線形離散システムのオブザーバの一構成法

西村 卓也・長田 朗

近畿大学理工学部 東大阪市小若江 321
(昭和 48 年 2 月 26 日 受付)

One Method of Constructing Observers for Linear Discrete-Time Systems

Takuya NISHIMURA and Akira NAGATA

(Faculty of Science and Technology, Kinki University, Higashiosaka)

(Received February 26, 1973)

In this paper we consider a method of constructing observers for linear time-invariant, discrete-time systems. The derived results are as follows.

It is assumed that a system S to be observed is completely observable. Then it is shown that an observer for S always can be constructed. And its constructing method is described precisely. The order of the observer is $n-m$, where n is the order of the state of S and m is that of the output. The number of steps necessary to make the output of the observer coincide with the state of S from the beginning of observation is ν_0-1 , where ν_0 is the observability index of S . This observer is a minimum-time and low-order observing system.

The behavior of this observer is also considered when it is used to observe the linear functions of the state of S .

1. ま え が き

線形離散システムの状態観測においては、有限ステップの観測データで偏差零の状態決定が可能であるという特長がある。このことは、線形システム理論において状態フィードバックを仮定して得られる多くの手法の実用化などに対して、1つの利点として挙げることができる。

最短時間での状態観測を目的として、筆者らは先に観測システムをモデルの形で構成する方法を考察した¹⁾。本論文ではこの結果を利用して、最短時間でかつ低次元の観測システムとして、いわゆるオブザーバ²⁾の考えを導入し、その構成法について考察する。

連続システムの場合に比べて、離散システムのオブザーバについてのこれまでの研究は少なく、1出力システムを対象に市川³⁾が、多出力システムで正則な転移行列をもつ場合を対象に井上⁴⁾が、また非正則な転移行列をもつ場合の考察が舟橋⁵⁾によって報告されている程度で、一般的なシステムを対象にしたオブザーバの統一的な構成法として十分であるとはいえない

い。

本論文で得られるオブザーバでは、観測モデルによる場合に比べて、状態決定のためのステップ数が1つ減少することが確かめられる。さらに、このオブザーバを用いて状態の線形関数を観測する場合について考察し、その決定のためのステップ数を評価している。

2. システムおよび問題の記述

2.1 システムの記述

観測の対象となるのは線形時不変離散システム、

$$S: \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad k=0, 1, \dots \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^p$ ($p \leq n$), $\mathbf{y} \in R^m$ ($m \leq n$) であり、 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ はそれぞれ適当なサイズの実定数行列である。

S に対してつぎの仮定を設ける。

[仮定] (i) S は完全可観測である。すなわち、

$$\mathbf{U}_n' \triangleq [\mathbf{C}', \mathbf{A}'\mathbf{C}', \dots, \mathbf{A}'^{n-1}\mathbf{C}'] \quad ('; \text{転置})$$

$$\implies \text{rank } \mathbf{U}_n = n \quad (3)$$

(ii) $\mathbf{C}$ は full rank である。すなわち、

$$\text{rank } C = m \quad (4)$$

仮定(i)は、この論文においては S のオブザーバが構成できるための基本的条件となる本質的仮定であるが、仮定(ii)は単に説明の便宜上のもので、本質的な仮定ではない。

以下の考察のために、若干の記号を準備しておく。 S の可観測指数: $\nu_0 \triangleq \min\{\nu: \text{rank } U_\nu = n\}$, 行列 A の値域: $\text{range } [A]$, 行列 A の零空間: $\text{null } [A]$, $V_\mu \triangleq [B, AB, \dots, A^{\mu-1}B]$

2.2 オブザーバの定義

S の入力および出力を、それ自身の入力としてもつづきのような S の状態の観測システム Σ を考える。

$$\Sigma: z(k+1) = Dz(k) + Ey(k) + Gu(k) \quad (5)$$

$$v(k) = Jz(k) + Ly(k) \quad (6)$$

ここで、 $z \in R^\lambda$ ($\lambda: \Sigma$ の次数), $v \in R^n$ とし、 D, E, G, J および L は、それぞれ適当なサイズの実定数行列である。

