不確実な観測機構を有する線形連続時間系の状態推定

藤 重 悟・片 山 徹・榎 木 義 一

京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

(昭和48年2月28日 受付)

State Estimation for Linear Continuous-Time Systems with Interrupted Observations

Satoru FUJISHIGE, Tohru KATAYAMA and Yoshikazu SAWARAGI

(Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto)

(Received February 28, 1973)

A minimum variance estimator is derived for linear continuous-time systems with an interrupted observation mechanism which is characterized in terms of the jump Markov process taking on the values of 0 or 1. The approach adopted is that we express the jump Markov process in terms of the initial value and jump times instead of the instantaneous values and then apply Lainiotis' formula regarding the initial value and jump times as unknown system parameters. The resultant optimal algorithm is infinite dimensional, so that feasible approximate estimator algorithms are presented for practical implementation.

1. ま え が き

最近, Kalman-Bucy フィルタ^{1,2)}の拡張として, 不確実な観測機構を有する線形系の状態推定問題³⁻⁹⁾および, 推定と検定の結合^{9,10)}などに関して多くの研究がなされてきている. しかし, これらの研究はほとんど離散時間系に関するもので, 連続時間系についてはシステムに未知定数パラメータを含む場合のみを考察しており^{4,9,10)}, ジャンプ・マルコフ過程¹¹⁾のような時変未知パラメータを含む場合の推定問題は, まだ研究されていない.

著者らは, すでに不確実な観測機構を有する線形離散時間系の状態推定問題について報告した⁸⁾が, 本論文では, 連続時間系に対する同様の問題を考察する. システムの状態は, 通常の拡散過程によって記述されているが, 不確実な観測は0または1の値をとるジャンプ・マルコフ過程によって特徴づけられているので, 観測値はジャンプ・マルコフ過程の成分を含んでいる. このため, Jaffer-Gupta による離散時間系の最適推定アルゴリズム⁶⁾において, サンプル間隔を0に近づけても, 連続時間系に対する最適推定アルゴリズムを得ることは期待できない. 本論文では, ジャンプ・マル

コフ過程をその初期値とジャンプ時刻によって表現し, それらをシステムの未知パラメータと考え, まず Lainiotis の公式⁹⁾を適用し, ついでその結果にある種の極限操作を施すことによって, 最適推定アルゴリズムを得ている.

本論文では, 2節において, 不確実な観測機構を有する線形連続時間系の状態推定問題を正確に定式化し, 3節において最小分散推定アルゴリズムが導出される. 得られた最適推定アルゴリズムは無限次元となっているので, 4節において, 実行可能な近似最適推定アルゴリズムが提案される.

2. 問題の記述

確率空間 (Ω, β, P) が与えられていると仮定する. ただし, Ω は根元事象 ω からなるある集合, β は Ω の部分集合からなる σ -集合体, そして, P は β の上に定義された確率測度である. 以下では, すべての確率変数は, この確率空間上に定義されているとする. ここで対象とするシステムは, Ito 型確率微分方程式

$$dx(t, \omega) = F(t)x(t, \omega)dt + dw(t, \omega), t \geq 0 \quad (2.1)$$

で与えられ, 観測は

$$dy(t, \omega) = \gamma(t, \omega)H(t)x(t, \omega)dt +$$

$$+dv(t, \omega), t \geq 0 \quad (2.2)$$

で行なわれるとする。ここに、 $x(t, \omega)$ は $n \times 1$ 状態ベクトル、 $y(t, \omega)$ は $p \times 1$ 観測ベクトル、 $F(t)$ は $n \times n$ 状態遷移行列、 $H(t)$ は $p \times n$ 観測行列、そして、 $w(t, \omega)$ 、 $v(t, \omega)$ は、それぞれ

$$\begin{aligned} w(0, \omega) &= 0, \quad E\{w(t, \omega)\} = 0, \\ E\{w(t, \omega)w'(s, \omega)\} &= \int_0^{\min(t, s)} Q(u) du, \quad (2.3) \\ v(0, \omega) &= 0, \quad E\{v(t, \omega)\} = 0, \\ E\{v(t, \omega)v'(s, \omega)\} &= \int_0^{\min(t, s)} R(u) du \end{aligned}$$

を満足する n 次元および p 次元 Wiener 過程である。初期状態 $x(0, \omega)$ は、平均値、 $\hat{x}(0|0) \triangleq E\{x(0, \omega)\}$ 、共分散行列 $\hat{P}(0|0) = C_{00}\{x(0, \omega)\}$ をもつガウス分布にしたがい、 $\gamma(t, \omega)$ は、0 または 1 の値をとる右連続なジャンプ・マルコフ過程¹¹⁾であると仮定する。このジャンプ・マルコフ過程が不確実な観測機構を特徴づけており、以下では、interruption 過程と呼ばれている。また、 $F(t)$ 、 $H(t)$ は t に関して連続であり、確率過程 $\gamma(t, \omega)$ 、 $w(t, \omega)$ 、 $v(t, \omega)$ および $x(0, \omega)$ は相互に独立であると仮定する。以下では、混乱の恐れのない場合、根元事象 ω は省略される。

