一般的定常線形系の実現性理論と定係数線形常微分方程式の システムの一般システム理論における特徴づけ

高 原 康 彦

東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山2-12-1

(昭和 47 年 10 月 9 日 受 付)

Realization Theory for General Stationary Linear Systems and General System Theoretical Characterization of Linear Differential Equation Systems

Yasuhiko TAKAHARA

(Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo)

(Received October 9, 1972)

In this paper we considered a realization theory of general stationary linear dynamic systems and, based on the consideration, discussed a characterization of constant coefficient linear ordinary differential equation systems in the framework of general systems theory.

We showed that a necessary and sufficient condition for an input-output response family to be realizable is that the family satisfy two properties, namely, input response consistency and state response consistency, and that the input response consistency, stationarity, strong causality and finite dimensionality can essentially characterize the differential equation systems.

Since we treat general linear systems, the realization problem of this paper is different from the conventional one⁷⁾. However, we demonstrated that our general result implies the ordinary one if the systems in consideration are restricted to the class of differential equation systems.

In conclusion we pointed out and demonstrated that our general treatment of linear systems leads to the construction of an axiomatic linear system theory, which will be discussed in a subsequent paper.

1. は じ め に

この論文の目的は、一般的定常線形系の実現性理論をもとにして一般システム理論のわくの中で、自動制御理論の対象としてもっともよく研究されている定係数線形常微分方程式による線形システムが、どのように特徴づけられるかを考察するものである^{1)~6)}。

はじめにこの論文に必要な定義を導入しておく。数学的記法は参考文献 10) によっている。

この論文で考えている定係数線形常微分方程式のシステムというのは、つぎの微分方程式で表現されるシステムである。

$$\frac{dz}{dt} = Fz + Gx \quad (1)$$

$$y = Hz \quad (2)$$

ただし、 E^m, E^n, E^r をそれぞれ m 次元、 n 次元、 r 次元のユークリッド空間とし、 $x(t) \in E^m$ 、 $z(t) \in E^n$ 、 $y(t) \in E^r$ 、また F, G, H はそれぞれ $n \times n$ 、 $n \times m$ 、 $r \times n$ の実数の時間に対し不変の行列である。 t はもち論時間を示す実数である。 $X = L_2[0, \infty)$ とする。

一般システムの定義は、たとえば参考文献 8) に述べてある。それに従い、一般的線形の動的システム（この論文では動的システムを時間システムとよぶ）およびその状態表現を定義する。

時間軸 T , 時間軸の区間, 時間関数の restriction, 時間関数の concatenation, 定常系の時間軸, 転位作用素 S^t などの概念は参考文献 8) に述べてあるので, ここではあらためて定義しない.

入力と出力のアルファベット A と B は体 F の上に定義された線形代数である. このとき $A^T = \{x|x: T \rightarrow A\}$ と $B^T = \{y|y: T \rightarrow B\}$ が体 F の上の線形代数になる.

すなわち A^T の和とスカラー積は $x \in A^T, x' \in A^T, x'' \in A^T, \alpha \in F$ としたとき,

$$x + x' = x'' \leftrightarrow (\forall t) (t \in T \rightarrow x(t) + x'(t) = x''(t))$$

$$\alpha x = x' \leftrightarrow (\forall t) (t \in T \rightarrow \alpha x(t) = x'(t))$$

とする.

この論文での動的線形系の入力の集合 X と出力の集合 Y はそれぞれ A^T と B^T の部分線形代数 (空間) で, X は特につぎの入力完全性とよぶ条件を満足する.

入力完全性:

$$(\forall x) (\forall t) (x \in X \& t \in T \rightarrow x^t \cdot 0_t \in X)$$

ただし $0_t: T_t \rightarrow A$ は 0 のみを値とする関数, また $x^t \cdot 0_t$ は x^t と 0_t の連結 (concatenation) である.

一般線形時間システムは, 入力 X , 出力 Y に対し

$$S \subset X \times Y$$

と表現される空でない集合論的關係で, つぎの条件を満足するものである.

$$(C1) \quad (\forall (x, y)) (\forall (\hat{x}, \hat{y})) ((x, y), (\hat{x}, \hat{y})) \in S$$

$$\rightarrow (x + \hat{x}, y + \hat{y}) \in S$$

$$(C2) \quad (\forall (x, y)) (\forall \alpha \in F) ((x, y) \in S$$

$$\rightarrow (\alpha x, \alpha y) \in S)$$

条件 (C1) は通常重ね合わせの原理とよばれるものを表わし, 条件 (C2) は局所的性質が大局的性質になることの表現である. 通常考えられている線形系が上記の定義を満たしているのは明白であろう. 議論の便宜のために S に対してつぎの仮定をする.

$$\mathcal{D}(S) = \{x | (\exists y) ((x, y) \in S)\} = X$$

線形時間システム S に対しいろいろの状態表現の概念がある. C_0 を体 F の上に定義された線形代数とする. $C_0 \times X$ を通常の意味の線形代数とする¹⁰⁾. このとき, つぎの条件を満足する線形関数 $\rho_0: C_0 \times X \rightarrow Y$ を S の初期状態表現とよぶ.

$$(x, y) \in S \leftrightarrow (\exists c) (c \in C_0 \& y = \rho_0(c, x))$$

また C_0 を初期状態オブジェクトとよぶ.

各 $t \in T$ に対し, C_t を体 F の上の線形代数, $\rho_t: C_t \times X_t \rightarrow Y_t$ を線形関数としたとき,

$$S_t^p = \{(x_t, y_t) | (\exists c_t) (c_t \in C_t \& y_t = \rho_t(c_t, x_t))\}$$

とする. ただし X が線形代数であるから, X_t , また結果として $C_t \times X_t$ が線形代数になる. このとき, 関

数族 $\bar{\rho} = \{\rho_t | t \in T\}$ がつぎのシステム適合性の条件
システム適合性:

$$(\forall t \in T) (S_t^p = S_0^p | T_t)$$

を満足すれば, $\bar{\rho}$ を時間システム S_0^p の線形入力-出力応答とよぶ. また ρ_t を線形入力-出力関数, C_t を状態オブジェクトとよぶ. ただし $S_0^p | T_t = \{(x | T_t, y | T_t) | (x, y) \in S_0^p\}$ である.

