準線形分布定数系の最適制御

——輻射伝熱による連続加熱炉の特異制御——

榎 木 義 一・池 田 三 郎

京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

(昭和 47 年 12 月 4 日 受付)

Optimal Control of Quasi-Linear Distributed Parameter System

——A Singular Control of a Continuous Furnace under a Radiative Heat-Transfer——

Yoshikazu SAWARAGI and Saburō IKEDA

(Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto)

(Received December 4, 1972)

This paper deals with a singular control problem which appears in the optimal control of flow processes described by first-order partial differential equations. By applying Sirazetdinov's maximum principle to flow processes, optimal control and various conditions to be satisfied for the singular control are derived.

When system performance is evaluated at the outlet of a flow process, the following results are obtained.

- i) The optimal control is attained by only one switching from a bang-bang operation to a singular one.
- ii) The singular control is determined by the stational heat or mass balance at the outlet of the flow process.

By the use of quasilinearization technique, a numerical method is developed to calculate the singular control. To illustrate the present results, a continuous furnace under a radiative heat-transfer is analyzed.

1. 緒 言

化学反応器、熱交換器、加熱炉など物質や熱の移動現象を伴う流通プロセスでは、一般に系の動特性は時間と空間座標を独立変数とする偏微分方程式あるいは積分方程式で記述される。

ところで、最適制御問題において Pontryagin の最大原理を実際の最適問題に適用すると、いわゆる特異な場合 (Singular Case) が現われてきて、最大原理からは最適解を一意的に決定できないことがしばしばある。

集中定数系では、たとえば

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{u}(t) \quad (1.1)$$

となる系で、評価関数が

$$J = \int_0^T \{g_1(\mathbf{x}(t)) + g_2(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{u}(t)\} dt \quad (1.2)$$

で、操作量 $\mathbf{u}(t)$ の各時刻でとる値が R^m 内のコンパクトな凸集合 Ω に属する場合である。ここに、 $\mathbf{x}$ は n 次元状態ベクトル、 $\mathbf{u}$ は m 次元操作ベクトル ($m < n$) とする。

集中定数系に対する上記の問題は、いろいろと研究が行なわれている¹⁾。また、Singular Control が最適となるための必要条件が変分法の第2変分から求められて、Generalized-Legendre-Clebsch の条件として定式化されている²⁾。

分布定数系においても、同様な Singular Case の

問題が成立する。しかしながら、この方面の研究は Seinfeld & Lapidus⁹⁾ によって着手されているが、まだ理論的に確立されていない。

すでに著者は、1階の双線形分布定数系における Singular Case の解析⁴⁾ を集中定数系に対する問題に帰着させて行なったが、その問題は分布定数系に対して最大原理を用いることにより、より一般的に解くことができることがわかった⁵⁾。本論文では、5)と同様な解析方法により、集中定数系の(1.1), (1.2)式に対応する準線形分布定数系における Singular Case を取扱う。

最初に、流通プロセスにおける最適操作が1回の切換えで Bang-bang Control から Singular Control へ移ることを解析し、Singular Control の決定の方法とその数値計算のアルゴリズムを求めた。最後に、応用上の説明のために、輻射伝熱を受ける連続加熱炉の例題を解いた。

2. 流通プロセスの動特性

流通プロセスの動特性は、i) 押し出し流れ、ii) 流れの垂直方向に一様、iii) 流れ方向の拡散は無視できる——ことを仮定することにより、つぎのような連立1階偏微分方程式で与えられる⁶⁾。

$$Q_t^i + v(t)Q_x^i = f_0^i(t, x, Q^j) + \sum_k f_k^i(t, x)u_k(t) \\ i, j=1, \dots, n, k=1, \dots, m \quad (2.1)$$

$$t \in I, x \in E, I=[t_0, t_f], E=[x_0, x_f], n > m$$

ここに、 t は時間、 x は流体の移動する方向の距離、 $Q^i(t, x)$ は流体の濃度や温度などの状態量、 $v(t)$ は流体の流速、 $u_k(t)$ は操作量で空間的に一様な値をとるものとする。(2.1)式で

$$Q_t^i = \frac{\partial Q^i}{\partial t}, Q_x^i = \frac{\partial Q^i}{\partial x}$$

と定める。初期条件、境界条件はつぎのとおりである。

$$Q^i(t_0, x) = \phi^i(x), x \in E \quad (2.2)$$

$$Q^i(t, x_0) = \psi^i(t); t \in I \quad (2.3)$$

(2.1)~(2.3)式は準線形1階偏微分方程式系と呼ばれ、(2.1)式の右辺 f_0^i は一般に非線形である。たとえば、反応器の場合には反応速度式に関する項、熱交換器では伝熱に関する項がこれに相当する。