以下で、必要となるつぎの記号を定義しておく。

$$\begin{aligned} P_{ij}(t, s) &\triangleq P(\gamma(s) = j | \gamma(t) = i) \\ q_{ij}(t) &\triangleq \lim_{s \rightarrow t+0} \frac{P_{ij}(t, s)}{s - t} \quad (2.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_n &\triangleq \text{interruption 過程 } \gamma(t) \text{ が } n \text{ 回目の} \\ &\text{ジャンプをする時刻} \quad (2.5) \end{aligned}$$

ここで、 $s > t \geq 0$ 、 $P(\cdot | \cdot)$ は条件つき確率、 $i, j = 0, 1$ ($i \neq j$)、 n は正整数である。また、定義 (2.4) の極限 $q_{ij}(t)$ の存在、その収束の t に関する一様性、および $q_{ij}(t)$ の t に関する連続性を仮定する¹¹⁾。上の定義 (2.4)、(2.5) から、

$$\begin{aligned} p(\tau_1 | \gamma(0) = i) &= q_{i1}(\tau_1) \exp\left\{-\int_0^{\tau_1} q_{ii}(s) ds\right\} \\ p(\tau_{2m} | \gamma(0) = i, \tau_{2m-1}) &= q_{ii}(\tau_{2m}) \exp\left\{-\int_{\tau_{2m-1}}^{\tau_{2m}} q_{ii}(s) ds\right\} \quad (2.6) \\ p(\tau_{2m+1} | \gamma(0) = i, \tau_{2m}) &= q_{ij}(\tau_{2m+1}) \exp\left\{-\int_{\tau_{2m}}^{\tau_{2m+1}} q_{ij}(s) ds\right\} \end{aligned}$$

ただし、 $p(\cdot | \cdot)$ は条件つき確率密度関数、 m は正整数、 $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ 、 $i, j = 0, 1$ ($i \neq j$) である。

問題は、観測データ $\{y(s), 0 \leq s \leq t\}$ が与えられたときの状態 $x(t)$ の最小分散推定値 $\hat{x}(t|t)$ を見出すことである。一般的に、最小分散推定値 $\hat{x}(t|t)$ は、条件つき期待値

$$\hat{x}(t|t) = E\{x(t) | Y^t\} \quad (2.7)$$

で与えられることが知られている。ただし、 Y^t は観測 $\{y(s), 0 \leq s \leq t\}$ によって生成される最小 σ -集合体である。

条件つき期待値の性質¹²⁾から、

$$\begin{aligned} \hat{x}(t|t) &= E\{E\{x(t) | \gamma(0), \tau_1, \tau_2, \dots, Y^t\} | Y^t\} \\ &= \sum_{i=0}^1 \left[E\{x(t) | \gamma(0) = i, \tau_1 \geq t, Y^t\} \right. \\ &\quad \times P(\tau_1 \geq t | \gamma(0) = i, Y^t) P(\gamma(0) = i | Y^t) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_{\tau_1}^t \dots \int_{\tau_{n-1}}^t E\{x(t) | \gamma(0) = i, \tau^n; \tau_{n+1} \geq t, Y^t\} \\ &\quad \times p(\tau^n | \gamma(0) = i, Y^t) P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0) = i, \tau^n, Y^t) \\ &\quad \times P(\gamma(0) = i | Y^t) d\tau^n \left. \right] \quad (2.8) \end{aligned}$$

ここで、 $\tau^n \triangleq (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ であり、 $E\{x(t) | \gamma(0) = i, \tau_1 \geq t, Y^t\}$ および $E\{x(t) | \gamma(0) = i, \tau^n; \tau_{n+1} \geq t, Y^t\}$ ($n = 1, 2, \dots, 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < t$) は、interruption 過程 $\{\gamma(s), 0 \leq s \leq t\}$ の値が条件として指定されているので、通常の Kalman フィルタを用いて得ることができる。したがって、最小分散推定アルゴリズムの構造を決めるには、

$$P(\tau_1 \geq t | \gamma(0) = i, Y^t) P(\gamma(0) = i | Y^t)$$

および、

$$\begin{aligned} p(\tau^n | \gamma(0) = i, Y^t) P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0) = i, \tau^n, Y^t) \\ \times P(\gamma(0) = i | Y^t) \end{aligned}$$

