準 静 的 過 程 と 制 御

木 村 英 紀

大阪大学基礎工学部 豊中市待兼山町 1-1

(昭和 48 年 1 月 29 日 受付)

Quasi-Static Process and Control

Hidenori KIMURA

(Faculty of Engineering Science, Osaka University, Toyonaka)

(Received January 29, 1973)

If the state transition process proceeds so slowly that the system can be regarded as staying in the static equilibrium state at all times during the process, it is called a quasi-static process by physicists. The quasi-static process can be used to control a kind of system in which system dynamics may be a source of unwelcome results.

In this paper we consider the mathematical foundation of the quasi-static process from the viewpoint of system theory. The main result is the derivation of a sufficient condition for the possibility of the quasi-static state transition. We also discuss the application of the quasi-static process to the problem of controllability for nonlinear systems.

1. は し が き

ある状態から他の状態への遷移の速度が十分小さく、各瞬間でシステムが静的な平衡状態にあるとみなせる場合、そのような遷移のプロセスを熱力学では準静的過程 (quasi-static process) と呼んでいる。準静的過程は、可逆過程を実現する方法として熱力学では重要であるが、力学ではこのような過程は断熱過程 (adiabatic process) と呼ばれ、やはり重要な役割りを果たしている。古典力学では周期運動に対する断熱過程は作用積分を不変にすること、量子力学では断熱過程によって状態遷移は起こらないこと、などが知られている (たとえば文献¹⁾, p. 135 参照)。

準静的過程の基本的な考え方は、システムのもつダイナミックスをなるべく「殺して」しまおうとする点にある。このような考え方は、ダイナミックスをなるべく活用して効率のよい制御を行なおうとする近代制御理論とはまったく相容れないものであるが、実際問題ではシステムのもつダイナミックスが有害な作用をおよぼすため、ダイナミックスを「殺す」ことが必要な場合も多い。プロセス制御における種々の不安定性、騒音発生、社会システムにおける政策のマイナスの波及効果などはただちに思いつく有害なダイナミッ

クスの例である。このような対象に対する制御の1つの極限的な方式として、速応性をまったく無視しその代わり、他に「波風の立たない」ようにゆっくりとシステムの状態を遷移させることが考えられる。このような制御は、1つの準静的過程である。このように準静的過程は、制御工学的な見地からも考察に値すると思われる。以下では、準静的過程を一般的に定式化し、その数学的な基礎を与え、かつ制御問題への応用を述べた。

本稿で用いる記号について述べておく。 R^n は n 次元ベクトル空間、 A' は行列 A の転置、 (x, y) はベクトル x と y のスカラー積、 $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ である。連続微分可能な関数のクラスを C^1 で表わす。 C^1 に属すベクトル関数 $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, $x \in R^n$ に対し、 $\partial f_i / \partial x_j$ を (i, j) 要素としてもつ行列を $f_x(x)$ で表わす。

2. 準 静 的 過 程

われわれの対象とするシステムは、つぎのような微分方程式で表わされる。

$$\dot{x} = f(x, a) \quad (1)$$

ここで、 $x = x(t)$ はシステムの状態を表わす n 次元ベクトル、 a は制御可能なパラメータを表わす m 次元ベ

クトル, $f(x, a)$ は R^{n+m} で解析的とする. つぎの定理が本稿の主要結果である.

定理 1 区間 $[0, 1]$ から R^n への連続微分可能な写像 $\phi(s)^*$ が存在し, 任意の $s \in [0, 1]$ に対してつぎの条件が満たされているとする.

(i) $f(\phi(s), a(s)) = 0$ となる $a(s) \in R^m$ が存在し,

(ii) 行列 $f_x(\phi(s), a(s))$ は安定である**.

このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在し,

$$\dot{x} = f(x, a(\delta t)), \quad x(0) = \phi(0) \quad (2)$$

の解 $x(t)$ はつぎの不等式を満足する.

$$\|x(t) - \phi(\delta t)\| < \varepsilon, \quad t \in [0, \delta^{-1}]. \quad (3)$$