線形入力-出力応答 $\bar{\rho}$ に対し, つぎの状態出力適合性, 半群性, 状態関数適合性とよばれる条件を満足する線形関数族 $\bar{\phi} = \{\phi_{tt'} | \phi_{tt'}: C_t \times X_{tt'} \rightarrow C_{t'} \& t \leq t'\}$ があつたとする.

状態出力適合性:

$$(C3) \quad (\forall t \leq t') (\forall x_{tt'} \cdot x_{t't'}) (\forall c_t) (\rho_{t'}(\phi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t't'}) = \rho_t(c_t, x_{tt'} \cdot x_{t't'}) | T_{t'})$$

半群性:

$$(C4) \quad (\forall t \leq t' \leq t'') (\forall x_{tt'} \cdot x_{t't''}) (\forall c_t) (\phi_{t't''}(c_t, x_{tt'} \cdot x_{t't''}) = \phi_{t't''}(\phi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t't''}))$$

状態関数適合性:

$$(C5) \quad (\forall t) (\forall c_t) (\phi_{tt}(c_t, x_{tt}) = c_t)$$

このとき $\langle \bar{\rho}, \bar{\phi} \rangle$ を $(S = S_0^p)$ の線形ダイナミカルシステム (表現) とよぶ. また $\bar{\phi}_{tt'}$ を状態せん移関数, $\bar{\phi}$ を状態応答とよぶ.

線形入力-出力関数 $\rho_t: C_t \times X_t \rightarrow Y_t$ は線形性により

$$\rho_t(c_t, x_t) = \rho_t(c_t, 0) + \rho_t(0, x_t)$$

になるので, 2つの線形関数 $\rho_{1t}: C_t \rightarrow Y_t$ (ただし $\rho_{1t}(c_t) = \rho_t(c_t, 0)$), $\rho_{2t}: X_t \rightarrow Y_t$ (ただし $\rho_{2t}(x_t) = \rho_t(0, x_t)$) によって表現できる. ρ_{1t} を状態応答関数, ρ_{2t} を入力応答関数とよび, $\rho_t = \langle \rho_{1t}, \rho_{2t} \rangle$ と表わす. また, 特に ρ_{10} と ρ_{20} をおのおの初期状態応答関数, 初期入力応答関数とよぶ. 状態関数 $\phi_{tt'}$ についても同じように $\phi_{tt'} = \langle \phi_{1tt'}, \phi_{2tt'} \rangle$ と表わす. ただし $\phi_{1tt'}(c_t) = \phi_{tt'}(c_t, 0)$, $\phi_{2tt'}(x_{tt'}) = \phi_{tt'}(0, x_{tt'})$ である.

以上の定義に基づいて, システムの性質を2つ導入する. 線形時間システム $S \subset X \times Y$ がつぎの条件を満足するような線形初期状態表現 $\rho_0: C_0 \times X \rightarrow Y$ をもつとき, システム S は強い意味で因果的であるという.

強い意味の因果性:

$$(C6) \quad (\forall t) (\forall x_t) (\rho_{20}(0^t \cdot x_t) | \bar{T}^t = 0 | \bar{T}^t)$$

2番目のシステムの性質として, 定常性を考える. 線形定常系 $S \subset X \times Y$ は定常系の時間軸の上に定義された線形時間システムで, つぎの条件を満足するのである.

定常性:

$$(C7) \quad (\forall t) (t \in T \rightarrow S | T_t = S^t(S))$$

ただし, $S^t(S) = \{(S^t(x), S^t(y)) | (x, y) \in S\}$

である。

定常系に対応する概念として、時間に対し不変の入力-出力応答がある。定常系の時間軸の上に定義された入力-出力集合 X がつぎの条件を満足するとき、 X を定常系の入力集合とよぶ。

定常系の入力集合 X :

$$(C8) \quad (\forall t)(X|T_t = s^t(X))$$

定常系の入力集合 X の上に定義された入力-出力応答 $\bar{p} = \{\rho_t | t \in T\}$ がつぎの条件を満足するとき、 $\bar{p}$ は時間に対し不変であるという。

時間に対し不変の入力-出力応答 :

$$(C9) \quad \text{体 } F \text{ の上に定義された線形代数 } C \text{ があり、}$$

すべての $t \in T$ に対し $C_t = C$ になる。

$$(C10) \quad (\forall t)(\forall c)(\forall x_t)(\rho_t(c, x_t) = s^t(\rho_0(c, s^{-t}(x_t)))$$

入力-出力応答と同じく、時間に不変のダイナミカルシステムが定義できる。定常系の入力集合 X の上に定義された線形ダイナミカルシステム $\langle \bar{p}, \bar{\phi} \rangle$ が次の条件を満足するとき、 $\langle \bar{p}, \bar{\phi} \rangle$ を時間に対し不変の線形ダイナミカルシステムとよぶ。

α . $\bar{p}$ は時間に対し不変の入力-出力応答である。

β . (C11) $(\forall c)(\forall x_{tt'})(\phi_{tt'}(c, x_{tt'}) = \phi_{0\tau}(c, s^{-t}(x_{tt'})))$ ただし $\tau = t' - t$ である。

次節以下では、すべての記号の意味は特に断わらないかぎり、この節で定義したものとす。

2. 定常系の実現性理論⁹⁾

一般にすべての線形時間システムは、線形初期状態表現、あるいは線形入力-出力応答をもつことが証明できる⁹⁾。逆に線形の入力-出力応答は線形時間システムを表現しているから、線形システムの議論は線形入力-出力応答を出発点にしてもよい。一方ダイナミカルシステム表現に関しては、任意に与えられた線形入力-出力応答に対し、それに対応する状態応答 $\bar{\phi}$ が存在し $\langle \bar{p}, \bar{\phi} \rangle$ が線形ダイナミカルシステムになるとはかぎらない。入力-出力応答 $\bar{p}$ がダイナミカルシステムの入力-出力応答になるとき、 $\bar{p}$ を実現可能であるという。 $\bar{p}$ がどのような条件を満たすとき、 $\bar{p}$ が実現可能になるかを問うのが、一般システムにおける実現性問題である。一般のシステムに関する議論は参考文献 8) を参照されたい。

線形時間システムの実現性問題を考察するために、線形系に対するつぎのような性質を導入する。各 $t \in T$ に対し、 $\rho_t : C_t \times X_t \rightarrow Y_t$ を線形関数とし、 $\bar{p} = \{\rho_t | t \in T\}$ とする。 $\bar{p}$ は $S_t^p = S_0^p$ の条件を満足しなくてもよい。 ρ_t は線形関数であるから、 $\rho_{1t} : C_t \rightarrow Y_t$ と