$$(n = 1, 2, \dots, 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < t)$$

を生み出すアルゴリズムを導けば十分である。

3. 最小分散推定アルゴリズム

時間間隔 $[0, t]$ における interruption 過程 $\{\gamma(s), 0 \leq s \leq t\}$ のジャンプの回数を

$$n_t \triangleq \sup_{\tau_i \in [0, t]} i$$

と定義し、正整数 N に対して、 Ω の可測部分集合

$$B_N^t \triangleq \{\omega | n_t \leq N\} \quad (3.1)$$

を定義する。すなわち、 $\omega \in B_N^t$ であれば、 $\{\gamma(s, \omega), 0 \leq s \leq t\}$ のジャンプの回数は N 以下である。さらに、 B_N^t の部分集合

$$\begin{aligned} B^t(\gamma(0) = i, \tau^n = t^n) &\triangleq \{\omega | \gamma(0, \omega) = i, \tau_1(\omega) \\ &= t_1, \dots, \tau_n(\omega) = t_n; \tau_{n+1}(\omega) \geq t\} \\ n &= 0, 1, \dots, N \quad (3.2) \end{aligned}$$

を定義する。ただし、 $\tau^n \triangleq (\tau_1, \dots, \tau_n)$ 、 $t^n \triangleq (t_1, \dots, t_n)$ 、 $0 < t_1 < \dots < t_n < t$ であり、 $n = 0$ では

$$B^t(\gamma(0) = i, \tau^0 = t^0) \triangleq \{\omega | \gamma(0, \omega) = i, \tau_1(\omega) \geq t\}$$

とする。

ここで、 $\theta \triangleq (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N)$ をつぎのように定義された $N+1$ 次元の確率変数とする。すなわち、

$$\theta(\omega) = (i, t_1, t_2, \dots, t_n, \tau^*, \tau^*, \dots, \tau^*),$$

($\omega \in B^t(\gamma(0)=i, \tau^n=t^n)$ のとき)

$$n=0, 1, \dots, N \quad (3.3)$$

$\theta(\omega) = (0, 0, \dots, 0)$ ($\omega \in \Omega - B_N^t$ のとき)

ただし, τ^* は任意の固定された負の定数, $0 < t_1 < \dots < t_n < t$ であり, $n=0$ では,

$$(i, t_1, t_2, \dots, t_n, \tau^*, \tau^*, \dots, \tau^*)|_{n=0} \triangleq (i, \tau^*, \tau^*, \dots, \tau^*)$$

とする. 以上の定義から, もし $\theta \neq (0, 0, \dots, 0)$ なる θ を 1 つ与えたならば, $\{r(s), 0 \leq s < t\}$ は完全に規定されることになる. したがって, 根元事象 ω を Ω の部分集合 B_N^t に制限して考えるならば, 時間間隔 $[0, t)$ において, $\theta(\omega)$ を式 (2.1), (2.2) で表現される線形系の $N+1$ 次元未知パラメータ・ベクトルとみなすことができる. よって, Lainiotis の公式により,

$$p(\theta|B_N^t, Y^t) = \frac{L(t, \theta)p(\theta|B_N^t)}{\int_{R^{N+1}} L(t, \theta)p(\theta|B_N^t) d\theta} \quad (3.4)$$

が成り立つ. ただし,

$$L(t, \theta) \triangleq \exp \left\{ \int_0^t \gamma(s, \theta) \hat{x}'(s|s, \theta) H'(s) R^{-1}(s) dy(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma(s, \theta) \|H(s) \hat{x}(s|s, \theta)\|_{R^{-1}(s)}^2 ds \right\} \quad (3.5)$$

$$\hat{x}(s|s, \theta) \triangleq E\{x(s)|\theta, Y^s\}$$

であり, $\gamma(s, \theta(\omega))$ は $\theta(\omega)$ に対応する $\gamma(s, \omega)$ として定義され, R^{N+1} は $N+1$ 次元ユークリッド空間である. (3.3) の定義から, B_N^t が与えられたときの θ の条件つき確率密度関数 $p(\theta|B_N^t)$ はつぎのように表わされる.

$$\begin{aligned} p(\theta|B_N^t) &= \sum_{i=0}^1 P(\gamma(0)=i|B_N^t) \delta(\theta_0-i) \{P(\tau_1 \geq t|\gamma(0)=i, B_N^t) \delta(\theta_1-\tau^*) \dots \delta(\theta_N-\tau^*) \\ &+ \sum_{n=1}^{N-1} p(\theta^n|\theta_0=i, B_N^t) P(\tau_{n+1} \geq t|\gamma(0)=i, \tau_n=\theta_n, B_N^t) \delta(\theta_{n+1}-\tau^*) \dots \delta(\theta_N-\tau^*) \\ &+ p(\theta^N|\theta_0=i, B_N^t)\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