[定義 1] Σ において、任意の k_0 および任意の $x(k_0) \in R^n$, $z(k_0) \in R^\lambda$ に対して、一定のステップ数 N (これを決定ステップ数と呼ぶ) で、

$$v(k_0+k) = x(k_0+k) \quad \forall k \geq N \quad (7)$$

とすることができるとき、 Σ は S のオブザーバであるといい、 S_o で表わす。

S_o に対しては、(a) 最短時間観測システムであること (N が最小であること), (b) 最小次元観測システムであること (λ が最小であること), が望ましい。最小決定ステップ数 $N_{\min}$ および構成の最小次元 $\lambda_{\min}$ については、つぎの補題を得る。

[補題 1]

$$(i) \quad N_{\min} = \nu_0 - 1$$

$$(ii) \quad n - m \geq \lambda_{\min} \geq$$

$$\dim \{ \text{range } [A^{\nu_0-1}, V_{\nu_0}] \cap \text{null } [C] \}$$

とくに、 A が正則なときおよび S が完全可制御⁷⁾ (可到達) なときは、 $\lambda_{\min} = n - m$ である。

(証明) 付録参照。

本論文においては、最小次元性よりも構成方法の簡単に重点を置いて、

$$N = \nu_0 - 1 (= N_{\min}), \quad \lambda = n - m (\geq \lambda_{\min}) \quad (8)$$

なるオブザーバ S_o の 1 構成法を述べる。また、補題 1 の(ii)より考えて、 $n - m$ が最小次元である場合も決して少なくない。

2.3 オブザーバの構成問題

Σ において、(7)式が成立し、さらに D, E, G, J および L がつぎの関係式を満足するものとする。

$$\tilde{Y}A - D\tilde{Y} = EC \quad (9)$$

$$G = \tilde{Y}B, \quad J = \tilde{N}, \quad L = \Omega_0 \quad (10)$$

ここで、 $\tilde{Y}$ は $(n \times n)$ 行列 $[C', \tilde{Y}']$ が正則となるような $(n-m) \times n$ 実定数行列であり、

$$\begin{bmatrix} m & n-m \\ n-m & n-m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C' \\ \tilde{Y}' \end{bmatrix}^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} \Omega_0 & \tilde{N} \\ m & n-m \end{bmatrix} \quad (11)$$

である。さらに、 Σ の出力 v と S の状態 x との誤差を、

$$e(k) \triangleq v(k) - x(k) \quad (12)$$

とおくとき、つぎの結果を得る。

[補題 2]

$$(i) \quad e(k+1) = \tilde{N}D\tilde{Y}e(k) \quad (13)$$

(ii) $\tilde{N}D\tilde{Y}$ がべき零行列となるための必要十分条件は、 D がべき零行列となることであり、両者のべき零指数は一致する。

(証明) (i) 上記の関係を直接代入して計算することによって、示すことができる。すなわち、

$$\begin{aligned} e(k+1) &= v(k+1) - x(k+1) \\ &= \tilde{N}Dz(k) + \tilde{N}EC_x(k) + \tilde{N}\tilde{Y}B_u(k) + \Omega_0CA_x(k) \\ &\quad + \Omega_0CB_u(k) - A_x(k) - B_x(k) \end{aligned} \quad (1), (2), (5), (6), (10)$$

$$\begin{aligned} &= \tilde{N}Dz(k) + \tilde{N}EC_x(k) - \tilde{N}\tilde{Y}A_x(k) \\ &\quad (\because (11) \text{ 式より, } \Omega_0C + \tilde{N}\tilde{Y} = I_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \tilde{N}Dz(k) - \tilde{N}D\tilde{Y}x(k) \\ &= \tilde{N}D\tilde{Y}(v(k) - x(k)) = \tilde{N}D\tilde{Y}e(k) \end{aligned}$$