3. 問題の記述

集中定数系では、槽型反応器の収率最大の問題、熱交換器など伝熱プロセスの温度偏差最小の問題などは(1.1), (1.2)式の形になり、Singular Case が出現することはよく知られている¹⁾。分布定数系においても

同様な事情が成立して、管型反応器の収率最大の問題、加熱炉の温度偏差最小の問題など、(1.1), (1.2)式に対応した問題を考察する必要がある。ここでは、(2.1)式の右辺の操作量 $u_k(t)$ が一次元の場合を考えることにする。すなわち、(2.1)式は

$$Q_t^i + v(t)Q_x^i = f_0^i(t, x, Q^j) + f_1^i(t, x)u(t) \\ i, j=1, \dots, n, t \in I, x \in E \quad (3.1)$$

となる。また $u(t)$ は区間 I で区分的に連続、かつ有界で、各時刻 t でコンパクトな凸集合 Ω に属するものとする。

評価関数としては、上述の収率、温度設定値などは通常、流通プロセスの出口で与えられるので、 $x=x_f$ での評価を考えることにする。

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \{g^0(Q^i(t, x_f))\} dt, i=1, \dots, n \quad (3.2)$$

問題は(3.1)式で系の動特性が記述され、初期条件、境界条件が(2.2), (2.3)式で与えられる準線形分布定数系に対して、評価関数(3.2)式を最小にする操作量 $u(t) (u \in \Omega)$ を求めることである。

ただし、(3.1)式の右辺に関しては、領域 $I \times E$ 上でのつぎのような条件を満足しているものとする。

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } -f_0^i \text{ はすべての } Q^i \text{ に関して} \\ \text{strictly convex} \\ \text{ii) } \partial f_0^i / \partial Q^j \text{ が存在して、連続} \\ \text{iii) } f_0^i, f_1^i \text{ は各変数に対して連続で有界} \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

上述の準線形分布定数系を含めて、いわゆる双曲型分布定数系に対する最大原理が、Egorov⁷⁾, Sirazetdinov⁸⁾ らによって導かれている。この論文では、8)で導かれた最大原理を用いて Singular Case を含む最適問題を考察する。

4. Sirazetdinov の最大原理と最適操作量の決定

分布定数系に対する最大原理は、最初に Butkovsky & Lerner⁹⁾ によって、制御系が積分方程式で表現される場合について導かれ、その後、Sirazetdinov は8)で1個の準線形1階偏微分方程式の場合について、最適制御の満たすべき必要条件を与えた。一方、流通プロセスの動特性(3.1)式は n 個の準線形1階偏微分方程式から構成されているが、彼の最大原理は容易に(3.1)式に拡張できる¹⁰⁾。本節では、この拡張された最大原理を、この問題に適した形で簡単に述べる。

(3.1), (3.2)式で

$$F^i(t, x, Q^j, v(t), u(t)) \\ = -v(t)Q_x^i + f_0^i(t, x, Q^j) + f_1^i(t, x)u \quad (4.1)$$

$$G(t, x_f, Q^i) = g^0(Q^i(t, x_f)) \quad (4.2)$$

と書き改めて、つぎのように(4.3)～(4.8)式を定義する。

〈定義〉

$$H_1 \equiv \sum_i P^i(t, x) \cdot F^i, \quad i=1, \dots, n \quad (4.3)$$

$$H \equiv -G + \int_{x_0}^{x_f} H_1 dx \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial P^i}{\partial t} = -\frac{\partial H_1}{\partial Q^i} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_1}{\partial Q_x^i} \right), \quad i=1, \dots, n \quad (4.5)$$

補助変数 P^i に対する終端条件および境界条件は

$$P^i(t_f, x) = 0, \quad i=1, \dots, n \quad (4.6)$$

$$\left[\frac{\partial G}{\partial Q^i} - \frac{\partial H_1}{\partial Q_x^i} \right]_{x=x_f} = 0, \quad i=1, \dots, n \quad (4.7)$$

で与えられるものとする。

このとき、系の方程式(3.1)式はつぎのように表わされる。

$$\frac{\partial Q^i}{\partial t} = \frac{\partial H_1}{\partial P^i}, \quad i=1, \dots, n \quad (4.8)$$

〈Sirazetdinov の最大原理〉

区間 I で定義された操作量 $u(t) \in \Omega$ が(3.1)式の条件の下で、(3.2)式の J を最小にするためには、任意の $t \in I$ に対して

$$H = \max_{u \in \Omega} H(t, x_f, Q^i, Q_x^i, P^i, u(t)), \quad i=1, \dots, n \quad (4.9)$$