ただし, $\delta(\cdot)$ はディラックのデルタ関数, $\theta^n \triangleq (\theta_1, \dots, \theta_n)$ であり, $0 < \theta_1 < \dots < \theta_n < t$ に対して,

$$p(\theta^n|\theta_0=i, B_N^t) = p(\tau^n|\gamma(0)=i, B_N^t) \Big|_{\substack{\tau_1=\theta_1 \\ \vdots \\ \tau_n=\theta_n}} \quad (3.7)$$

その他の θ^n に対しては,

$$p(\theta^n|\theta_0=i, B_N^t) = 0$$

である. また, 事後確率密度関数 $p(\theta|B_N^t, Y^t)$ もつぎのように表わされる.

$$\begin{aligned} p(\theta|B_N^t) &= \sum_{i=0}^1 P(\gamma(0)=i|B_N^t, Y^t) \delta(\theta_0-i) \{P(\tau_1 \geq t|\gamma(0)=i, B_N^t, Y^t) \delta(\theta_1-\tau^*) \dots \delta(\theta_N-\tau^*) \\ &+ \sum_{n=1}^{N-1} p(\theta^n|\theta_0=i, B_N^t, Y^t) P(\tau_{n+1} \geq t|\gamma(0)=i, \tau^n=\theta^n, B_N^t, Y^t) \delta(\theta_{n+1}-\tau^*) \dots \delta(\theta_N-\tau^*) \\ &+ p(\theta^N|\theta_0=i, B_N^t, Y^t)\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

ただし, $0 < \theta_1 < \dots < \theta_n < t$ に対して,

$$p(\theta^n|\theta_0=i, B_N^t, Y^t) = p(\tau^n|\gamma(0)=i, B_N^t, Y^t) \Big|_{\substack{\tau_1=\theta_1 \\ \vdots \\ \tau_n=\theta_n}} \quad (3.9)$$

であり, その他の θ^n に対しては,

$$p(\theta^n|\theta_0=i, B_N^t, Y^t) = 0$$

である. 式 (3.6), (3.8) を式 (3.4) に代入し, その両辺を比較することによって,

$$\begin{aligned} P(\tau_1 \geq t|\gamma(0)=i, B_N^t, Y^t) P(\gamma(0)=i|B_N^t, Y^t) \\ = \frac{L(t, \theta)|_{\theta=(i, \tau^*, \dots, \tau^*)} P(\tau_1 \geq t|\gamma(0)=i, B_N^t) P(\gamma(0)=i|B_N^t)}{L_N(t)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

および,

$$\begin{aligned} p(\theta^n|\theta_0=i, B_N^t, Y^t) P(\tau_{n+1} \geq t|\gamma(0)=i, \tau^n=\theta^n, B_N^t, Y^t) P(\gamma(0)=i|B_N^t, Y^t) \\ = \frac{L(t, \theta)|_{\theta=\theta^n * p(\theta^n|\theta_0=i, B_N^t) P(\tau_{n+1} \geq t|\gamma(0)=i, \tau_n=\theta_n, B_N^t) P(\gamma(0)=i|B_N^t)}}{L_N(t)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

を得る. ただし, $\theta^* \triangleq (i, \theta_1, \dots, \theta_n, \tau^*, \dots, \tau^*)$, $0 < \theta_1 < \dots < \theta_n < t$, $n=1, 2, \dots, N$, $i=0, 1$,

$$L_N(t) \triangleq \int_{R^{N+1}} L(t, \theta) p(\theta|B_N^t) d\theta. \quad (3.12)$$

定義 (3.2), (3.3) から, 以下では, $B^t(\gamma(0), \tau^n)$ の上において, θ_0, θ_i ($i=1, 2, \dots, n$) の代わりに, $\gamma(0), \tau_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) を用いることにする. したがって, 次式を定義しておく.

$$L(t, B^t(\gamma(0)=i, \tau^n)) \triangleq L(t, \theta) |_{\theta=(i, \tau_1, \dots, \tau_n, \tau^*, \dots, \tau^*)} \quad (3.13)$$

ただし, $n=0, 1, \dots, N, i=0, 1$. 式 (3.6), (3.7) および (3.13) によって, 式 (3.12) は

$$\begin{aligned} L_N(t) &= \sum_{i=0}^1 \{ L(t, B^t(\gamma(0)=i, \tau^0)) P(\gamma(0)=i | B_N^t) P(\tau_1 \geq t | \gamma(0)=i, B_N^t) \\ &\quad + \sum_{n=1}^N \int_0^t \dots \int_{\tau_{n-1}}^t L(t, B^t(\gamma(0)=i, \tau^n)) p(\tau^n | \gamma(0)=i, B_N^t) P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0)=i, \tau_n, B_N^t) \\ &\quad \times P(\gamma(0)=i | B_N^t) d\tau^n \} \end{aligned} \quad (3.14)$$

となる. 式 (3.5), (3.10)~(3.14) によって, つぎの補題 1 が成り立つ.