なぜならば、(11)より、 $\tilde{Y}\tilde{N} = I_{n-m}$, $\tilde{Y}\Omega_0 = 0$

$$\therefore \tilde{Y}v(k) = \tilde{Y}\tilde{N}z(k) + \tilde{Y}\Omega_0y(k) = z(k)$$

となるからである。

(ii) 同じく(11)式より、 $\tilde{Y}\tilde{N} = I_{n-m}$ であるから、

$$(\tilde{N}D\tilde{Y})^j = \tilde{N}D\tilde{Y}\tilde{N}D\tilde{Y}\dots\tilde{N}D\tilde{Y} = \tilde{N}D^j\tilde{Y}$$

となることから明らかである。(証明終わり)

したがって、このとき D に(9)式を満足するべき零指数 N のべき零行列を選ぶことができれば、任意の初期誤差 $e(k_0) \in R^n$ に対して、

$$\begin{aligned} e(k+k_0) &= (\tilde{Y}D\tilde{N})^k e(k_0) = \tilde{Y}D^k\tilde{N}e(k_0) \\ &= 0 \quad \forall k \geq N \end{aligned} \quad (14)$$

となり、 Σ は S_o となる。そこで、 S のオブザーバ S_o を構成する問題はつぎのように与えられる。

[オブザーバの構成問題] S が与えられたとき、

(i) $[C', \tilde{Y}']$ が正則となるような $(n-m) \times n$ 行列 $\tilde{Y}$ を選べ。

(ii) それによって決まる方程式(9)を満足するべき零指数 N のべき零行列 D , および行列 E を求めよ。

このように(9)式は S_o の構成に重要な役割りを果たすので、以下ではこれを S_o の基本方程式と呼ぶ。

3. オブザーバの構成

上に要求されたオブザーバを構成するには、まず基本方程式(9)を満足するべき零行列を見つけなければならない。そのための基本として、文献1)で示した最短時間観測モデルにおける行列の構成法を利用する。以下では、まず文献1)にしたがって1つのべき零行列の構成手順を略記する。つぎに、これを基本方程式に照らして変形し、所要のオブザーバを構成する。

仮定(i)および可観測指数 ν_0 の定義により、 $(m\nu_0 \times n)$ 行列 U_{ν_0} の行ベクトルの中に1次独立なもの n 個ある。これを最初の行から順番に選り出して、

$$\left. \begin{array}{l} c_1, c_2, \dots, c_m \\ c_1 A, c_2 A, \dots, c_m A \\ \vdots \\ c_1 A^{r_m-1}, \dots, c_m A^{r_m-1} \\ \vdots \\ \vdots, c_2 A^{r_2-1} \\ \vdots \\ c_1 A^{r_1-1} \end{array} \right\} \quad (15)$$

とする。ただし、 c_j は C の j 番目の行ベクトルである。これらは必要に応じて適当に添字をつけ替えることにより、

$$\left. \begin{array}{l} \nu_0 = r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_m \geq 1 \\ r_1 + r_2 + \dots + r_m = n \end{array} \right\} \quad (16)$$

としても一般性を失わない。これらの行ベクトルで正則な $(n \times n)$ 行列 Q およびその逆行列 Q^{-1} をつぎのように構成する。

$$\left. \begin{array}{l} Q_i \triangleq \begin{bmatrix} c_1 A^i \\ \vdots \\ c_{b_i} A^i \end{bmatrix} \text{ for } i=0, 1, \dots, \nu_0-1 \\ \quad \quad \quad (b_i \times n) \\ m = b_0 = \dots = b_{r_m-1} > b_{r_m} \geq \dots \geq b_{\nu_0-1} \\ b_0 + b_1 + \dots + b_{\nu_0-1} = n \\ Q \triangleq \begin{bmatrix} Q_0 \\ \vdots \\ Q_{\nu_0-1} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ \tilde{Q} \end{bmatrix}, Q_0 = C, \tilde{Q} \triangleq \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_{\nu_0-1} \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q^{-1} \triangleq H \triangleq [H_0, H_1, \dots, H_{\nu_0-1}] \\ H_i \triangleq [h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{ib_i}] (n \times b_i) \\ i=0, 1, \dots, \nu_0-1 \end{array} \right\} \quad (18)$$