となることが必要である。

(4.7) 式の形の境界条件は(8), (10)では与えられていないが、(8)での定理の証明方法から容易に導かれる[(5)参照]。

(3.1), (3.2) 式の準線形分布定数系に上述の最大原理を適用すると、(4.3), (4.4) 式の H_1, H はつぎのようになる。

$$H_1 = \sum_i P^i \{ f_0^i + f_1^i \cdot u - v Q_x^i \} \quad (4.10)$$

$$H = -g^0 + \sum_i \left\{ \int_{x_0}^{x_f} P^i (f_0^i - v Q_x^i) dx \right\} + \left\{ \sum_i \int_{x_0}^{x_f} P^i f_1^i dx \right\} u \quad (4.11)$$

補助変数 $P^i(t, x)$ の満たすべき方程式は、(4.5)式より

$$\frac{\partial P^i}{\partial t} = -\frac{\partial f_0^i}{\partial Q^i} P^i + v(t) \frac{\partial P^i}{\partial x}, \quad i=1, \dots, n \quad (4.12)$$

となり、終端条件および境界条件は(4.6), (4.7)式から

$$P^i(t_f, x) = 0, \quad i=1, \dots, n \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial g^0}{\partial Q^i} \Big|_{x=x_f} = -v(t) \cdot P^i(t, x_f), \quad i=1, \dots, n \quad (4.14)$$

を得る。(4.11)式の H は $u(t)$ に関して線形となっているので、Sirazetdinov の最大原理より H を最大にする最適操作量 $u^*(t)$ は Ω の境界 $\partial\Omega$ 上の値をとることになる。したがって、つぎのような関係式から最適操作量 $u^*(t)$ を決定することができる。

$$\sum_i \int_{x_0}^{x_f} P^i \cdot f_1^i dx \times \begin{cases} > 0, & u^*(t) = \sigma^+ \\ < 0, & u^*(t) = \sigma^- \\ = 0, & u^*(t) : \text{Singular Case} \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\times \begin{cases} > 0, & u^*(t) = \sigma^+ \\ < 0, & u^*(t) = \sigma^- \\ = 0, & u^*(t) : \text{Singular Case} \end{cases} \quad (4.16)$$

$$i=1, \dots, n \quad (4.17)$$

ここに

$$\sigma^+ = \max \{ \sigma \in \partial\Omega \}, \quad \sigma^- = \min \{ \sigma \in \partial\Omega \} \quad (4.18)$$

である。

5. Singular Case の解析

(4.17) 式の関係がある時間にわたって成立する場合を Singular Case といい、最大原理からは最適操作量 $u^*(t)$ を一意的に決めることはできない。しかし、(4.17)式が成立するための他の諸条件を検討することにより、Singular Case の操作量 $u^*(t)$ を導くことができる。本節では、Singular Case の解析を1次系の場合について考察する。すなわち、 $i=1$ の場合、系の方程式(3.1)式は、初期条件、境界条件とともにつぎのようになる。

$$Q_1 = -v(t) Q_x + f_0(t, x, Q) + f_1(t, x) u(t), \quad t \in I, \quad x \in E \quad (5.1)$$

$$Q(t_0, x) = \phi(x), \quad x \in E \quad (5.2)$$

$$Q(t, x_0) = \phi(t), \quad t \in I \quad (5.3)$$

操作量 $u(t)$ に関しては、この場合

$$m \leq u(t) \leq M, \quad t \in I \quad (5.4)$$

とし、評価関数 J として、系の出口での Q の値とある設定値 Q^* との偏差の時間積分を考察する。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{ Q(t, x_f) - Q^* \}^2 dt \quad (5.5)$$

このとき、 H_1, H は(4.10), (4.11)式より

$$H_1 = P \cdot (f_0 + f_1 u - v Q_x) \quad (5.6)$$

$$H = -\frac{1}{2} \{ Q(t, x_f) - Q^* \}^2 + \int_{x_0}^{x_f} P (f_0 - v Q_x) dx + \int_{x_0}^{x_f} P f_1 dx \cdot u \quad (5.7)$$