$\rho_{2t} : X_t \rightarrow X_t$ の 2 つの線形関数で規定される。 $\bar{p}_2 = \{\rho_{2t} | t \in T\}$ がつぎの条件を満足するとき、 $\bar{p}$ (あるいは $\bar{p}_2$) が入力応答適合性を満足するという。

入力応答適合性 :

$$(C12) \quad (\forall t \leq t')(\forall x_{t'})(\rho_{2t'}(x_{t'}) = \rho_{2t}(0_{tt'} \cdot x_{t'}) | T_{t'})$$

また $\bar{p}_1 = \{\rho_{1t} | t \in T\}$ と $\bar{p}_2$ がつぎの関係を満足するとき $\bar{p}$ は状態応答適合性を満足するという。

状態応答適合性 :

$$(C13) \quad (\forall (c_t, x_{tt'}))(\exists c_{t'})(\rho_{1t'}(c_{t'})$$

$$= \rho_t(c_t, x_{tt'} \cdot 0_{tt'}) | T_{t'})$$

$$(C14) \quad (\forall c_{t'})(\exists (c_t, x_{tt'}))(\rho_{1t'}(c_{t'})$$

$$= \rho_t(c_t, x_{tt'} \cdot 0_{tt'}) | T_{t'})$$

入力応答適合性が意味するところは、入力が 0 であるかぎり、それはシステムの“歴史”となることはなく、システムの未来の動きには影響を与えない。この性質は後の議論で示すごとく、実現性理論にとって決定的重要性をもつ。 $\bar{p}$ が実現可能であるためには、もち論状態応答関数 ρ_{1t} は入力応答関数 ρ_{2t} と独立ではありえない(実際定係数線形常微分方程式によるシステムの解を考えてみれば明らかである)。状態応答適合性がこの関係を示すもののなのである。

【定理 1】 $\bar{p} = \{\rho_t | \rho_t : C_t \times X_t \rightarrow Y_t \text{ 及 } t \in T\}$ を線形関数族とする。 $\bar{p}$ が実現可能になるための必要十分条件は、 $\bar{p}$ が入力応答適合性および状態応答適合性を満足することである。

この定理の証明は他の論文で行なっているので省略する⁹⁾。

線形関数族 $\bar{p} = \{\rho_t | t \in T\}$ が条件 (C9), (C10) を満足するとき、 $\bar{p}$ は時間に対し不変という。定常系の実現性に対しては、つぎの定理が成立する。

【定理 2】 線形関数族 $\bar{p} = \{\rho_t | \rho_t : C \times X_t \rightarrow Y_t\}$ が時間に対し不変でかつ実現可能であるとき、 $\bar{p}$ は時間に対し不変の線形ダイナミカルシステムで実現できる。この定理の証明はつぎの予備定理を使う。時間に対し不変の線形関数族 $\bar{p}$ がつぎの条件を満足するとき $\bar{p}$ を既約であるという。

既約性

$$(C15) \quad (\forall c)(\forall c')(\rho_{10}(c) = \rho_{10}(c') \rightarrow c = c')$$

$\bar{p}$ が既約のとき、 $\bar{p}$ が時間に対し不変であるので、

$$\begin{aligned} \rho_{1t}(c) &= \rho_{1t}(c') \rightarrow s^t(\rho_{10}(c)) = s^t(\rho_{10}(c')) \\ &\rightarrow \rho_{10}(c) = \rho_{10}(c') \rightarrow c = c' \end{aligned}$$

になる。すなわち $\rho_{1t} : C \rightarrow C$ は 1 対 1 写像になるので、 $\rho_{1t}(C)$ から C への逆写像が存在する。それを ρ_{1t}^{-1} と書くことにする。

予備定理 時間に対し不変の線形関数族 $\bar{p} = \{\rho_t | \rho_t : C \times X_t \rightarrow Y_t \text{ 及 } t \in T\}$ が既約で実現可能であ

たとする。このとき、 $\bar{\rho}$ に対応する状態応答 $\bar{\phi}$ は次のように一意的に与えられる。

$$\begin{aligned}\phi_{1t'}(c) &= \rho_{1t'}^{-1}(\rho_{1t}(c)|T_{t'}) \\ \phi_{2t'}(x_{tt'}) &= \rho_{2t'}^{-1}(\rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0_{t'})|T_{t'})\end{aligned}$$

しかも、 $\langle \bar{\rho}, \bar{\phi} \rangle$ は時間に対し不変のダイナミカルシステムになる。

【証明】 $\bar{\rho}$ が実現可能であるから、それに対応する線形の状態応答 $\bar{\phi}$ が存在する。状態-出力適合性から

$$\rho_{t'}(\phi_{tt'}(c, x_{tt'}), x_{t'}) = \rho_t(c, x_{tt'} \cdot x_{t'})|T_{t'}$$

になる。 $x_{tt'} = 0_{tt'}$, $x_{t'} = 0_{t'}$ とすれば

$$\rho_{1t'}(\phi_{1tt'}(c)) = \rho_{1t}(c)|T_{t'}$$

すなわち、 $\rho_{1t}(c)|T_{t'} \in \rho_{1t'}(C)$ になるので、

$$\phi_{1tt'}(c) = \rho_{1t'}^{-1}(\rho_{1t}(c)|T_{t'})$$

になる。また $c = 0$, $x_{t'} = 0_{t'}$ とすれば

$$\rho_{1t'}(\phi_{2tt'}(x_{tt'})) = \rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0_{t'})|T_{t'}$$

すなわち、

$$\phi_{2tt'}(x_{tt'}) = \rho_{2t'}^{-1}(\rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0_{t'})|T_{t'})$$

である。 $\bar{\phi}$ が時間に対し不変になることは直接計算から示せる。 $\tau = t' - t$ とすれば、 $\bar{\rho}$ 時間に対し不変であるから

$$\begin{aligned}\rho_{1t'}(\phi_{1tt'}(c)) &= \rho_{1t}(c)|T_{t'} \rightarrow s^{t'}(\rho_{10}(\phi_{1tt'}(c))) \\ &= s^t(\rho_{10}(c))|T_{t'} \rightarrow s^t(\rho_{10}(\phi_{1tt'}(c))) \\ &= s^t(s^t(\rho_{10}(c))|T_{t'}) \rightarrow \rho_{1\tau}(\phi_{1tt'}(c)) = \rho_{10}(c)|T_{\tau} \\ &\rightarrow \phi_{1tt'}(c) = \phi_{10\tau}(c)\end{aligned}$$