ここで、 $h_{i(j) \cdot j}$, $j=1, \dots, m$; $i(j)=0, \dots, r_j-1$ は行ベクトル $c_j A^{i(j)}$ に対応する列ベクトルである。 $h_{i(j) \cdot j}$ のうち各 j について最後のものは $h_{(r_j-1) \cdot j}$ であるが、これらに A を乗じて列ベクトル $w_{i(j) \cdot j}$ を、

$$w_{i(j) \cdot j} \triangleq A^{r_j-1-i(j)} h_{(r_j-1) \cdot j} \quad (19)$$

$j=1, \dots, m$; $i(j)=0, 1, \dots, r_j-1$ と定義する。これらを用いて、 $(n \times n)$ 行列 W をつぎのように構成する。

$$\left. \begin{array}{l} W \triangleq [W_0, W_1, \dots, W_{\nu_0-1}] \triangleq [W_0, \tilde{W}] \\ \tilde{W} \triangleq [W_1, \dots, W_{\nu_0-1}] \\ W_i \triangleq [w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{ib_i}] (n \times b_i) \\ i=0, 1, \dots, \nu_0-1 \end{array} \right\} \quad (20)$$

Q に対して一意的に定まる行列 W は正則であり、次式を満足することが知られている¹⁾。

$$QW = \begin{bmatrix} CW_0 & C\tilde{W} \\ \tilde{Q}W_0 & \tilde{Q}\tilde{W} \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ n-m \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & * & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

(対角要素がすべて1である $(n \times n)$ 逆三角行列)

ただし、 $*$ は零または非零要素を代表するものとす。したがって、 $(m \times m)$ 行列 CW_0 もまた正則であり、対角要素がすべて1の逆三角行列である。

行列 W を基本にして、つぎのような行列が構成できる。

【補題 3】¹⁾ $(n \times m)$ 行列 K および $(n \times n)$ 行列 Ψ を、

$$K \triangleq W_0(CW_0)^{-1} \quad (22)$$

$$\Psi \triangleq A - AKC \quad (23)$$

によって構成するとき、 Ψ はべき零指数が ν_0 のべき零行列となる。

最短時間観測モデルにおいては、上の行列 K を入力ゲイン行列として与えることにより、システム S との状態偏差をべき零転移行列 Ψ の自由運動に従わせることを可能にしている¹⁾。したがって、この観測モデルの決定ステップ数は ν_0 である。

補題 3 の結果を基本方程式に関連づけるものとして、つぎの結果を導びく。

【補題 4】

$$(i) \text{ rank}[I_n - KC] = n - m \quad (24)$$

$$(ii) \text{ rank}[C', \tilde{Y}'] = n \quad (25)$$

$$\text{ただし、} \tilde{Y} \triangleq Z\tilde{T} \quad (26)$$

$\tilde{T} \triangleq (n \times n)$ 行列 $(I_n - KC)$ の1次独立な行ベクトルで構成される $(n-m) \times n$ 行列、

$Z \triangleq$ 任意な $(n-m) \times (n-m)$ 正則行列。

(証明) (i) $\text{rank}[W_0] = m$, および(22)式より、 $(I_n - KC)W_0 = 0$ (27)

