot G_2(j\Omega) v_0(\alpha) \\ & - K \sum_{n=1}^{\infty} |G_1(jnm\Omega) \cdot G_2(jnm\Omega/S)| C_n(\alpha) \\ & \times \sin(nm\Omega t + \phi_n + \theta_n) + g(\omega t - 2k\pi/m) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 $\theta_n = \angle(G_1(jnm\Omega) \cdot G_2(jnm\Omega))$

(6)式はサイリスタ増幅器の入力が単なる直流電圧ではなく、種々の周波数成分を含む場合のサイリスタの点弧位相を決定する式である。

系のゲインが小さく、サイリスタ増幅器の出力が安定している場合は、点弧位相は常に一定であって

$$\Omega t = \alpha + 2k\pi/m \quad k=0, 1, 2, \dots$$

において(6)式が成立する。

次に K を増大してゆき、ある臨界値に達すると出力に振動を生じる。これは(6)式を満たす Ωt の値が各半サイクルで一定の値にならず、周期的に異なった値をとるためであると考えられる。この振動の周波数を $nm\Omega/S$ ($S=2, 3, \dots$) とすると、このときの点弧位相を決定する式は(3)式において $\Omega \rightarrow \Omega/S$ と置き換え、(4)式とともに(5)式の関係から

$$\begin{aligned} & K[G_1(j\Omega) v_r - K[G_1(j\Omega) \cdot G_2(j\Omega) v_0(\alpha_k) \\ & - K \sum_{n=1}^{\infty} |G_1(jnm\Omega/S) \cdot G_2(jnm\Omega/S)| C_n(\alpha_k) \\ & \times \sin\left(\frac{nm\Omega}{S} t + \phi_{n/S} + \theta_{n/S}\right) + g(\Omega t - 2k\pi/m) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

を得る。(7)式は

$$\Omega t = \alpha_k + 2k\pi/m \quad k=0, 1, 2, \dots, S-1$$

において成立する。したがって

$$\begin{aligned} & K[G_1(j\Omega) v_r - K[G_1(j\Omega) \cdot G_2(j\Omega) v_0(\alpha_k) \\ & - K \sum_{n=1}^{\infty} |G_1(jnm\Omega/S) \cdot G_2(jnm\Omega/S)| C_n(\alpha_k) \\ & \times \sin\left(\frac{nm}{S} \left(\alpha_k + \frac{2k\pi}{m}\right) + \phi_{n/S} + \theta_{n/S}\right) + g(\alpha_k) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

なる S 個の式を得る。

また、振動時にも平均値は一定に保たれているものとする

$$v_0(\alpha_k) = v_0(\alpha) \quad (9)$$

任意の振動周波数について(8)式を解くことはできないが振動周波数が基本電源周波数の $1/2$ である場合は、(9)式より α と α_1 あるいは α_2 のいずれかを与えれば残る一方の α_2 または α_1 が求まる。このようにして決定した α_1, α_2 がおのおの(8)式を満たすことからゲインを計算することができる。これを繰り返すと、結局、ゲイン K と $1/2$ 次調波自励振動の大きさの関係が求められる。

4. 計算例

一例として、商用周波数の電源を用いた単相全波形のサイリスタ増幅器について、 $1/2$ 次調波自励振動と一巡ループゲインの関係も求める。

この場合 $m=2$, $S=2$ であり、 $g(\omega t)$ としては(1)式において $f(\omega t) = E \sin \Omega t$, $E/a = X$ として

$$g(\Omega t) = X \cos \Omega t \quad (10)$$

なる余弦電圧が用いられる。まず、(9)式を考慮すると

$$2 \cos \alpha = \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \quad (11)$$

を得る。いっぽう、(8)式の関係からループゲインと点弧位相の関係は次式で与えられる(付録 1 参照)。

$$KK_A = 2(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) / F_n(\alpha_1, \alpha_2) \quad (12)$$