を得る。補助変数 P の方程式とその終端条件、境界条件は(4.13), (4.14)式より、つぎのように求められる。

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -v(t) \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial f_0}{\partial Q} \cdot P \quad (5.8)$$

$$P(t_f, x) = 0 \quad (5.9)$$

$$P(t, x_f) = -\frac{Q(t, x_f) - Q^*}{v(t)} \quad (5.10)$$

最適操作量を定める (4.15) ~ (4.17) 式は

$$\int_{x_0}^{x_f} P(t, x) \cdot f_1(t, x) dx \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} > 0, & u^*(t) = M \\ < 0, & u^*(t) = m \end{cases} \quad (5.12)$$

$$= 0, \text{ Singular Case} \quad (5.13)$$

となる。

ところで、流通プロセスの出口での状態量 $Q(t, x_f)$ は

$$Q(t_0, x_f) < Q^*$$

であったとしたとき、 $t_0 < t < t_f$ 内の時刻で、適当な制御を加えることにより、

$$Q(t, x_f) = Q^*$$

とすることは可能である。もし不可能であるならば、流通プロセスとしての物理的能力の設計値と Q^* の値の選定が不適当であることを意味する。 $Q(t, x_f) = Q^*$ となった時刻を $t = t_s (< t_f)$ とすると、(5.5) 式の評価関数の関係から、この時刻以後は $Q(t, x_f) = Q^*$ を維持できれば、 J の最小値には好都合となる。実は、この操作は (5.13) 式の Singular Case に相当していることを以下で述べる。

$t \geq t_s$ で $Q(t, x_f) = Q^*$ だから、 P の境界条件 (5.10) 式より

Fig. 1 Characteristics of $P(t, x)$ on Domain $I \times E$

$$P(t, x_f) = 0, \quad t_s \leq t \leq t_f$$

一方、終端条件 (5.9) 式より $P(t_f, x) = 0$ であるから、Fig. 1 の $I \times E$ の領域内の $\overline{FD}, \overline{CD}$ 上で $P(t, x) = 0$ となる。

さて、 P に関する偏微分方程式 (5.8) 式の解は、1 階偏微分方程式論により

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{v(t)} = \frac{dP}{-(\partial f_0 / \partial Q) \cdot P} \quad (5.14)$$

なる特性曲線に沿って積分することにより求められる。(3.3) 式の仮定により、 $\partial f_0 / \partial Q$ の有界性を用いれば、(5.14) 式の解はつぎのように得ることができる。

$$P(t, x) = P\left(t_0, x - \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau\right) \times \exp\left\{-\int_{t_0}^t \frac{\partial f_0}{\partial Q} d\tau\right\} \quad (5.15)$$

$$f_0 = f_0\left(\tau, x - \int_{t_0}^{\tau} v(\sigma) d\sigma, Q\left(\tau, x - \int_{t_0}^{\tau} v(\sigma) d\sigma\right)\right) \quad (5.16)$$

(5.15) 式の初期条件 $P(t_0, x)$ は Fig. 2 の $\overline{AB}$ で与えられ、ここでは未知であるので、(5.15) 式を $P(t_0, x)$ に関して解いて、

$$t_0 \rightarrow t, \quad t \rightarrow t_f, \quad x - \int_{t_0}^t v(\sigma) d\sigma \rightarrow X$$

なる変換を施こすと、閉領域 CDA' 内で

$$P(t, X) = P\left(t_f, X + \int_t^{t_f} v(\tau) d\tau\right) \exp\left\{-\int_t^{t_f} \frac{\partial f_0}{\partial Q} d\tau\right\} \quad (5.17)$$

を得る。この式は、 $\overline{CD}$ 上の P の値を初期条件として、 $\overline{HI}$ に沿って時間を逆に解いた式となっている。

また、閉領域 $AGFDA'$ 内では、 $\overline{FD}$ 上の値を $P(s, x_f)$ として

$$P(t, X) = P(s, x_f) \exp\left\{-\int_t^s \frac{\partial f_0}{\partial Q} d\tau\right\} \quad (5.18)$$

を得る。ここに、 s はつぎのような関係式で与えられる。

$$\int_t^s v(\tau) d\tau = x_f - X \quad (5.19)$$

$v(t) = v_0$ (定数) のとき、

$$s = t + (x_f - X)/v_0 \quad (5.20)$$

(5.15), (5.18) 式において、おのおの初期条件に相当する $\overline{CD}, \overline{FD}$ の P の値が零であるために、閉領域 $AGFDC$ 内で $P(t, x) \equiv 0$ を得る。一方閉領域 GBF では、 $\overline{BF}$ 上の P の値は境界条件 (5.10) 式より定まる。設定値 Q^* をステップ状に上昇、あるいは下降さ

 Fig. 2 Sign of $P(t, x)$ on $I \times E$

せる場合のおおのにしたがって、(5.10) 式より

$$Q(t_0, x_f) < Q^* \text{ のとき, } P(t_0, x_f) > 0 \quad (5.21)$$

$$Q(t_0, x_f) > Q^* \text{ のとき, } P(t_0, x_f) < 0 \quad (5.22)$$

となる。(5.21), (5.22) 式は $Q(t, x_f) = Q^*$ となる時刻 $t = t_s$ まで続くので、結局 $\overline{BF}$ 上の P の値は

$$Q(t_0, x_f) < Q^* \text{ のとき,} \\ P(t, x_f) > 0, \quad t_0 \leq t < t_s \quad (5.23)$$

$$Q(t_0, x_f) > Q^* \text{ のとき,} \\ P(t, x_f) < 0, \quad t_0 \leq t < t_s \quad (5.24)$$