になる。また同じく

$$\begin{aligned}\rho_{1t'}(\phi_{2tt'}(x_{tt'})) &= \rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0_{t'})|T_{t'} \\ \rightarrow s^{t'}(\rho_{10}(\phi_{2tt'}(x_{tt'}))) &= s^t(\rho_{20}(s^{-t}(x_{tt'}) \cdot 0_{\tau}))|T_{t'} \\ \rightarrow s^t(\rho_{10}(\phi_{2tt'}(x_{tt'}))) &= s^{-t}(s^t(\rho_{20}(s^{-t}(x_{tt'}) \cdot 0_{\tau}))|T_{t'}) \\ \rightarrow \rho_{1\tau}(\phi_{2tt'}(x_{tt'})) &= \rho_{20}(s^{-t}(x_{tt'}) \cdot 0_{\tau})|T_{\tau} \\ \rightarrow \phi_{2tt'}(x_{tt'}) &= \phi_{20\tau}(s^{-t}(x_{tt'}))\end{aligned}$$

になる。すなわち $\langle \bar{\rho}, \bar{\phi} \rangle$ は時間に対し不変の線形ダイナミカルシステムである。(証明終)

【定理 2 の証明】 関係 $E \subset C \times C$ を

$$(c, c') \in E \Leftrightarrow \rho_{10}(c) = \rho_{10}(c')$$

とする。 E は合同関係 (congruence) になることが簡単に示せるから、 C/E は通常の方法で線形代数になる。 $\bar{\rho}$ は時間に対し不変であるから、 $\hat{\rho}_{1t}: C/E \rightarrow Y$ を

$$\hat{\rho}_{1t}([c]) = \rho_{1t}(c)$$

と定義できる。 $[c]$ は c の等値類 (equivalence class) である。 $\hat{\rho}_t = \langle \hat{\rho}_{1t}, \hat{\rho}_{2t} \rangle$ とすれば、定理 1 を使い、 $\bar{\rho} = \{\hat{\rho}_t | t \in T\}$ が時間に対し不変の実現可能な入力-出力応答になることが確かめられる。もち論これはもとの入力-出力応答 $\bar{\rho}$ と同じシステムを表わしている。 $\bar{\rho}$ は既約であるから、予備定理により、 $\bar{\rho}$ は時間に対し不変の線形ダイナミカルシステム $\langle \bar{\rho}, \bar{\phi} \rangle$ によって実

現できる。 $I: C/E \rightarrow C$ を $I([c]) \in [c]$ を満足する線形関数とする。線形代数の基本的性質から I はいつでも存在する。 $\phi_{tt'}: C \times X_{tt'} \rightarrow C$ を次のように定義する。

$$\phi_{tt'}(c, x_{tt'}) = I(\hat{\phi}_{tt'}([c], x_{tt'}))$$

この $\bar{\phi} = \{\phi_{tt'} | t, t' \in T\}$ に対し $\langle \bar{\rho}, \bar{\phi} \rangle$ は線形のダイナミカルシステムになる。実際

$$\begin{aligned}\rho_{t'}(\phi_{tt'}(c, x_{tt'}), x_{t'}) &= \rho_{t'}(I(\hat{\phi}_{tt'}([c], x_{tt'})), x_{t'}) \\ &= \hat{\rho}_{t'}(I(\hat{\phi}_{tt'}([c], x_{tt'})), x_{t'}) \\ &= \hat{\rho}_{t'}(\hat{\phi}_{tt'}([c], x_{tt'}), x_{t'}) \\ &= \hat{\rho}_t([c], x_{tt'} \cdot x_{t'})|T_{t'} \\ &= \rho_t(c, x_{tt'} \cdot x_{t'})|T_{t'}\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}\phi_{t't''}(\phi_{tt'}(c, x_{tt'}), x_{t't''}) &= I(\hat{\phi}_{t't''}(I(\hat{\phi}_{tt'}([c], x_{tt'})), x_{t't''})) \\ &= I(\hat{\phi}_{t't''}(\hat{\phi}_{tt'}([c], x_{tt'}), x_{t't''})) \\ &= I(\hat{\phi}_{tt''}([c], x_{tt'} \cdot x_{t't''})) \\ &= \phi_{tt''}(c, x_{tt'} \cdot x_{t't''})\end{aligned}$$

また $\bar{\phi}$ が時間に対し不変なので、 $\bar{\phi}$ は時間に対し不変になる。(証明終)

古典的実現性理論は、この論文の概念を使うと、重み関数によって入力応答関数 ρ_{20} を与え、それが (1)、(2) 式の微分方程式のシステムになる条件を求める問題である。実現性理論のこのような定式化にならない、任意の線形関数族 $\bar{\rho}_2 = \{\rho_{2t} | \rho_{2t}: X_t \rightarrow Y_t \& t \in T\}$ が線形ダイナミカルシステムの入力応答関数族になるとき、 $\bar{\rho}_2$ が実現可能であるとよぶことにする。すなわち、 $\bar{\rho}_2$ が実現可能になることをいうためには、線形代数の族 $\bar{C} = \{C_t | t \in T\}$ と線形関数族 $\bar{\rho}_1 = \{\rho_{1t} | \rho_{1t}: C_t \rightarrow Y_t \& t \in T\}$ が、 $\bar{\rho} = \{\rho_t | \rho_t = \langle \rho_{1t}, \rho_{2t} \rangle \& t \in T\}$ が実現可能な線形関数族になることを示せばよい。定理 1 と定理 2 からつぎの基本的結果がえられる。

【定理 3】 定常系の入力集合の上に定義された任意の線形関数族 $\bar{\rho}_2 = \{\rho_{2t} | \rho_{2t}: X_t \rightarrow Y_t \& t \in T\}$ が、時間に対し不変の強い意味で因果的な線形ダイナミカルシステムによって実現されるための必要十分条件は