ただし

$$\begin{aligned} F_n(\alpha_1, \alpha_2) = & -C_{1/2} Z_{1/2} \{ \sin(\alpha_1 + \phi_{1/2} + \theta_{1/2}) + \sin(\alpha_2 + \phi_{1/2} + \theta_{1/2}) \} / 2 \\ & - \sum_{n=2,3,\dots}^{\infty} Z_{n/2} [\{ \cos(\alpha_1 - \theta_{n/2}) - (-1)^n \cos((n+1)\alpha_1 - n\alpha_2 - \theta_{n/2}) \} / (n+1) \\ & - \{ \cos(\alpha_1 + \theta_{n/2}) - (-1)^n \cos((n-1)\alpha_1 - n\alpha_2 - \theta_{n/2}) \} / (n-1) \\ & - \{ \cos(\alpha_2 - \theta_{n/2}) - (-1)^n \cos(n\alpha_1 - (n+1)\alpha_2 + \theta_{n/2}) \} / (n+1) \\ & + \{ \cos(\alpha_2 + \theta_{n/2}) - (-1)^n \cos(n\alpha_1 - (n-1)\alpha_2 + \theta_{n/2}) \} / (n-1)] \\ & + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} 4 Z_{n/2} \{ \cos(n\alpha_1 + \theta_{n/2}) - \cos(n\alpha_2 + \theta_{n/2}) \} / \{ (n+1)(n-1) \} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで

$$\begin{aligned} C_{1/2} &= \sqrt{(\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2 - 2\alpha_1 + 2\alpha_2)^2 + (\cos 2\alpha_1 - \cos 2\alpha_2)^2} \\ \phi_{1/2} &= \tan^{-1}(\cos 2\alpha_1 - \cos 2\alpha_2) / (\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2 - 2\alpha_1 + 2\alpha_2) \\ Z_{n/2} e^{j\theta_{n/2}} &= G_1(jn\Omega) G_2(jn\Omega) \end{aligned}$$

である。そこで(11)式により α, α_1 を与えて α_2 を求め、(12)、(13)式の計算を実行すると点弧位相が α_1, α_2 になるときのループゲイン KK_A を得る。

5. 実験結果

単相全波出力形のサイリスタ増幅器を用いて、Fig. 3 に示すような構成の定電圧制御系について実験を行った。ここでは $G_1=1$ とし、 G_2 としては図に示すような 2 次形のフィルタを用いた。フィルタを構成するインダクタンス L は、非線形特性の影響を避けるために空心のものを用いた。

(a) block diagram

(b) circuit diagram of linear filter

$$G_2(S) = 0.8086 / (2.337 \times 10^{-4} S^2 + 1.637 \times 10^{-2} S + 1)$$

Fig. 3 Regulated AC-to-DC converter

単相全波出力形のサイリスタ増幅器の出力回路の形は、通常、サイリスタとダイオードの混合ブリッジ回路、あるいは 2 相電源とサイリスタ 2 個を用いた全波整流形とする。しかし、この実験では、サイリスタの陽極に全波整流電圧を加えることにより、サイリスタ

1 個で出力電圧の制御を行なっている。そのためサイリスタの特性のふぞろいは考慮せずにすみ、整流用のダイオードに特性のそろった素子を用いるように留意すればよい。

サイリスタのゲート制御回路では(1)、(2)式の基本原理に基づいて、電源電圧を整流した後、半波ごとに積分することにより余弦電圧を得ている。この方式によりサイリスタ増幅器の平均値での入出力特性を線形にすることを可能にした。

実験方法は、最初に前置増幅器のゲイン K を十分低く設定しておき、入力 v_r を調節し任意の平均出力(点弧位相 α) に設定する。その状態からゲイン K を徐々に増大してゆき、ゲイン K の値に対し、相隣る 2 つの半サイクルでの点弧位相 α_1, α_2 (μsec) をデジタルカウンタで測定する。この測定中は平均出力が設定値に保たれるよう、 v_r を調節する。