この定理の証明は次節にまわして, まず定理の意味について考察しよう. 条件 (i) は $\phi(s)$ を (1) 式の平衡点とするようなパラメータ $a(s)$ が存在することを要請し, 条件 (ii) はその平衡点が局所的に安定であることを要請している. ただし, そのような安定性は, パラメータを $a = a(s)$ に固定した場合に対してのみ成立していることに注意する必要がある. このような平衡点を便宜上静的に安定な平衡点と呼ぼう. パラメータ a を変動させたとき, 静的に安定な平衡点の集まりである $\phi(s) (0 \leq s \leq 1)$ はもはや (1) 式の解ではないし, また (1) 式の解が $\phi(s)$ の近傍にとどまるという保証も一般にはない. この場合, (1) 式は変係数の微分方程式となり, 変係数の微分方程式の安定性は定係数の微分方程式の安定性の類推からは出てこないからである***. 定理 1 の結論は, パラメータ変動 $a(t)$ の速度を十分小さく行なえば, 静的に安定な平衡状態からなる道 $\phi(s)$ に任意に近い軌道を通して $\phi(0)$ から $\phi(1)$ への状態遷移を達成できる——ということを示している. 明らかに

$$\frac{d}{dt} a(\delta t) = \delta \dot{a}(\delta t)$$

であるから, 定理 1 の δ はパラメータの変動速度の order を与えている. したがって $\phi(0)$ から $\phi(1)$ まで遷移させるのに δ^{-1} だけの時間がかかる. 定理 1 の内容をまとめると, 「状態 A と状態 B を結ぶ静的に安定な平衡状態からなる道が存在すれば, パラメータ変動を十分ゆっくり行なうことにより, A から B の任意の近傍へ各時点で近似的な静的平衡状態を達成しつつ遷移させることができる。」

* このような写像を, 数学では R^n 上の滑らかな道と呼ぶ.

** 行列 A が安定であるとは, A のすべての固有値の実部が負であることをいう.

*** 極端な場合任意の t に対し $A(t)$ が安定行列でも, 方程式 $\dot{x} = A(t)x$ の自明解は安定とは限らない.

Fig. 1 A State Transition for a Simple Mechanical System

例として, **Fig. 1** に示すような損失のあるバネ—質量系に新しく質量 M の荷重を加えるプロセスを考えよう. 運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} + F(t) \quad (4)$$

で与えられる. ただし, k はバネ定数, μ はダッシュポットの抵抗を表わし, $F(t)$ は m にかかる荷重である.

$$a(s) = F(s) = Mgs \quad (0 \leq s \leq 1)$$

とおくと

$$\phi(s) = (Mg/k)s$$

となる*. (4) 式に $a(\delta t) = Mg\delta t$ を代入し $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ の初期条件の下で解を求めると

$$x(t) = \frac{Mg\delta}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} t + \left(\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2} \right) + \left(\frac{e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1^2} - \frac{e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2^2} \right) \right\} \quad (5)$$

を得る. ただし, λ_1, λ_2 は

$$m\lambda^2 + \mu\lambda + k = 0$$

の根である. (5) 式の第 3 項は t とともに 0 に近づくから,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{Mg}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \delta t + 0(s) \\ &= \phi(\delta t) + 0(\delta) \end{aligned}$$

を得る. すなわち, $\|x(t) - \phi(\delta t)\|$ は δ を小さくすればいくらでも小さくできる. δ の値による応答の差を図示したのが **Fig. 2** である.

3. 定理 1 の証明

定理 1 を証明するために, つぎの 2 つの補題を必要とする.

補題 1 連続関数 $f(t), g(t), h(t)$ が $t \in [a, b]$ で与えられ, つぎの不等式を満たすとする.

* 定理 1 の定義にしたがえば, $\phi(s)$ は 2 次元ベクトル $\begin{pmatrix} Mg/k \\ s \end{pmatrix}$ であるが, 速度に対応する ϕ の成分はここでは自明であるので, 考えていない.

Fig. 2 Illustration of the Responses for Different Speeds of Parameter Variation

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t h(t)f(t)dt, \quad h(t) > 0$$

このとき、任意の $t \in [a, b]$ で

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t h(s)g(s) \exp\left(\int_s^t h(u)du\right)ds$$

を満足する。

この補題は、微分方程式の教科書には必ず述べられている (たとえば文献 2) p. 7)

補題 2 $0 \leq s \leq 1$ で与えられた連続微分可能な行列 $A(s)$ が任意の s で、安定であるとする。このとき $\delta_0 > 0$ が存在し $0 < \delta \leq \delta_0$ なる任意の δ に対し、 $A(\delta t)$ の基本解行列 $X(t, \tau)^*$ は任意の $t \in [\tau, \delta^{-1}]$, $\tau > 0$ に対し

$$\|X(t, \tau)\| \leq M e^{-\lambda(t-\tau)} \quad (6)$$

を満足する。ここで、 M, λ は δ に無関係な正数、 $\|A\|$ (A は行列) は $\max \|Ax\|/\|x\|$ で定義する。

(証明) $A(s)$ は安定行列であるから、よく知られた安定理論の定理より

$$A'(s)P(s) + P(s)A(s) = -Q(s), \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (7)$$