(i) $\bar{\rho}_2$ が入力応答適合性を満足する。すなわち

$$(\forall x_t)(\rho_{2t}(x_t) = \rho_{20}(0^t \cdot x_t)|T_t)$$

(ii) $\bar{\rho}_2$ が強い意味の因果性の条件を満足する。

すなわち

$$(\forall x_t)(\rho_{20}(0^t \cdot x_t)|\bar{T}^t = 0|\bar{T}^t)$$

(iii) $\bar{\rho}_2$ が時間に対し不変である。すなわち

$$(\forall t)(\forall x_t)(\rho_{2t}(x_t) = s^t(\rho_{20}(s^{-t}(x_t)))$$

また実現されるダイナミカルシステムの状態空間 C は

$$C = \{s^{-t}(\rho_{20}(x^t \cdot 0_t)|T_t) | x^t \in X^t \& t \in T\}$$

かつ $\bar{\rho}_2$ に対応する状態応答関数族 $\rho_{2t}: C \rightarrow Y_t$ は

$$\rho_{2t}(c) = s^t(c)$$

である。

ダイナミカルシステム $\langle \bar{\rho}, \bar{\phi} \rangle$ が強い意味で因果であるというのは $\bar{\rho}$ が条件 (C6) を満足していることである。

【証明】 必要性は自明である。十分性のみを考える。初めに定理の中に与えられた C が線形代数になることを示す。 $c = s^t(\rho_{20}(x^t \cdot 0_t) | T_t) \in C$ と $\alpha \in F$ を任意とすれば

$$\alpha c = s^{-t}(\rho_{20}(\alpha x^t \cdot 0_t) | T_t) \in C$$

になる。 $c = s^{-t}(\rho_{20}(x^t \cdot 0_t) | T_t)$ と $\hat{c} = s^{-\hat{t}}(\rho_{20}(\hat{x}^{\hat{t}} \cdot 0_{\hat{t}}) | T_{\hat{t}})$ を任意とする。 $t \geq \hat{t}$ として、 $t = \hat{t} + \tau$ とする。 ($\tau \geq 0$ である)。このとき条件 (i) と (ii) から

$$\begin{aligned} \rho_{20}(0^\tau \cdot s^\tau(\hat{x}^{\hat{t}}) \cdot 0_t) | T_\tau &= \rho_{2\tau}(s^\tau(\hat{x}^{\hat{t}}) \cdot 0_t) \\ &= s^\tau(\rho_{20}(\hat{x}^{\hat{t}}) \cdot 0_{\hat{t}}) \end{aligned}$$

になる。ゆえに

$$\begin{aligned} \rho_{20}(\hat{x}^{\hat{t}} \cdot 0_{\hat{t}}) | T_{\hat{t}} &= s^{-\tau}(\rho_{20}(0^\tau \cdot s^\tau(\hat{x}^{\hat{t}}) \cdot 0_t) | T_\tau) | T_{\hat{t}} \\ &= s^{-\tau}(\rho_{20}(0^\tau \cdot s^\tau(\hat{x}^{\hat{t}}) \cdot 0_t) | T_\tau) | T_{\hat{t}} \\ &= s^{-\tau}(\rho_{20}(0^\tau \cdot s^\tau(\hat{x}^{\hat{t}}) \cdot 0_t) | T_t) \end{aligned}$$

になる。すなわち

$$\begin{aligned} c + \hat{c} &= s^{-t}(\rho_{20}(x^t \cdot 0_t) | T_t) + s^{-\hat{t}}(\rho_{20}(0^\tau \cdot s^\tau(\hat{x}^{\hat{t}}) \cdot 0_t) | T_t) \\ &= s^{-t}(\rho_{20}((x^t + 0^\tau \cdot s^\tau(\hat{x}^{\hat{t}})) \cdot 0_t) | T_t) \in C \end{aligned}$$

になり、前の結果と合わせて、 C が線形代数になることがいえる。 $\rho_{1t}: C \rightarrow Y_t$ を定理にのべたように、

$$\rho_{1t}(c) = s^t(c)$$

とする。 $\bar{\rho} = \{\langle \rho_{1t}, \rho_{2t} \rangle | t \in T\}$ が実現可能になることを示すには、状態応答適合性が成立することを示せばよい。まず $c = s^{-\hat{t}}(\rho_{20}(x^{\hat{t}} \cdot 0_{\hat{t}}) | T_{\hat{t}}) \in C$ と x^t を任意とする。 $t + \hat{t} = \tau$ とすれば、 C の線形性を示したときと同じく $\rho_{20}(x^t \cdot 0_t) = s^{-\hat{t}}(\rho_{20}(0^{\hat{t}} \cdot s^{\hat{t}}(x^t) \cdot 0_{\hat{t}}) | T_{\hat{t}})$ になる。ゆえに

$$\begin{aligned} (\rho_{10}(c) + \rho_{20}(x^t \cdot 0_t)) | T_t &= (c + \rho_{20}(x^t \cdot 0_t)) | T_t \\ &= (s^{-\hat{t}}(\rho_{20}(x^{\hat{t}} \cdot 0_{\hat{t}}) | T_{\hat{t}}) + s^{-\hat{t}}(\rho_{20}(0^{\hat{t}} \cdot s^{\hat{t}}(x^t) \cdot 0_{\hat{t}}) | T_{\hat{t}})) | T_t \\ &= s^{-\hat{t}}(\rho_{20}(x^{\hat{t}} \cdot s^{\hat{t}}(x^t) \cdot 0_{\hat{t}}) | T_{\hat{t}}) | T_t \\ &= s^{-\hat{t}}(\rho_{20}(x^{\hat{t}} \cdot s^{\hat{t}}(x^t) \cdot 0_{\hat{t}}) | T_\tau) \end{aligned}$$

すなわち $c' = s^{-\tau}(\rho_{20}(x^{\hat{t}} \cdot s^{\hat{t}}(x^t) \cdot 0_{\hat{t}}) | T_\tau) \in C$ とすれば、

$$\rho_{1t}(c') = \rho_0(c, x^t \cdot 0_t) | T_t$$

になる。つぎに $c' = s^{-\hat{t}}(\rho_{20}(x^{\hat{t}} \cdot 0_{\hat{t}}) | T_{\hat{t}}) \in C$ を任意の要素とする。 $\hat{t} + t = \tau$ とすれば

$$\rho_{20}(\hat{x}^{\hat{t}} \cdot 0_{\hat{t}}) = s^{-t}(\rho_{20}(0^t \cdot s^t(\hat{x}^{\hat{t}}) \cdot 0_\tau) | T_\tau) | T_{\hat{t}}$$