測定結果を Fig. 4 に示す。理論値は(12)、(13)式を $n=10$ まで計算した結果であるが、フィルタが低域の波特性をもつので、有限項で計算を打ち切ったための誤差はごく小さい。また図より、Fallside らのインパルス法による理論値と比較しても本論文の計算方法の方が正確であることがわかる。

6. 検 討

(13)式を用いて解析する場合、実際には 2, 3 の点で注意を払わないと誤差を生じる。サイリスタとダイオードの順方向電圧降下には平均値成分が含まれているほか、1/2 次振動発生時には $nm\Omega/2$ 成分とその高

Fig. 4 Relation between 1/2-harmonic self-oscillation and loop gain

調波成分が含まれる。 $nm\Omega/2$ とその高調波成分は (13) 式からも明らかなように、振動発生に直接関係している成分である。それゆえ、Fig. 4 の理論値では順方向電圧降下がサイリスタやダイオードの導通期間中は一定であると近似してフーリエ級数展開し、(13) 式を補正したものを用いている (付録 2 参照)。サイリスタ増幅器の電源電圧の低い場合にも順方向電圧降下を考慮する必要がある。次に (13) 式は基本周波数 $nm\Omega/2$ とその高調波成分におけるフィルタの特性に関係している。したがってフィルタの各素子の値が周波数により変化するような場合には、各周波数でのフィルタの特性を求めておいて (13) 式を計算する必要がある。

理論値より低いゲインの範囲で発生している 1/2 次振動について考察する。ゲインの非常に小さい状態においてサイリスタの点弧位相を順に測定すると、交互にわずかに異なった値をとり、かつ小さいばらつきで変動しているのが認められる。そして、ゲインの増大につれて隣りあう点弧位相の差は増し、完全な 1/2 次振動に成長する過程が観測される。このようなことから、もともと制御系内には回路上の不均衡により 1/2

次成分が存在する。そして電源の周波数変動、電圧変動による外乱により常に安定状態が乱されているため、ゲインが増大して (12) 式を満たすようになれば、急速に振動が成長するものと考えられる。

7. 結 言

サイリスタ増幅器を含む制御系に生じる 1/2 次調波自励振動について検討した。

(1) 1/2 次の振動の場合、振動とループゲインの関係が正確に求められることを示した。計算式は無限級数の計算であるので煩雑であるが、計算機を利用すればよいし、線形部が低域の波特性をもつので、有限項で計算を打ち切っても誤差は少ない。むしろ、実際に使用するサイリスタやダイオードに応じて順方向電圧降下成分を補正すること、また、線形フィルタに使用する素子の周波数特性を考慮して計算を行なうことが必要である。

(2) わずかの回路上の不均衡は不可避であるが、そのために理論値より低いゲインであっても常に微小な 1/2 次の振動が存在する。

以上のようにサイリスタ増幅器を含む閉ループ系における 1/2 次調波自励振動とループゲインの関係を明らかにしたが、本研究の結果はこの種の閉ループ系の設計法の指針になると信じる。最後に本研究の数値計算は、大阪府立大学計算センタに依頼して行なったものであることを付記する。

参 考 文 献

- 1) 池田・畑・石野：閉ループ系におけるサイリスタ増幅器の特性と自励振動について、システムと制御、16-6, (1972)
- 2) F. Fallside & A. R. Farmer: Ripple Instability in Closed-loop Control System with Thyristor Amplifier, Proc. IEE, 114-1, 139/152 (1967)
- 3) В. П. Щипило: Критерий устойчивости замкнутых систем регулирования с вентильным преобразователем к субгармоническим автоколебаниям; Электричество, 9, 36/40 (1969)
- 4) E. A. Parrish & E. S. Mcvey: A Theoretical Model for Single-phase Silicon-Controlled Rectifier Systems, IEE Trans., AC-12, 577/579 (1967)
- 5) 畑・池田・石野：サイリスタ増幅器を含む制御系の安定判別法の比較，電気四学会連合大会，2558 (1970)