となる。したがって、閉領域 GBF 内では(5.18)式を用いることにより、(5.23), (5.24) 式の符号を考慮すれば、 $P(t, X)$ は正または負の値のどちらかである。

これまでの結果を図示すると、Fig. 2 のようになる。

以上の議論により、 $Q(t, x_f) = Q^*$ を維持する Singular Control u^s が求まったとすれば、それは Singular Case の条件式 (5.13) 式を満たすことは明らかである。すなわち、 $\square EFDC$ 内で $P \equiv 0$ であるから、

$$\int_{x_0}^{x_f} P(t, x) f_1(t, x) dx \equiv 0, \quad t_s \leq t \leq t_f \quad (5.25)$$

が成立する。

一方、Bang-bang Control 部分では、 $I \times E$ で $f_1(t, x)$ が一定符号をとるならば、 P と f_1 の符号の積で (5.11), (5.12) 式

$$\int_{x_0}^{x_f} P(t, x) f_1(t, x) dx \geq 0, \quad t_0 \leq t < t_s \quad (5.26)$$

の符号を得る。簡単のために、つぎのような仮定をする。

$$f_1(t, x) > 0, \quad t \in I, \quad x \in E \quad (5.27)^*$$

このとき、最適制御の操作パターンは、Fig. 3 の P の符号と (5.11) ~ (5.13) 式より、つぎのように決定される。

$$Q(t_0, x_f) < Q^* \text{ のとき}$$

$$u^* = \begin{cases} M, & t_0 \leq t < t_s \\ u^s, & t_s \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (5.28)$$

$$Q(t_0, x_f) > Q^* \text{ のとき}$$

$$u^* = \begin{cases} m, & t_0 \leq t < t_s \\ u^s, & t_s \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (5.29)$$

6. Singular Control u^s の決定

$Q(t, x_f)$ が設定値 Q^* に到達した時刻 t_s 以後は

$$Q(t, x_f) - Q^* = 0, \quad t_s \leq t \leq t_f \quad (6.1)$$

を持続する Singular Control u^s を求めることにする。(6.1) 式が成立するとき、 $[Q_t]_{x=x_f} = 0$ であるから、(5.1) 式より、系の出口 $x = x_f$ でつぎのような関係を得る。

$$[v(t)Q_x]_{x=x_f} = f_0(t, x_f, Q^*) + f_1(t, x_f)u^s(t) \quad (6.2)$$

ここに $[Q_t]_{x=x_f}$, $[Q_x]_{x=x_f}$ は $x = x_f$ での系の内側からの偏微分の評価を示している。(6.2) 式の関係は、物理的には $x = x_f$ で定常的な物質、熱収支が維持されていることを意味している。(6.2) 式より u^s を求める式

$$u^s(t) = \frac{1}{f_1(t, x_f)} \left\{ v(t) \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=x_f} - f_0(t, x_f, Q^*) \right\}, \quad t_s \leq t \leq t_f \quad (6.3)$$

が得られる。すなわち、系の出口で x 方向の勾配を測定することにより u^s を決定することができ、流通プロセスの最適制御系を構成することができる。

$\partial Q / \partial x|_{x=x_f}$ が測定できない場合には、系の方程式が準線形であるので、 $\partial Q / \partial x$ を解析的に求めることはできず、なんらかの数値解法が必要となる。また、Bang-bang から Singular への切換え時刻 t_s も、解析的に決定できなくてやはり数値解法が必要である。

7. 準線形化法による近似解法

準線形化 (Quasi-linearization) による非線形微分方程式の数値解法は、常微分方程式の2点境界値問題に対して多くの研究がなされているが、偏微分方程式への応用も研究が進展している^{11,12)}。準線形化による解の存在と一意性および収束性については、(3.3) 式の仮定が成立していれば一般に保証される¹¹⁾。たとえば