であるから、 $(I_n - KC)$ の零空間の次元は m 以上、すなわち、 $\text{rank}[I_n - KC] \leq n - m$ がいえる。

他方、 $\text{rank}[KC] \leq m$ から、 $\text{rank}[I_n - KC] \geq n - m$ も明らかである。

(ii) 上の結果により、 $\text{rank} \tilde{Y} = n - m$ である。 $\tilde{Y}$ の行ベクトルの中に C の行ベクトルに従属なものがあるとすれば、 $(n-m) \times m$ 行列 $\Gamma \neq 0$ が存在して、

$$\tilde{Y} = \Gamma C, \Gamma \neq 0 \quad (28)$$

が成立しなければならない。上式の両辺に右から W_0 をかけて次式を得る。

$$\tilde{Y} W_0 = \Gamma C W_0 \quad (29)$$

左辺は、 $\tilde{Y} W_0 = Z \tilde{T} W_0 = 0$ ($\because \tilde{T}$ の定義と (27) 式より)。また右辺において $C W_0$ は正則であるから、(29) 式が成立するためには $\Gamma = 0$ でなければならない、(28) 式の仮定に反する。(証明終わり)

補題4により、基本方程式(9)の決定に必要な1つの行列 Y の構成が明らかとなるが、

$$\text{rank}[\tilde{Y}', (I_n - KC)'] = \text{rank} \tilde{Y}' \quad (30)$$

であることから、 $n \times (n-m)$ 行列 $\tilde{X}$ を

$$\tilde{X} \tilde{Y} = I_n - KC \quad (31)$$

の解として定義すれば、 $\tilde{X}$ は存在して、容易に計算することができる。

このとき、 S のオブザーバ S_0 をつぎのように構成することができる。

[定理1] Σ において、

$$\lambda \triangleq n-m$$

$$D \triangleq \tilde{Y} A \tilde{X}, E \triangleq \tilde{Y} A K, G \triangleq \tilde{Y} B \quad (32)$$

$$J \triangleq \tilde{A}, L \triangleq O_0 \quad (33)$$

と選ぶとき、 Σ は決定ステップ数 N を、

$$N = \nu_0 - 1 \quad (34)$$

とするオブザーバ S_0 となる。ただし、 $\tilde{Y}$ を (26) 式で与えるとき、 $\tilde{A}, O_0$ および $\tilde{X}$ はそれぞれ (11) 式および (31) 式で与えられる行列である。

(証明) まず、(32) 式の D がべき零指数 $\nu_0 - 1$ のべき零行列であることを示す。(31) 式に左から A をかけると、

$$A \tilde{X} \tilde{Y} = A - AKC = \Psi$$

となるから、 $A \tilde{X} \tilde{Y}$ はべき零指数 ν_0 のべき零行列である。一方、 $\tilde{Y} A \tilde{X}$ のべき乗について、

$$(\tilde{Y} A \tilde{X})^{\nu_0-1} = \tilde{Y} (A \tilde{X} \tilde{Y})^{\nu_0-2} A \tilde{X}$$

は明らかである。ところが、 $\tilde{X}; n \times (n-m)$ および $\text{rank}[\tilde{X} \tilde{Y}] = n-m = \text{rank} \tilde{Y}$ より、 $\text{rank}[\tilde{X}] = \text{rank}[\tilde{X} \tilde{Y}]$ がいて、次式が成立する。

$$\text{range}[A \tilde{Y}] = \text{range}[A \tilde{X} \tilde{Y}]$$

したがって、上式と文献1)の結果より、

$$\text{range}[(A \tilde{X} \tilde{Y})^{\nu_0-2} A \tilde{X}] = \text{range}[(A \tilde{X} \tilde{Y})^{\nu_0-1}]$$

$$= W_0 \alpha_0 \quad \alpha_0 \in R^m$$

となり、これに、 $\tilde{Y} W_0 = 0$ なる関係を用いれば、

$$(\tilde{Y} A \tilde{X})^{\nu_0-1} = 0$$

を得る。つぎに、(32) 式のように選んだ D, E が基本方程式(9)を満足することは、(31)式に左から $\tilde{Y} A$ をかけて、(32)式の関係を用いて整理すれば、次式が成立することから示される。