を満足する正定行列 $P(s)$, $Q(s)$ が存在する。 $A(s) \in C^1$ であるから、 $P(s)$, $Q(s)$ も C^1 に属するものを選ぶことができる。ここで

$$\frac{dP(s)}{ds} = P_1(s)$$

とおく。 $P(s)$ の最小固有値を $\alpha_m(s)$ 、最大固有値を $\alpha_M(s)$ とおくと、任意の $x \in R^m$ に対し

$$0 < \alpha_m(s)\|x\|^2 \leq (x, P(s)x) \leq \alpha_M(s)\|x\|^2 \quad (8)$$

* $\frac{dX(t, \tau)}{dt} = A(\delta t)X(t, \tau)$, $X(\tau, \tau) = I$ を満たす行列である。

が成り立つ。同様に $Q(s)$ の最小固有値を $\beta_m(s)$ 、最大固有値を $\beta_M(s)$ とおくと、任意の $x \in R^n$ に対し

$$0 < \beta_m(s)\|x\|^2 \leq (x, Q(s)x) \leq \beta_M(s)\|x\|^2 \quad (9)$$

が成り立つ。対称行列 $1/2(P_1(s) + P_1'(s))$ の最大固有値を $\gamma_M(s)$ とし、

$$\delta_0 = \frac{1}{2} \min_{0 \leq s \leq 1} \left| \frac{\beta_m(s)}{\gamma_M(s)} \right| \quad (\gamma_M(s) \equiv 0 \text{ なら } \delta_0 \text{ は任意})$$

とおく。任意の $0 < \delta \leq \delta_0$ を満たす δ に対し、

$$R(s) = Q(s) - \frac{\delta}{2}(P_1(s) + P_1'(s)) \quad (10)$$

とおくと、任意の $x \in R^n$ に対して

$$(x, R(s)x) \geq (\beta_m(s) - \delta\gamma_M(s))\|x\|^2 \geq \frac{1}{2}\beta_m(s)\|x\|^2 \quad (11)$$

となることが容易にわかる。

微分方程式

$$\dot{x} = A(\delta t)x, \quad x(\tau) = x^1 \quad (12)$$

の解を $x(t)$ で表わすと、 $t \in [\tau, \delta^{-1}]$ で

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x(t), P(\delta t)x(t)) &= (x(t), A'(\delta t)P(\delta t)x(t)) \\ &\quad + (x(t), P(\delta t)A(\delta t)x(t)) + \delta(x(t), P_1(\delta t)x(t)). \end{aligned}$$

(7), (8), (11)式を用いると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x(t), P(\delta t)x(t)) &= -(x(t), R(\delta t)x(t)) \\ &\leq -\frac{1}{2}\beta_m(\delta t)\|x(t)\|^2 \\ &\leq -\frac{1}{2} \frac{\beta_m(\delta t)}{\alpha_M(\delta t)} (x(t), P(\delta t)x(t)) \end{aligned} \quad (13)$$

ここで

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \min_{0 \leq s \leq 1} \frac{\beta_m(s)}{\alpha_m(s)} > 0$$

とおき、(13)式を区間 $[\tau, t] (t \leq \delta^{-1})$ で積分すると、

$$(x(t), P(\delta t)x(t)) \leq (x^1, P(\delta \tau)x^1)e^{-\lambda_1(t-\tau)}$$

(12)式の解は $x(t) = X(t, \tau)x^1$ と書けるから、(8)式を用いて

$$\begin{aligned} \alpha_m(\delta t) \|X(t, \tau)x^1\|^2 &\leq (x(t), P(\delta t)x(t)) \\ &\leq \alpha_m(\delta \tau)e^{-\lambda_1(t-\tau)} \|x^1\|^2 \end{aligned} \quad (14)$$

を得る。したがって

$$M = \sqrt{\frac{\alpha_M}{\alpha_m}}, \quad (\alpha_M = \max_{0 \leq s \leq 1} \alpha_m(s), \quad \alpha_m = \min_{0 \leq s \leq 1} \alpha_m(s))$$

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{2}$$

とおくと、(14)式より

$$\|X(t, \tau)x^1\| \leq Me^{-\lambda(t-\tau)} \|x^1\|$$

を得る。 x^1 は任意だから、これは(6)式を意味している。以上で証明は完了した。

(定理 1 の証明) $x(t)$ を(2)式の解とし、

$$\eta(t) = x(t) - \phi(\delta t)$$

とおく。ただし、 δ は実数である。(2)式へ代入すると

$$\delta \dot{\phi}(\delta t) + \dot{\eta}(t) = f(\phi(\delta t) + \eta(t), a(\delta t)) \quad (15)$$