の強い制約がなくとも、初期解を厳密解の近傍に仮定できるならば、解は単調かつ 2 次の order で収束することが知られている。

連続加熱炉への応用と準線形化のアルゴリズムの簡化を考慮して、(5.1) 式で

$$f_1(t, x) = K(>0): \text{定数} \quad (7.1)^*$$

とする。このとき、(5.1) 式に準線形化を適用すると

$$Q_t^n + v(t)Q_x^n = Ku(t) + \beta_1 + \beta_2 Q^n, \quad n=1, 2, \dots \quad (7.2)$$

$$\beta_1 = f_0(t, x, Q^{n-1}) + \frac{\partial f_0(t, x, Q^{n-1})}{\partial Q^{n-1}} \cdot Q^{n-1} \quad (7.3)$$

$$\beta_2 = \frac{\partial f_0(t, x, Q^{n-1})}{\partial Q^{n-1}} \quad (7.4)$$

$$n=1, 2, \dots$$

を得る。初期条件と境界条件はつぎのように与えられる。

$$Q^n(t_0, x) = \phi(x), \quad x \in E, \quad n=1, 2, \dots \quad (7.5)$$

$$Q^n(t, x_0) = \psi(t), \quad t \in I, \quad n=1, 2, \dots \quad (7.6)$$

ここに、 Q^n は Q の n 次近似解で、初期解 Q^0 は与えられたものとする。(7.2) 式は $(n-1)$ 次解 Q^{n-1} を既知としたとき、 Q^n に関して 1 階線形偏微分方程式となっているので、(5.14) 式と同様に特性曲線に沿った積分によって容易に解が得られる。

$$Q^n(t, x) = e^{\int_{t_0}^t \beta_2(\tau) d\tau} \phi \left(x - \int_{t_0}^t v(\sigma) d\sigma \right) + \int_{t_0}^t \{ \beta_1(\tau) + Ku(\tau) \} e^{\int_{\tau}^t -\beta_2(\sigma) d\sigma} \cdot d\tau$$

$$x \in E, \quad t \in I, \quad t_f \leq t_R \quad (7.8)$$

ここに、 t_R は系内の流体の滞留時間で、

$$\left. \begin{aligned} x_f - x_0 &= \int_{t_0}^{t_R} v(\tau) d\tau \\ v(t) &= v_0 \text{ のとき } (x_f - x_0)/v_0 = t_R - t_0 \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

より定まる。また、 β_1, β_2 は既知ではあるが、特性曲線に沿った時間の関数となっている。

(7.8) 式を x に関して偏微分して $x=x_f$ とすると

$$\left. \frac{\partial Q^n}{\partial x} \right|_{x=x_f} = e^{\int_{t_0}^t \beta_2(\tau) d\tau} \left. \frac{\partial}{\partial x} \phi \left(x - \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \right) \right|_{x=x_f} \quad (7.10)^{**}$$

を得る。初期分布 $\phi(x)$ は与えられているので、 n を十分大きくすれば、 $\partial Q/\partial x|_{x=x_f}$ の値は

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{x=x_f} &\equiv \left. \frac{\partial Q^n}{\partial x} \right|_{x=x_f} \\ &= e^{\int_{t_0}^t \beta_2(\tau) d\tau} \left. \frac{\partial}{\partial x} \phi \left(x - \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \right) \right|_{x=x_f} \end{aligned} \quad (7.11)$$

注) * 加熱炉・熱交換器などでは、 u を外部熱源の温度とすると $f_1(t, x)$ は伝熱係数と考えられる。

より、近似式として計算できる。

8. 輻射伝熱を受ける加熱炉の最適制御

これまでの結果を、Fig. 3 で図示された連続加熱炉の例題に適用してみる。一般に、加熱炉では伝熱が高温で行なわれるために輻射伝熱が支配的となり、系の動特性は準線形偏微分方程式で記述される。速度 $v(t)$ で加熱炉内を左から右へ移動してゆく物体の温度 $Q(t, x)$ は、垂直方向の温度勾配が無視でき、伝熱は輻射のみに依存するとするならば、つぎのような式で支配される。

$$Q_t + v(t)Q_x = \alpha(u^4(t) - Q^4) \quad (8.1)$$

$$Q(0, x) = \phi(x) \quad (8.2)$$

$$0 \leq x \leq x_f, \quad 0 \leq t \leq t_f \leq t_R$$

ここに、 t_R は(7.9)式で与えられる滞留時間で、 α は輻射伝熱に関する係数で正の定数としておく。

操作量 $u(t)$ は炉内温度で(5.4)式の制約条件

$$0 < m \leq u(t) \leq M, \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (8.3)$$

にしたがい、評価関数も出口温度を考えて(5.5)式と同様に

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{ Q(t, x_f) - Q^* \}^2 dt \quad (8.4)$$

とする。

(8.1)~(8.4)式を 5. の議論に適用すれば、最大にすべき H は(5.7)式より

$$H = -\frac{1}{2} \{ Q(t, x_f) - Q^* \}^2 + \int_0^{x_f} P(\alpha u^4 - \alpha Q^4 - v Q_x) dx \quad (8.5)$$