《補題 1》

$$\begin{aligned} &P(\tau_1 \geq t | \gamma(0)=i, B_N^t, Y^t) P(\gamma(0)=i | B_N^t, Y^t) \\ &= \frac{L(t, B^t(\gamma(0)=i, \tau^0)) P(\tau_1 \geq t | \gamma(0)=i, B_N^t) P(\gamma(0)=i | B_N^t)}{L_N(t)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} &p(\tau^n | \gamma(0)=i, B_N^t, Y^t) P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0)=i, \tau^n, B_N^t, Y^t) P(\gamma(0)=i | B_N^t, Y^t) \\ &= \frac{L(t, B^t(\gamma(0)=i, \tau^n)) p(\tau^n | \gamma(0)=i, B_N^t) P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0)=i, \tau_n, B_N^t) P(\gamma(0)=i | B_N^t)}{L_N(t)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

ただし, $0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < t, n=1, 2, \dots, N, i=0, 1$,

$$L(t, B^t(\gamma(0)=i, \tau^0)) = \exp \left\{ \int_0^t i \cdot \hat{x}_i'(s | s, \tau^0) H'(s) R^{-1}(s) dy(s) - \frac{1}{2} \int_0^t i \cdot \| H(s) \hat{x}_i(s | s, \tau^0) \|^2_{R^{-1}(s)} ds \right\} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} L(t, B^t(\gamma(0)=i, \tau^n)) &= \exp \left\{ \int_0^t \gamma_i(s, \tau^n) \hat{x}_i'(s | s, \tau^n) H'(s) R^{-1}(s) dy(s) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma_i(s, \tau^n) \| H(s) \hat{x}_i'(s | s, \tau^n) \|^2_{R^{-1}(s)} ds \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

であり, $L_N(t)$ は式 (3.14) で与えられる. ここで, $\gamma_i(s, \tau^n)$ は $\gamma(0)=i, 0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < t \leq \tau_{n+1}$ である

ときの $\gamma(s)$ ($0 \leq s < t$) を示しており,

$$\hat{x}_i(s | s, \tau^0) \triangleq E\{x(s) | Y^s, \gamma(0)=i, \tau_1 \geq t\} \quad (3.19)$$

$$\hat{x}_i(s | s, \tau^n) \triangleq E\{x(s) | Y^s, \gamma(0)=i, \tau^n; \tau_{n+1} \geq t\}$$

である.]

条件つき確率の性質から,

$$\begin{aligned} &P(\tau_1 \geq t | \gamma(0)=i, B_N^t) P(\gamma(0)=i | B_N^t) \\ &= \frac{P(\tau_1 \geq t | \gamma(0)=i) P(\gamma(0)=i)}{P(B_N^t)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

が成り立つ. 同様に, $n=1, 2, \dots, N$ に対して,

$$\begin{aligned} &p(\tau^n | \gamma(0)=i, B_N^t) P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0)=i, \tau_n, B_N^t) P(\gamma(0)=i | B_N^t) \\ &= \frac{p(\tau^n | \gamma(0)=i) P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0)=i, \tau_n) P(\gamma(0)=i)}{P(B_N^t)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

が成り立つ. 式 (3.20), (3.21) をそれぞれ式 (3.15), (3.16) に代入すれば, つぎの補題 2 を得る.

《補題 2》

$$P(\tau_1 \geq t | \gamma(0)=i, B_N^t, Y^t) P(\gamma(0)=i | B_N^t, Y^t) = \frac{L(t, B^t(\gamma(0)=i, \tau^0)) P(\tau_1 \geq t | \gamma(0)=i) P(\gamma(0)=i)}{L_N'(t)} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} &p(\tau^n | \gamma(0)=i, B_N^t, Y^t) P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0)=i, \tau^n, B_N^t, Y^t) P(\gamma(0)=i | B_N^t, Y^t) \\ &= \frac{L(t, B^t(\gamma(0)=i, \tau^n)) p(\tau^n | \gamma(0)=i) P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0)=i, \tau_n) P(\gamma(0)=i)}{L_N'(t)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