$f(x, a)$ は解析的であるから

$$\begin{aligned} f(\phi(\delta t) + \eta(t), a(\delta t)) &= f(\phi(\delta t), a(\delta t)) \\ &\quad + f_x(\phi(\delta t), a(\delta t))\eta(t) + h(\eta(\delta t), \delta t) \end{aligned}$$

と書ける。ここで、 $h(x, \delta t)$ は任意の t に対し

$$h(x, \delta t) = O(\|x\|) \quad (16)$$

である。したがって(15)式は

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= f_x(\phi(\delta t), a(\delta t))\eta(t) + h(\eta(t), t) - \delta \dot{\phi}(\delta t) \\ \eta(0) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

行列 $f_x(\phi(\delta t), a(\delta t))$ の基本解行列を $X(t, \tau)$ とすると、(17)式の解は

$$\eta(t) = \int_0^t X(t, \tau) \{h(\eta(\tau), \tau) - \delta \dot{\phi}(\delta \tau)\} d\tau$$

と表わすことができる。仮定(ii)と補題 2 より、 $\delta_0 > 0$ が存在して

$$0 < \delta \leq \delta_0 \quad (18)$$

ならば、(6)式が成り立つ。したがって、(18)式を満たすように δ を選んでおけば

$$\|\eta(t)\| \leq \int_0^t Me^{-\lambda(t-\tau)} (\|h(\eta(\tau), \tau)\| + \delta \|\dot{\phi}(\delta \tau)\|) d\tau \quad (19)$$

が成立する。いま

$$0 < \varepsilon_1 < \frac{\lambda}{M}$$

を満たす ε_1 をとる。(16)式より、ある $\delta_1 > 0$ が存在し

$\|x\| \leq \delta_1$ ならば、任意の $t \in [0, \delta^{-1}]$ に対し

$$\|h(x, \delta t)\| \leq \varepsilon_1 \|x\|$$

を満たすようにできる。したがって、もし

$$\|\eta(\tau)\| \leq \delta_1, \quad 0 \leq \tau < t \quad (20)$$

ならば、(19)式より

$$\|\eta(t)\| \leq \int_0^t Me^{-\lambda(t-\tau)} (\varepsilon_1 \|\eta(\tau)\| + \delta \|\dot{\phi}(\delta \tau)\|) d\tau$$

ここで

$$v(t) = e^{\lambda t} \|\eta(t)\|, \quad K = \max_{0 \leq s \leq 1} \|\dot{\phi}(s)\|$$

とおくと、

$$v(t) \leq M\varepsilon_1 \int_0^t v(\tau) d\tau + \frac{\delta MK}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1)$$

補題 1 より、

$$\begin{aligned} v(t) &\leq \frac{\delta MK}{\lambda} \left[(e^{\lambda t} - 1) + M\varepsilon_1 \left(\frac{e^{\lambda t} - e^{M\varepsilon_1 t}}{\lambda - M\varepsilon_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1 - e^{M\varepsilon_1 t}}{M\varepsilon_1} \right) \right] \leq \frac{\delta MK}{\lambda} \left(1 + \frac{M\varepsilon_1}{\lambda - M\varepsilon_1} \right) e^{\lambda t} \end{aligned}$$

したがって

$$\|\eta(t)\| \leq \frac{\delta MK}{\lambda - N\varepsilon_1} \quad (21)$$

したがって、 δ として

$$\delta \leq \min \left(\frac{\lambda - M\varepsilon_1}{MK}, \frac{\lambda - M\varepsilon_1 \delta_1}{MK} \right)$$

を満たすものを選べば、まず(21)式より

$$\|\eta(t)\| \leq \delta_1 \quad (22)$$

が成立するから、(20)式の仮定とあわせて任意の t で(22)式が成立し、上の推論は $[0, \delta^{-1}]$ のすべてにわたって妥当となる。

したがって、やはり(21)式より

$$\|\eta(t)\| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq \delta^{-1}$$

が成立する。以上で定理 1 は証明された。

4. 可制御性との関連

定理 1 と可制御性との関連を考察しよう。ここでは、(1)式の a を制御変数と考える。任意に与えられた 2 点 $x^0, x^1 \in R^n$ に対して、定理 1 の条件(i), (ii) を満たし、かつ

$$\phi(0) = x^0, \quad \phi(1) = x^1 \quad (23)$$

となるような道 $\phi(s) \in C^1$ が存在するならば、定理 1 よりある制御入力 $a(t)$ が存在して、システムの状態を x^0 から x^1 の任意の近傍へ遷移させることができる。