Fig. 3 Continuous Furnace

注) ** 系の滞留時間 t_R を超える $t_R \leq t \leq t_f$ の場合、解は初期条件 $\phi(x)$ に無関係となり、境界条件 $\psi(t)$ から定まる。 $v(t)=v_0$ とし、 $s=t-x/v_0$ とすると、

$$Q^n(t, x) = e^{\int_s^t \beta_2(\tau) d\tau} \cdot \psi(t_0) + \int_s^t \{ \beta_1(\tau) + Ku(\tau) \} e^{\int_{\tau}^s \beta_2(t-\sigma) d\sigma} \cdot d\tau$$

$$t_R < t \leq t_f, \quad x \in E$$

を得る。上式を x で偏微分して $x=x_f$ とすれば、(7.10)式に対応する関係が得られる。

を得る。 $u(t) > 0$ であるので、 $U(t) = u^4(t)$ とおけば

$$\max_u H = \max_U \left\{ -\frac{1}{2} (Q(t, x_f) - Q^*)^2 + \int_0^{x_f} P(\alpha U - \alpha Q^4 - v Q_x) dx \right\} \quad (8.6)$$

となる。ただし、 U の制約条件はつぎようになる。

$$m^4 \leq U(t) \leq M^4, \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (8.7)$$

(8.6), (8.7) 式より、最適操作量として

$$\alpha \int_0^{x_f} P(t, x) dx \quad \begin{cases} > 0, & U^* = M^4, & u^* = M \\ < 0, & U^* = m^4, & u^* = m \\ = 0, & U^* = (u^s)^4, & u^* = u^s \end{cases} \quad (8.8)$$

$$\quad \begin{cases} < 0, & U^* = m^4, & u^* = m \\ = 0, & U^* = (u^s)^4, & u^* = u^s \end{cases} \quad (8.9)$$

$$\quad \begin{cases} < 0, & U^* = m^4, & u^* = m \\ = 0, & U^* = (u^s)^4, & u^* = u^s \end{cases} \quad (8.10)$$

を得ることができ、Singular Control u^s は (6.3) 式より

$$U^s = (u^s)^4 = (Q^*)^4 + \frac{v(t)}{\alpha} \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=x_f}, \quad t_s \leq t \leq t_f \quad (8.11)$$

となる。

出口における温度勾配 $\partial Q / \partial x$ が測定不可能な場合には、7. で議論した準線形化法を用いて数値計算してやればよいことになる。準線形化法による解の存在と収束を保証する (3.3) 式の条件は、(8.1) 式の系では明らかに成立しているの、 n 次近似の式は (7.2) 式より

$$Q_t^n + v(t) Q_x^n = \alpha u^4(t) + \beta_1 + \beta_2 Q^n \quad (8.12)$$

$$\beta_1 = 3\alpha (Q^{n-1})^4 \quad (8.13)$$

$$\beta_2 = -4\alpha (Q^{n-1})^3 \quad (8.14)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

n が十分大きくなると、 Q^n は Q に収束してゆくの、 Singular Control 部分では $Q^{n-1}(t, x_f) \cong Q^n(t, x_f) = Q^*$ となり、

$$\beta_2|_{x=x_f} = -4\alpha (Q^{n-1})^3 \cong -4\alpha (Q^*)^3 \quad (8.15)$$

を得る。上式を (7.11) 式に代入すれば

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=x_f} \cong e^{-4\alpha Q^{*3}t} \frac{\partial}{\partial x} \phi \left(x - \int_0^t v(\tau) d\tau \right) \Big|_{x=x_f} \quad (8.16)$$

を得て、(8.11)式より u^s が数値計算できることになる。

とくに、初期分布 $\phi(x)$ が定常解である場合には、 $t=0$ で $v(0)=v_0$, $u(0)=u_0$ として、 $\phi(x)$ は

$$v_0 \phi_x = \alpha(u_0^4 - \phi^4), \quad t=0, \quad 0 \leq x \leq x_f \quad (8.17)$$

を満足している。上式を (8.16) 式に代入すれば

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=x_f} = e^{-4\alpha Q^{*3}t} \left\{ \frac{\alpha}{v_0} \left(u_0^4 - \phi \left(x_f - \int_0^t v(\tau) d\tau \right) \right) \right\} \quad (8.18)$$

を得るので、結局、Singular Control u^s はつぎのよ

Fig. 4 Optimal Control U^* for $Q(t_0, x_f) < Q^*$

うに決定される (Fig. 4 参照)。

$$u_s^4(t) = Q^{*4} + \frac{v}{v_0} \left\{ u_0^4 - \phi \left(x_f - \int_0^t v(\tau) d\tau \right) \right\} e^{-4\alpha Q^{*3}t}, \quad t_s \leq t \leq t_f \quad (8.19)$$