ただし, $0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < t, n=1, 2, \dots, N, i=0, 1$,

$$\begin{aligned} L_N'(t) &\triangleq \sum_{i=0}^1 \left\{ L(t, B^t(\gamma(0)=i, \tau^0)) P(\tau_1 \geq t | \gamma(0)=i) P(\gamma(0)=i) + \sum_{n=1}^N \int_0^t \dots \int_{\tau_{n-1}}^t L(t, B^t(\gamma(0)=i, \tau^n)) \right. \\ &\quad \left. \times p(\tau^n | \gamma(0)=i) P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0)=i, \tau_n) P(\gamma(0)=i) d\tau^n \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

すべての有限な $t(>0)$ に対して,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} B_N^t = \mathcal{Q} - A^t, \quad P(A^t) = 0 \quad (3.25)$$

が成り立つ¹¹⁾ので,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\tau_1 \geq t | \gamma(0) = i, B_N^t, Y^t) P(\gamma(0) = i | B_N^t, Y^t) = P(\tau_1 \geq t | \gamma(0) = i, Y^t) P(\gamma(0) = i | Y^t) \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} p(\tau^n | \gamma(0) = i, B_N^t, Y^t) P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0) = i, \tau^n, B_N^t, Y^t) P(\gamma(0) = i | B_N^t, Y^t) \\ = p(\tau^n | \gamma(0) = i, Y^t) P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0) = i, \tau^n, Y^t) P(\gamma(0) = i | Y^t) \end{aligned} \quad (3.27)$$

が, 確率 1 で成り立つ. さらに, 式 (3.24) からわかるように, $L_N^t(t)$ は正で, N に関して単調増大であり, 式 (3.22), (3.23) の分子はともに N に無関係であることから, 式 (3.22), (3.23) の両辺は $N \rightarrow \infty$ のとき収束する. したがって, 式 (3.22) ~ (3.27) により,

$$\begin{aligned} P(\tau_1 \geq t | \gamma(0) = i, Y^t) P(\gamma(0) = i | Y^t) \\ = \frac{L(t, B^t(\gamma(0) = i, \tau^0)) P(\tau_1 \geq t | \gamma(0) = i) P(\gamma(0) = i)}{L(t)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

および,

$$\begin{aligned} p(\tau^n | \gamma(0) = i, Y^t) P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0) = i, \tau^n, Y^t) P(\gamma(0) = i | Y^t) \\ = \frac{L(t, B^t(\gamma(0) = i, \tau^n)) p(\tau^n | \gamma(0) = i) P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0) = i, \tau^n) P(\gamma(0) = i)}{L(t)} \end{aligned} \quad (3.29)$$

が, 確率 1 で成り立つことがわかる. ただし, $n=1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} L(t) \triangleq \sum_{j=0}^1 \left\{ L(t, B^t(\gamma(0) = i, \tau^0)) P(\tau_1 \geq t | \gamma(0) = i) P(\gamma(0) = i) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_{\tau_1}^t \cdots \int_{\tau_{n-1}}^t L(t, B^t(\gamma(0) = i, \tau^n)) \right. \\ \left. \times p(\tau^n | \gamma(0) = i) P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0) = i, \tau_n) P(\gamma(0) = i) d\tau^n \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

ここで, 式 (2.6) より,

$$P(\tau_1 \geq t | \gamma(0) = i) = \exp \left\{ - \int_0^t q_{ij}(s) ds \right\} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0) = i, \tau_n) &= \exp \left\{ - \int_{\tau_n}^t q_{ij}(s) ds \right\} \quad (n=2m \text{ のとき}) \\ &= \exp \left\{ - \int_{\tau_n}^t q_{ji}(s) ds \right\} \quad (n=2m-1 \text{ のとき}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} p(\tau^n | \gamma(0) = i) &= q_{ij}(\tau_1) \exp \left\{ - \int_0^{\tau_1} q_{ij}(s) ds \right\} q_{ji}(\tau_2) \exp \left\{ - \int_{\tau_1}^{\tau_2} q_{ji}(s) ds \right\} \cdots q_{ji}(\tau_n) \exp \left\{ - \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} q_{ij}(s) ds \right\} \\ &\quad (n=2m \text{ のとき}) \\ &= q_{ij}(\tau_1) \exp \left\{ - \int_0^{\tau_1} q_{ij}(s) ds \right\} q_{ji}(\tau_2) \exp \left\{ - \int_{\tau_1}^{\tau_2} q_{ji}(s) ds \right\} \cdots q_{ij}(\tau_n) \exp \left\{ - \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} q_{ij}(s) ds \right\} \\ &\quad (n=2m-1 \text{ のとき}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

ただし, $i, j=0, 1$ ($i \neq j$), $m=1, 2, \dots$.

式 (2.8), (3.28) ~ (3.33) によって, 最小分散推定アルゴリズムの構造は完全に定まった. 以上の結果をまとめると, つぎの定理を得る.