一方、Markus らの結果³⁾によると、

$$(1) \quad f(x^1, a^1) = 0$$

$$(2) \quad \text{rank}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n$$

ただし $A = f_x(x^1, a^1)$, $B = f_a(x^1, a^1)$

Fig. 3 A Model for Two Flow Heat Exchanger⁴⁾

であれば x^1 のある近傍 U が存在して、 U の任意の点から x^1 に有限時間で到達させる制御入力が存在することが知られている。したがって、この結果と定理 1 を結びつけると、ただちにつぎの結果を得る。

定理 2 与えられた 2 点 $x^0, x^1 \in R^n$ に対し、定理の条件 (i), (ii) を満たし、また (23) 式も満足するような道 $\phi(s)$ が存在するとする。もし

$$\text{rank}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n \quad (24)$$

$$A = f_x(x^1, a(1)), \quad B = f_a(x^1, a(1))$$

ならば、 x^0 を x^1 に遷移させる制御入力が存在する。

定理 1 の条件 (i), (ii) は、 x^0 と x^1 の役割りを入れ替えても成立する (s の代わりに $1-s$ を考えればよい)。したがって、(24) 式で $A = f_x(x^0, a(0))$, $B = f_a(x^0, a(0))$ とおくことができれば、 x^1 を x^0 に遷移させる制御入力が存在することが結論される。このことは準静的過程の可逆性を反映している。

例として、Fig. 3 のような 2 流体混合形熱交換器⁴⁾を考えてみよう。ダイナミクスはつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha(u_1 - x_1) + \beta(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \beta(x_1 - x_2) + \gamma(u_2 - x_2) \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、 x_1, x_2 は各槽の温度、 u_1, u_2 は各槽の入流の温度である。上槽への入力流量を制御する場合は、(25) 式の α が制御変数になる。(25) 式は x に関して線形であるから、定理 1 の f_x は x に依存せず

$$f_x = \begin{bmatrix} -\alpha(t) - \beta & \beta \\ \beta & -\beta - \gamma \end{bmatrix} \quad (26)$$

となる。これは、 $\alpha(t), \beta, \gamma$ が正ならば常に安定である。すなわち、どのような経路をたどっても準静的過

程が可能である。この結論が、すべての安定な線形システムに対して成立することは明らかである。もし (25) 式で、下槽の入力温度にフィードバックループが存在し、

$$u_2 = g(x_1, x_2), \quad g_{x_1} > 0, \quad g_{x_2} > 0$$

と表わされるならば、(26) 式の代わりに

$$f_x = \begin{bmatrix} -\alpha(t) - \beta & \beta \\ \beta + \gamma g_{x_1} & -\beta - \gamma(1 - g_{x_2}) \end{bmatrix}$$

となり、結局、ラウスの判定条件より

$$\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\beta} \right) \alpha(t) + 1 > g_{x_1} + g_{x_2} \left(1 + \frac{\alpha(t)}{\beta} \right) \quad (27)$$

が安定条件となる。(27) 式を満たす経路に対して、準静的過程が可能である。より複雑なシステムに対しても、定理 1 の条件 (ii) はラウスの判定条件から容易に検証できる。

5. あとがき

一般的な非線形のダイナミカルシステムに対して、静的に安定な平衡状態からなる状態空間の軌道に沿って、熱力学という準静的過程が可能であることを示した。この結論は、準静的過程という物理的な概念に対する 1 つの数学的な基礎を与えており、ある意味では当然の結果とも考えられる。準静的過程と非線形システムに対する可制御性の問題についても考察し、1 つの有用な結果を得た。本論文の結果は、ゆるやかに変動するパラメータをもった各種のシステムや、特異摂動 (singular perturbation) の問題にも応用可能であるが、それらについては稿を改めて報告するつもりである。

終わりに、有益な御討論をしていただいた坂和愛幸教授に深謝する。

参考文献

- 1) 井上 健ほか：「現代物理学の基礎 4」, 岩波書店, 昭 47.
- 2) A. Halanay: Differential Equations, Academic Press, New York, 1966.
- 3) L. Markus & E. B. Lee: "On the Existence of Optimal Controls," Transactions of the ASME, J. of Basic Engineering, Vol. 84, pp. 13~22, 1962.
- 4) 矢木 栄, 西村 肇：「化学プロセス工学」, 丸善, 昭 44.