切換え時刻 t_s は、最初に $Q(t, x_f) = Q^*$ となる時刻であるから、(8.12) 式で $u = M$ or m において $Q^n(t, x_f)$ を解くことによって、求めることができる。すなわち、(8.12) 式の解 (7.8) 式で $x = x_f$ として両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dQ^n(t, x_f)}{dt} &= \beta_2 Q^n(t, x_f) + e^{\int_0^t \beta_2 d\tau} \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial x} \phi \left(x_f - \int_0^t v d\tau \right) (-v) \\ &\quad + \beta_1 + \alpha M^4 \end{aligned} \quad (8.20)$$

$$Q^n(0, x_f) = \phi(x_f), \quad Q^n(t_s, x_f) = Q^*, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.21)$$

を得る。(8.20)式で $n=0$ の初期解 $Q^0(t, x_f) = \phi(x_f) = \text{const.}$ として、数値計算した例が Fig. 5 に示してある。準線形化法による収束はきわめてよく、 $|Q^n - Q^{n-1}|$ は $n=4$ で 10^{-6} のオーダーとなり、 $Q^n = Q^*$ となる時刻 $t = t_s^n$ ($n=1, 2, \dots$) が逐次、求められることになる。Fig. 4 は、切換え時刻 $t = t_s^n$ で $u^* = M$ から Singular Control u^s へ切換える最適操作量を (8.19)式より数値計算したものである。計算に使用したデータは下記のとおりである。

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.8 \times 10^{-3}, & \phi(x_f=1) &= 8.07, & Q^* &= 12.5 \\ M &= 13.0, & u_0 &= 10.0, & v &= v_0 = 1.0 \\ x_f &= 1.0, & t_f &= 1.0. \end{aligned}$$

9. 結 言

本論文は、1 階準線形偏微分方程式で記述される流通プロセスの最適制御問題を取扱い、そこで出現する

Fig. 5 Convergence of Temp. $Q^n(t, x_f)$

Singular Case を Sirazetdinov の最大原理を用いて考察した。評価関数として、流通プロセスの出口における状態量の時間積分を採用すると、最適制御は

Bang-bang Control $\Rightarrow$ Singular Control

へ1回の切換えで移ることがわかった。また Singular Control は、流通プロセスの出口における物質または熱収支の定常解を満足する条件から決定されることも、明らかとなった。したがって、最適制御系の構成は、出口における状態量とその流れ方向の勾配の測定することにより、容易に達成できる。また、勾配の測定が不可能な場合に対して、準線形化法による近似の数値計算のアルゴリズムを与えた。さらに、応用上の説明のために、輻射伝熱を受ける連続加熱炉の例題を解いた。

終わりに、この研究に対して、熱心に御討論いただいた京都大学工学部島助教授に深く感謝いたします。

参考文献

- 1) 榎本・布川・勝間：操作量を線形に含む1次元非線形制御系の最適制御問題；システムと制御，Vol. 15, No. 2, pp. 148-154 (1971)
- 2) H. J. Kelley, R. E. Kopp, H. G. Moyer: Singular Extremals; in Topics in Optimization, ed. by Leit-

mann, Academic Press, New York, (1967)

- 3) J. H. Seinfeld, L. Lapidus: Singular Solutions in the Optimal Control of Lumped and Distributed-Parameter Systems; Chem. Eng. Sci., Vol. 23, No. 12, pp. 1485-1499 (1968)
- 4) 島・池田・岡本：双線形分布定数系の最適制御；システムと制御，Vol. 17, No. 11, pp. 689-697 (1973)
- 5) 池田・岡本・島：ある双線形分布定数系の特異制御；計測自動制御学会論文集，掲載予定
- 6) L. A. Gould: Chemical Process Control. Theory and Applications; Addison-Wesley (1969)
- 7) A. I. Egorov: Optimal Processes in Distributed Parameter Systems and Certain Problems in Invariance Theory; J. SIAM Control, Vol. 4, No. 4, pp. 601-661 (1966)
- 8) T. K. Sirazetdinov: On the Theory of Optimal Processes with Distributed Parameters; Autom. and Remote Cont., Vol. 25, No. 4, pp. 431-440 (1964)
- 9) A. G. Butkovsky, A. Y. Lerner: Optimal Control of Systems with Distributed Parameters; Autom. and Remote Cont., Vol. 21, No. 6, pp. 472-477 (1960)
- 10) K. S. Chang, S. G. Bankoff: Optimal Control of Tubular Reactors; AIChE J., Vol. 15, No. 3, pp. 410-418 (1969)
- 11) R. Bellman, R. Kalaba: Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems; Elsevier, New York (1965)
- 12) E. Angel, R. Bellman: Dynamic Programming and Partial Differential Equations; Academic Press, New York (1972)