□ 付 録 1 □

2 相交流電源を使用したサイリスタ増幅器の出力が 1/2 次の振動をしている場合の波形を Fig. A に示す。この波形は $2\pi/\Omega$ を一周期としており、フーリエ級数に展開できる。

$$v(t) = v_{0(\alpha_k)} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n/2} \cos n\Omega t + b_{n/2} \sin n\Omega t)$$

各係数は次式によって決まる。

$$v_{0(\alpha_k)} = E(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + 2)/2\pi$$

$$a_{n/2} = \frac{1}{\pi} \left[\int_{\alpha_1}^{\pi} E \sin \Omega t \cos n\Omega t d\Omega t + \int_{\alpha_2+\pi}^{2\pi} E \sin (\Omega t - \pi) \cos n\Omega t d\Omega t \right] \quad (\text{A} \cdot 1)$$

$$b_{n/2} = \frac{1}{\pi} \left[\int_{\alpha_1}^{\pi} E \sin \Omega t \sin n\Omega t d\Omega t + \int_{\alpha_2+\pi}^{2\pi} E \sin (\Omega t - \pi) \sin n\Omega t d\Omega t \right] \quad (\text{A} \cdot 2)$$

(A・1), (A・2) 式より係数を求め、さらに (7) 式とから次の式を得る。

$$Kv_r - KZ_0 v_{0(\alpha_k)} - \frac{KK_A X}{2} \left[C_{1/2} Z_{1/2} \sin (\Omega t + \phi_{1/2} + \theta_{1/2})/2 \right. \\ + \sum_{n=2,3,\dots}^{\infty} Z_{n/2} \{ \sin (n\Omega t - (n+1)\alpha_1 + \pi/2 + \theta_{n/2})/(n+1) \\ + \sin (n\Omega t - (n-1)\alpha_1 - \pi/2 + \theta_{n/2})/(n-1) \\ + \sin (n\Omega t - (n+1)(\alpha_2 + \pi) + 3\pi/2 + \theta_{n/2})/(n+1) \\ + \sin (n\Omega t - (n-1)(\alpha_2 + \pi) - 3\pi/2 + \theta_{n/2})/(n-1) \\ \left. - \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{n/2} Z_{n/2} \sin (n\Omega t - n\pi/2 + \pi/2 + \theta_{n/2})/(n+1)(n-1) \right] \\ + X \cos \Omega t = 0 \quad (\text{A} \cdot 3)$$

ここで、

$$K_A = E/\pi X, \quad Z_{n/2} e^{j\theta_{n/2}} = G_1(jn\Omega) \cdot G_2(jn\Omega)$$

$$C_{1/2} = 4\pi \sqrt{a_{1/2}^2 + b_{1/2}^2}/E, \quad \phi_{1/2} = \tan^{-1} a_{1/2}/b_{1/2}$$

(A・3) 式は $\Omega t = \alpha_1$ と $\Omega t = \alpha_2 + \pi$ のときに成立する。こうして得られた 2 式より平均値成分を除去した上、整頓すると (12), (13) 式が得られる。

□ 付 録 2 □

順方向電圧降下は次式で表わせるものとする。

$$v(t)' = v_{0'(\alpha_k)} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n/2}' \cos n\Omega t + b_{n/2}' \sin n\Omega t)$$

$a_{n/2}', b_{n/2}'$ は付録 1 の (A・1), (A・2) 式において、 $E \sin \Omega t$, $E \sin (\Omega t - \pi)$ の代わりに $kE (0 \leq k < 1)$ と置くことにより求まる。付録 1 において $v(t)$ の代わりに $v(t) - v(t)'$ と置き同様に計算すればよい。

最終的に (13) 式右辺に次の補正項を付加すればよい。

$$k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{n/2}}{n} \left[(-1)^n \{ \sin (n(\alpha_1 - \alpha_2) + \theta_{n/2}) - \sin (n(\alpha_2 - \alpha_1) + \theta_{n/2}) \} \right. \\ \left. - (1 + (-1)^n) \{ \sin (n\alpha_1 + \theta_{n/2}) - \sin (n\alpha_2 + \theta_{n/2}) \} \right]$$