になる。 $0^t \cdot s^t(\hat{x}^{\hat{t}}) = \tilde{x}^\tau \in X^\tau$ とすれば

$$\begin{aligned} s^\tau(c') &= s^t(\rho_{20}(\hat{x}^{\hat{t}} \cdot 0_{\hat{t}}) | T_{\hat{t}}) \\ &= s^t(s^{-t}(\rho_{20}(\tilde{x}^\tau \cdot 0_\tau) | T_\tau) | T_{\hat{t}}) \\ &= \rho_{20}(\tilde{x}^\tau \cdot 0_\tau) | T_\tau \\ &= (\rho_{20}(\hat{x}^{\hat{t}} \cdot 0_{\hat{t}}) + \rho_{20}(0^{\hat{t}} \cdot \tilde{x}^{\hat{t}} \cdot 0_\tau)) | T_\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\rho_{20}(\hat{x}^{\hat{t}} \cdot 0_{\hat{t}}) | T_{\hat{t}} + \rho_{20}(0^{\hat{t}} \cdot \tilde{x}^{\hat{t}} \cdot 0_\tau) | T_{\hat{t}}) | T_\tau \\ &= (s^{\hat{t}}(c) + s^{\hat{t}}(\rho_{20}(s^{-\hat{t}}(\tilde{x}^{\hat{t}} \cdot 0_\tau) \cdot 0_t)) | T_\tau \\ &= s^{\hat{t}}(c) | T_t + \rho_{20}(s^{-\hat{t}}(\tilde{x}^{\hat{t}} \cdot 0_\tau) \cdot 0_t) | T_t \end{aligned}$$

ただし $c = s^{-\hat{t}}(\rho_{20}(\hat{x}^{\hat{t}} \cdot 0_{\hat{t}}) | T_{\hat{t}}) \in C$ である。ゆえに

$$\rho_{1t}(c') = \rho_0(c, s^{-\hat{t}}(\tilde{x}^{\hat{t}} \cdot 0_\tau) \cdot 0_t) | T_t$$

である。前の結果と合わせて、 $\bar{\rho}$ は実現可能な時間に対し不変の線形関数族になり、定理より所要の結果をうる。(証明終)

任意に線形関数 $\rho_{20}: X \rightarrow Y$ が与えられたとき、 $\rho_{20}: X_t \rightarrow Y_t$ を

$$\rho_{20}(x_t) = s^t(\rho_{20}(s^{-t}(x_t)))$$

とすれば、 $\bar{\rho}_2 = \{\rho_{20} | t \in T\}$ は時間に対し不変の線形関数族になる。ただし X は定常系の入力集合である。定理 3 によると、この $\bar{\rho}_2$ が時間に対し不変の強い意味で因果の線形ダイナミカルシステムによって実現されるための必要十分条件は

$$(\forall x_t)(s^t(\rho_{20}(s^{-t}(x_t))) = \rho_{20}(0^t \cdot x_t) | T_t) \quad (\text{入力応答適合性})$$

$$(\forall x_t)(\rho_{20}(0^t \cdot x_t) | \bar{T}^t = 0 | \bar{T}^t) \quad (\text{因果性})$$

になる。新しい転位演算子 $\hat{s}^t: X \rightarrow X$, $\hat{s}^t: Y \rightarrow Y$ を

$$\hat{s}^t(x) = 0^t \cdot s^t(x); \quad \hat{s}^t(y) = 0^t \cdot s^t(y)$$

と定義すれば、上記の 2 つの条件は

$$(\forall x_t)(\hat{s}^t(\rho_{20}(x_t)) = \rho_{20}(\hat{s}^t(x_t)))$$

と等価になる。すなわち ρ_{20} は転位演算子 $\hat{s}^t$ に対し準同写像 (homomorphism) である。

【系 1】 線形関数 $\rho_{20}: X \rightarrow Y$ が時間上不変の強い意味で因果的な線形ダイナミカルシステムで表現できるための必要十分条件は、 ρ_{20} が転位演算子 $\hat{s}^t$ に対し準同形写像になる、すなわち Fig. 1 のダイアグラムが各 $t \in T$ に対し可換になることである。

Fig. 1 Commutative diagram for ρ_{20}

上記の系は、入力応答適合性、強い意味の因果性、時間不変性を統合したものであり、あくまでもシステムの基本的性質はこのつである。

定理 3 が示すように、 ρ_{20} が上記の可換ダイアグラムを満足すれば、

$$C = \{s^{-t}(\rho_{20}(x^t \cdot 0_t) | T_t) | x^t \in X^t \& t \in T\}$$

は線形代数になり、 ρ_{20} に対応する状態応答関数 $\rho_{1t}: C \rightarrow Y_t$ は $\rho_{1t}(c) = s^t(c)$ で与えられる。ゆえに線形関

数 $F(t): C \rightarrow B$ と $G(t): X^t \rightarrow C$ を

$$F(t)(c) = \rho_{10}(c)(t) = c(t) \quad (3)$$

$$G(t)(x^t) = s^{-t}(\rho_{20}(x^t \cdot 0_t) | T_t) \quad (4)$$

とすれば, $\tau \geq t$ に対して

$$\begin{aligned} \rho_{20}(x^t \cdot 0_t)(\tau) &= (\rho_{20}(x^t \cdot 0_t) | T_t)(\tau) \\ &= s^{-t}(\rho_{20}(x^t \cdot 0_t) | T_t)(\tau - t) \\ &= F(\tau - t)[G(t)(x^t)] \end{aligned}$$

になる. すなわち, 入力応答関数は 2 つの線形関数 F と G に分解されている. これが古典の実現性理論の一般システムにおける表現である¹⁾. G は入力応答適合性から, $\tau = t' - t$ とすると

$$\begin{aligned} G(t')(0^t \cdot x_{tt'}) &= s^{-t'}(\rho_{20}(0^t \cdot x_{tt'} \cdot 0_{t'}) | T_{t'}) \\ &= s^{-t'}(\rho_{20}(x_{tt'} \cdot 0_{t'}) | T_{t'}) \\ &= s^{-t'}(s^t(\rho_{20}(s^{-t}(x_{tt'}) \cdot 0_t) | T_t) | T_{t'}) \\ &= s^{-\tau}(\rho_{20}(s^{-t}(x_{tt'}) \cdot 0_t) | T_\tau) \\ &= G(\tau)(s^{-t}(x_{tt'})) \end{aligned}$$

になる.

【系 2】 線形関数 $\rho_{20}: X \rightarrow Y$ が時間に対し不変の強い意味で因果的な線形ダイナミカルシステムの初期入力応答関数になるための必要十分条件はつぎの条件を満たすことである.