【定理】『最小分散推定 $\hat{x}(t|t)$ は, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \hat{x}(t|t) &= \sum_{i=0}^1 \left\{ \hat{x}_i(t|t, \tau^0) P(\tau_1 \geq t | \gamma(0) = i, Y^t) \right. \\ &\quad \left. \times P(\gamma(0) = i | Y^t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_{\tau_1}^t \cdots \int_{\tau_{n-1}}^t \hat{x}_i(t|t, \tau^n) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times p(\tau^n | \gamma(0) = i, Y^t) P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0) = i, \tau^n, Y^t) \\ &\left. \times P(\gamma(0) = i | Y^t) d\tau^n \right\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

ここで, $\hat{x}_i(t|t, \tau^n)$ ($i=0, 1$, $n=0, 1, 2, \dots$) は式 (3.19) で定義されたもので, 通常の Kalman フィルタにより与えられ, $P(\tau_1 \geq t | \gamma(0) = i, Y^t) P(\gamma(0) = i | Y^t)$, $p(\tau^n | \gamma(0) = i, Y^t) P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0) = i, \tau^n, Y^t) \cdot P(\gamma(0) = i | Y^t)$ は, それぞれ式 (3.28), (3.29) で与えられる. また, 式 (3.28), (3.29) における $L(t, B^t(\gamma(0) = i, \tau^0))$, $L(t, B^t(\gamma(0) = i, \tau^n))$ は, それぞれ式 (3.17), (3.

18) で与えられる.]

最小分散推定値を与える式 (3.34) の右辺は無限個の総和となっているので、式 (3.34) によって最小分散推定 $\hat{x}(t|t)$ を求めることは、ある正整数 N に対して $P(B_N^t)=1$ となる場合、すなわち interruption 過程 $\{\gamma(s), 0 \leq s < t\}$ が確率 1 で N 回以下のジャンプしなない場合を除いて、実行不可能である。したがって、実行可能な近似最小分散推定アルゴリズムを次節において提案する。

4. 近似推定アルゴリズム

本節では、以下の 2 つの特別な場合について、近似最小分散推定アルゴリズムを提案する。

(1) 終端時刻が有限で固定されている場合

終端時刻を T とする。そのとき、十分小さい正数 ε に対して、 N_0 を $N \geq N_0$ ならば、つぎの不等式

$$P(B_N^T) \geq 1 - \varepsilon \quad (4.1)$$

が成り立つような正整数として定義する。なお、 $\lim_{N \rightarrow \infty} P(B_N^T) = 1$ が成り立つ¹¹⁾ので、そのような正整数 N_0 は常に存在する。上の定義から、interruption 過程 $\gamma(t)$ は時間間隔 $[0, T]$ において、確率 ε 以下で、 N_0 回以上のジャンプをすることがわかる。したがって、

$$x^*(t|t) \triangleq E\{x(t)|Y^t, B_{N_0}^t\} \quad (4.2)$$

を $x(t)$ の推定値として採用すれば、 $1 - \varepsilon$ 以上の確率で、 $x(t)$ の最適推定値を得ることができる。式 (4.2) の推定値は

$$\begin{aligned} x^*(t|t) &= E\{E\{x(t)|r(0), \tau^{N_0}, Y^t, B_{N_0}^t\} | Y^t, B_{N_0}^t\} \\ &= \sum_{i=0}^1 \left\{ \hat{x}_i(t|t, \tau^0) P(\tau_1 \geq t | \gamma(0)=i, B_{N_0}^t, Y^t) \right. \\ &\quad \times P(\gamma(0)=i | B_{N_0}^t, Y^t) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N_0} \int_0^t \int_{\tau_1}^t \cdots \int_{\tau_{n-1}}^t \hat{x}_i(t|t, \tau^n) p(\tau^n | \gamma(0)=i, \\ &\quad B_{N_0}^t, Y^t) P(\tau_{n+1} \geq t | \gamma(0)=i, \tau^n, B_{N_0}^t, Y^t) \\ &\quad \left. \times P(\gamma(0)=i | B_{N_0}^t, Y^t) d\tau^n \right\} \quad (4.3) \end{aligned}$$

により、式 (3.19) および補題 2 ($N=N_0$) を用いて計算される。

(2) 終端時刻が無限大の場合

以下の議論の簡単化のため、interruption 過程 $\gamma(t)$ は定常であると仮定する。ある正整数 N_0 と十分小さい正数 ε に対して、 t_0 を $t \leq t_0$ ならば、つぎの不等式

$$\min_{i=0,1} P(B_{N_0}^t | \gamma(0)=i) \geq 1 - \varepsilon \quad (4.4)$$

が成り立つような正数として定義する。ここで、 N_0 と ε は、それぞれ計算機容量および推定値のよさに関係する。以下では、終端時刻が無限大の場合に対する近

似最小分散推定アルゴリズムを得るために、つぎの仮定をする。

【仮定】『各時刻 $t(>t_0)$ に対して、条件つき確率密度関数 $p(x(t-t_0)|Y^{t-t_0})$ は

$$\begin{aligned} \text{平均値} &= x^*(t-t_0|t-t_0) \triangleq E\{x(t-t_0)|Y^{t-t_0}\} \\ \text{共分散} &= P^*(t-t_0|t-t_0) \triangleq \text{Cov}\{x(t-t_0)|Y^{t-t_0}\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

をもつガウス分布にしたがう。』

この仮定のもとに、近似最小分散推定 $x^*(t|t)$ は、つぎの手順で得られる。

- (i) 式 (4.4) の条件から、 $0 \leq t \leq t_0$ では本節の (1) で提案したアルゴリズムを適用し、 $x^*(t|t)$, $P^*(t|t)$, $p(1|t) \triangleq P(\gamma(t)=1 | B_{N_0}^t, Y^t)$ を求める。ただし、 $P^*(t|t)$, $p(1|t)$ はそれぞれ式 (4.3) と同様にして、容易に求められる。
- (ii) $t_0 < t$ では、interruption 過程の定常性および (4.4), (4.5) により、 $x^*(t-t_0|t-t_0)$, $P^*(t-t_0|t-t_0)$, $p(1|t-t_0)$ を初期値とし、(i) のアルゴリズムを用いて、 $x^*(t|t)$, $P^*(t|t)$, $p(1|t)$ を求める。

5. 結 論

観測がランダムに中断される場合の線形連続時間系に対する最小分散推定、およびその近似推定アルゴリズムが、示された。最適推定値を得るために、無限個の総和を必要とするので、最適推定アルゴリズム (3.34) は一般的には実行不可能である。しかし、interruption 過程が、ある正整数 N に対して、確率 1 で、 N 回以下のジャンプしなない場合には、4 節の前半で提案した近似推定アルゴリズムが最適なものとなり、実行可能となる。なお、近似推定アルゴリズムを用いる際に、ジャンプ・マルコフ過程の特性によって決まるある水準にまで、ジャンプの生ずる時刻を量子化しななければならないことを注意しておく。

また、本論文での議論とほとんど同様にして、ジャンプ・マルコフ過程が任意の有限個の値をとる場合や、ジャンプ・マルコフ過程が観測方程式だけでなく、システム方程式にも含まれる場合の最小分散推定アルゴリズムを導くことができることを注意しておく。

最後に、近似推定アルゴリズムの導出において、われわれの用いた仮定 (4.5) の妥当性に関する理論的裏づけは事実上不可能であると思われるが、われわれの行なった計算機シミュレーションでは、近似推定値がほとんど最適推定値と一致しており、実用的観点からは、仮定 (4.5) が容認されるのではないかと考えられる。

参 考 文 献

- 1) R. E. Kalman: A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME, J. Basic Engrg., ser. D, Vol. 82, 35/45, (1960)
- 2) R. E. Kalman and R. S. Bucy: New results in linear filtering and prediction theory, Trans. ASME, J. Basic Engrg., ser. D, Vol. 83, 95/108, (1961)
- 3) N. E. Nahi: Optimal recursive estimation with uncertain observation, IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. IT-15, 457/462, (1969)
- 4) M. Z. Dajani and A. P. Sage: Nonlinear sequential algorithms for estimation under uncertainty, Information Sciences, Vol. 2, No. 4, 379/393, (1970)
- 5) A. G. Jaffer and S. C. Gupta: Recursive Bayesian estimation with uncertain observation, IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. IT-17, 614/616, (1971)
- 6) A. G. Jaffer and S. C. Gupta: Optimal sequential estimation of discrete processes with Markov interrupted observations, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. AC-16, 471/475, (1971)
- 7) Y. Sawaragi, T. Katayama and S. Fujishige: Sequential state estimation with interrupted observation, Information and Control, Vol. 21, No. 1, 56/71, (1972)
- 8) 樺木, 片山, 藤重: 不確実な観測機構を有する線形系の状態推定, 計測自動制御学会論文集, 第 8 卷, 第 4 号, 499/507, (1972)
- 9) D. G. Lainiotis: Optimal adaptive estimation: Structure and parameter adaptation, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. AC-16, 160/170, (1971)
- 10) D. G. Lainiotis: Joint detection, estimation and system identification, Information and Control, Vol. 19, No. 1, 75/92, (1971)
- 11) I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod: Introduction to the Theory of Random Processes. Philadelphia; W. B. Saunders, (1969)
- 12) J. L. Doob: Stochastic Processes. New York; John Wiley, (1953)