(i) ρ_{20} が強い意味の因果性の条件

$$(\forall x_t)(\rho_{20}(0^t \cdot x_t) | \bar{T}^t = 0 | \bar{T}^t)$$

を満たす.

(ii) 体 F の上に定義された線形代数 C と 2 つの線形関数 $F(t): C \rightarrow B$, $G(t): X^t \rightarrow C$ が存在し

$$\rho_{20}(x^t \cdot 0_t)(\tau) = F(\tau - t)[G(t)x^t]$$

と表現できる. ただし $G(t)$ は次の性質をもつ.

$$G(t')(0^t \cdot x_{tt'}) = G(t' - t)(s^{-t}(x_{tt'}))$$

また F と G は (3) 式と (4) 式で与えられる.

3. 定係数線形常微分方程式のシステムの特徴づけ

前節の定常系の実現性理論をもとにして, 定係数線形微分方程式のシステム (以下微分方程式のシステムとよぶ) の特徴づけを考える.

この節では微分方程式のシステムを考えるのであるから, T, A, B, X をつぎのように仮定する.

【仮定 1】 集合 T, A, B, X, F をつぎのように定める.

$T = \mathbb{R}$ (実数全体の集合); $A = E^m$; $B = E^r$; $X = L_2[0, \infty)$; $F = \mathbb{R}$

いま考えている微分方程式のシステムは, 少なくとも時間に対し不変の強い意味で因果的な線形ダイナミカルシステムであることは明白である. そこで, 微分方程式のシステムを表わす初期入力応答関数 $\rho_{20}: X$

$\rightarrow Y$ は, 定理 3 からつぎの仮定をおく.

【仮定 2】 ρ_{20} は入力応答適合性, 強い意味の因果性, 時間不変性を満足する.

ρ_{20} が実現可能であるとして, ρ_{20} に対応する $\hat{\rho}_1 = \{\rho_{1t} | t \in T\}$ は 1 つにかぎらない. すなわち実現されたダイナミカルシステムの状態空間は一意的にはきまらず, 定理 3 の C はそのうちの 1 つである. しかし, 定理 3 の C は可能な状態空間の中で, もっとも“小さい”ものであることが示せる. いま $\hat{\rho}_1 = \{\hat{\rho}_{1t} | \hat{\rho}_{1t}: \hat{C} \rightarrow Y_t \& t \in T\}$ が, $\hat{\rho}_2$ に対応する時間に対し不変の状態応答関数族であったとする. ただし $\hat{\rho}_2$ は, 時間に対し不変になるように ρ_{20} から作られた入力応答関数族である. $\hat{\rho} = \{\langle \hat{\rho}_{1t}, \hat{\rho}_{2t} \rangle | t \in T\}$ が実現可能であるから, 状態応答適合性が成立し

$$(\forall x^t)(\exists \hat{c})(\hat{c} \in \hat{C} \& \rho_{20}(x^t \cdot 0_t) | T_t = \hat{\rho}_{1t}(\hat{c})) \quad (5)$$

になる. そこで集合論的關係 $\varphi \subset C \times \hat{C}$ を

$$\begin{aligned} (c, \hat{c}) \in \varphi &\leftrightarrow (\exists x^t)(c = s^{-t}(\rho_{20}(x^t \cdot 0_t) | T_t) \& \hat{\rho}_{1t}(\hat{c}) \\ &= \rho_{20}(x^t \cdot 0_t) | T_t) \end{aligned}$$

とすれば, (5) 式から $\mathcal{D}(\varphi) = C$ になる. しかも $\varphi(c) = \{\hat{c} | (c, \hat{c}) \in \varphi\}$ とすれば,

$$c \ni c' \rightarrow \varphi(c) \cap \varphi(c') = \phi \quad (\text{空集合})$$

になる. 実際, $c = s^{-t}(\rho_{20}(x^t \cdot 0_t) | T_t) \ni c' = s^{-\hat{t}}(\rho_{20}(\hat{x}^{\hat{t}} \cdot 0_{\hat{t}}) | T_{\hat{t}})$ に対し $\hat{c} \in \varphi(c) \cap \varphi(c')$ とすれば, 定義から $\rho_{20}(x^t \cdot 0_t) | T_t = \hat{\rho}_{1t}(\hat{c})$ かつ $\rho_{20}(\hat{x}^{\hat{t}} \cdot 0_{\hat{t}}) | T_{\hat{t}} = \hat{\rho}_{1\hat{t}}(\hat{c})$ になる. $\hat{\rho}_{1t}$ は時間に対し不変であるから, $s^{-t}(\hat{\rho}_{1t}(\hat{c})) = \hat{\rho}_{10}(\hat{c}) = s^{-\hat{t}}(\hat{\rho}_{1\hat{t}}(\hat{c}))$ になるので, $c = s^{-t}(\rho_{20}(x^t \cdot 0_t) | T_t) = s^{-\hat{t}}(\rho_{20}(\hat{x}^{\hat{t}} \cdot 0_{\hat{t}}) | T_{\hat{t}}) = c'$ になり, 仮定に反する. 前の結果と合わせて, C から $\hat{C} \rightarrow 1$ 対 1 写像が存在することがいえる.

ゆえに C の基数 (cardinality) は $\hat{C}$ より小さくなり, $\hat{C}$ が有限次元の線形代数ならば, C はかならず有限次元である. 微分方程式のシステムの状態空間は有限次元であるから

【仮定 3】 線形代数 $C = \{s^{-t}(\rho_{20}(x^t \cdot 0_t) | T_t) | x^t \in X^t \& t \in T\}$ は n 次元の線形空間である.

C の基底 (base) を $\{c_1, \dots, c_n\}$ とし, $\varphi: C \rightarrow E^n$ を

$$\varphi(c) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leftrightarrow c = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i$$

ときめれば, φ は同形写像になる. 以下 φ はこの意味に使う.

以上は微分方程式のシステムの代数的性質である. 微分方程式は解析的なものであるから, “連続性” の仮定を導入しなければならない. そこで

【仮定 4】 (i) 各 $x \in X$ に対し $\rho_{20}(x): T \rightarrow B$ は解析関数である (無限回微分可能).

(ii) 各 $t \in T$ に対し $\rho_{20}(-)(t): X \rightarrow B$ は連続

(iii) 各 $t \in T$ に対し $\varphi^{s^{-t}}(\rho_{20}(-\cdot \cdot 0_t) | T_t) : X^t \rightarrow E^n$ が連続

ただし仮定から $T=R$, $B=E^r$, $X=L_2[0, \infty)$ なので, 各集合のトポロジーは well-defined である.

以上の 4 つの仮定は, 明らかに微分方程式のシステムの特徴づけに必要な条件である. この節の目的はこれらの仮定が十分になっていることを示すことである.

$\rho_{20}(-)(t) : X \rightarrow E^r$ が連続, かつ $X=L_2[0, \infty)$ であるから, ヒルベルト空間のはん関数の定理により, ある $w(t) \in X$ に対し

$$\rho_{20}(x)(t) = \int_0^\infty w(t, \tau) x(\tau) d\tau$$

になる. ただし $w(t, \tau) = w(t)(\tau) : E^m \rightarrow E^r$ の行列である. 仮定 2 より, ρ_{20} は入力応答適合性および時間不変性を満たすから, $\rho_{20}(0^t \cdot s^t(x)) | T_t = s^t(\rho_{20}(x))$ になる. ゆえに $\tau \geq t$ に対し

$$\begin{aligned} [\rho_{20}(0^t \cdot s^t(x)) | T_t](\tau) &= \rho_{20}(0^t \cdot s^t(x))(\tau) \\ &= \int_0^\infty w(\tau, \sigma) (0^t \cdot s^t(x))(\sigma) d\sigma \\ &= \int_t^\infty w(\tau, \sigma) [s^t(x)](\sigma) d\sigma \\ &= \int_t^\infty w(\tau, \sigma) x(\sigma - t) d\sigma \\ &= \int_0^\infty w(\tau, \sigma + t) x(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

また, $s^t(\rho_{20}(x))(\tau) = \rho_{20}(x)(\tau - t)$

$$= \int_0^\infty w(\tau - t, \sigma) x(\sigma) d\sigma$$

になるので,

$$\int_0^\infty w(\tau, \sigma + t) x(\sigma) d\sigma = \int_0^\infty w(\tau - t, \sigma) x(\sigma) d\sigma$$

になる. 上式はすべての $x \in X$ について成立するから $w(\tau, \sigma + t) = w(\tau - t, \sigma)$ ($\tau - t \geq \sigma \geq 0$) になる. そこで $\sigma = 0$ とおけば,

$$w(\tau, t) = w(\tau - t, 0)$$

をうる. $w(\tau - t, 0) \equiv w_0(\tau - t)$ とおけば

$$\rho_{20}(x)(t) = \int_0^\infty w_0(t - \sigma) x(\sigma) d\sigma$$

になる. いっぽう, 仮定から ρ_{20} は強い意味で因果性の条件を満足するから, すべての $x \in X$ に対し

$$\int_t^\infty w_0(t - \tau) x(\tau) d\tau = 0$$

になる. すなわち

$$t < 0 \rightarrow w_0(t) = 0$$

である. これが通常重み関数に与えられている因果性の条件である. 結果として,

$$\rho_{20}(x)(t) = \int_0^t w_0(t - \tau) x(\tau) d\tau \quad (6)$$

と表現できる. 定理 3 の系 2 を使い, 行列 $F(t) : E^n$

$\rightarrow E^r = B$ を

$$F(t)(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i(t)$$

とする. また $\varphi^{s^{-t}}(\rho_{20}(-\cdot \cdot 0_t) | T_t) : X^t \rightarrow E^n$ が連続であるから, ある行列 $G(t, \sigma) : E^m \rightarrow E^n$ によって

$$\varphi^{s^{-t}}(\rho_{20}(x^t \cdot 0_t) | T_t) = \int_0^t G(t, \sigma) x^t(\sigma) d\sigma$$

になる. 系 2 に述べた G の性質 (時間不変性) から, w のときと同じく

$$G(t, \sigma) = G(t - \sigma, 0) \equiv G_0(t - \sigma)$$

がえられる. 強い意味の因果性から, $t < 0$ に対し, $G(t) = 0$ になる. G_1 を使うと

$$\rho_{20}(x^t \cdot 0_t)(\tau) = F(\tau - t) \int_0^t G_0(t - \sigma) x^t(\sigma) d\sigma$$

をうる. いっぽう (6) 式から

$$\rho_{20}(x^t \cdot 0_t)(\tau) = \int_0^t w_0(\tau - \sigma) x^t(\sigma) d\sigma$$

になるので, $\tau - t = \tau'$, $t - \sigma = -\sigma'$ とおくと

$$w(\tau', \sigma') = F(\tau') \cdot G_0(-\sigma')$$

になる. c_i が解析関数であるから, $F(t)$ は連続な微係数をもつので, 古典的実現性理論により, ρ_{20} は (1) 式, (2) 式の微分方程式のシステムに表現できる.

4. 結 論

この論文では, 一般システム理論のわくの中で定常線形系の実現性理論を考察し, それをよりどころにして, 定係数形常微分方程式のシステムが „どのような種類の一般システムであるか” を論じた. 結果は 3. の 4 つの仮定に述べたものである. このような考察の結果から, 微分方程式のシステムの性質を浮き出させることができる. それらについては紙数の都合上後報の予定である.

参 考 文 献

- 1) 高原: システム一般理論, システム理論 (野本明, 寺野寿郎編), 日刊工業新聞 (1972)
- 2) M. D. Mesarovic: Mathematical Theory of General Systems, in *Advances in Mathematical Systems Theory*, Edited by P. C. Hammer, Pennsylvania State University Press (1969)
- 3) G. J., ed. Klier: Trends in General Systems Theory, John-Wiley (1972)
- 4) A. W. Wymore: A Mathematical Theory of Systems Engineering, John-Wiley (1967)
- 5) M. D. Mesarovic & Takahara: Foundations for Mathematical Systems Theory (in Preparation)
- 6) M. D. Mesarovic, D. Macko & Takahara: Theory of Hierarchical, Multilevel Systems, Academic Press (1970)
- 7) R. E. Kalman, P. L. Falb & M. A. Arbib: Topics in Mathematical System Theory, McGraw Hill (1969)
- 8) 高原: 一般システムの実現性理論, 計測自動制御学会論文集, 8-4, 466/472 (1972)
- 9) Y. Takahara & M. D. Mesarovic: Abstract Realization Theory of Linear Systems, Systems Research Center Report, Case Western Reserve University, Cleveland, Ohio (1971)
- 10) S. MaLane & G. Birkhoff: Algebra, Macmillan, New York (1967)