$$\tilde{Y} A - D \tilde{Y} = \tilde{Y} A K C = E C \quad (\text{証明終わり})$$

以上の結果により、仮定(i), (ii)を満足するシステム S に対して、常にオブザーバ S_0 を構成することができ、 S_0 の決定ステップ数は $\nu_0 - 1$ であることが知られる。この決定ステップ数は、最短時間観測モデルの決定ステップ数が ν_0 であること¹⁾ に対して、オブザーバ S_0 の大きな利点を与えていることになるが、観測ステップ数(入出力観測データの長さ)との関連は、つぎのように説明できる。すなわち、モデルでは $0 \sim \nu_0 - 1$ の ν_0 ステップの入出力観測データをモデルに与えることにより、 ν_0 時点での状態を決定できるように構成されているのに対し、ここで述べたオブザーバ S_0 では $0 \sim \nu_0 - 1$ の ν_0 ステップの入出力観測データを必要としながらも、 $\nu_0 - 1$ 時点でのデータはそのまま $\nu_0 - 1$ 時点での状態決定に利用し得るように構成されているためである。

オブザーバ S_0 の構成には、これ自身の状態の任意な座標変換に対する自由度が含まれるが、これは(26)式における行列 Z の選択の自由度に相当する。

4. 線形関数観測への拡張

ここでは、状態フィードバックシステムの構成などにおいて要求される状態の線形関数 Fx の観測を、上記のオブザーバ S_0 を用いて行なう場合、これがいかにかに動作するかについて考える。

行列 F は $(d \times n)$ 実定数行列とする。 F に対して、(20)式で導入した行列 $W_i; i=1, \dots, \nu_0 - 1$ を用いて、つぎのような正整数 δ_0 を定義する。

$$\delta_0 \triangleq \min\{\delta; F W_\delta \neq 0 \quad 1 \leq \delta \leq \nu_0 - 1\} \quad (35)$$

特別な場合として、 $F W_\delta = 0 \quad \forall \delta = 1, \dots, \nu_0 - 1$ のときは、 $\delta_0 \triangleq \nu_0$ とすれば、 $\delta_0; 1 \leq \delta_0 \leq \nu_0$ は常に存在し一意的に定まる。

Fx の観測システムとして、 S_0 の出力 v に F を作用させたシステム S_F を次式で与える。

$$S_F: z(k+1) = E z(k) + E y(k) + G u(k) \quad (36)$$

$$s(k) = F v(k) = F J z(k) + F L y(k) \quad (37)$$

ただし、 D, E, G, J および L はそれぞれ (32), (33) 式によって与えられる行列である。

任意の k_0 に対して、最小ステップ数 N_F で、

$$F x(k_0 + k) = s(k_0 + k) \quad \forall k \geq N_F \quad (38)$$

とすることができる。と、 S_F を線形関数 Fx に対する線形関数オブザーバと呼ぶことにすれば、つぎの結果を得る。

[定理2] オブザーバ S_0 から、(36), (37) 式の関係によって構成される観測システム S_F は線形関数オブザーバであり、その決定ステップ数 N_F は、

$$N_F = \nu_0 - \delta_0 \quad (39)$$

である。ここで、 δ_0 は (35) 式で与えられる。

(証明) S_F の出力 $\mathbf{s}$ と線形関数 $\mathbf{F}\mathbf{x}$ との誤差を $\bar{\mathbf{e}}$ とおくと、つぎの関係は明らかである。

$$\bar{\mathbf{e}}(k) \triangleq \mathbf{s}(k) - \mathbf{F}\mathbf{x}(k) \quad (40)$$

$$= \mathbf{F}(\mathbf{v}(k) - \mathbf{x}(k)) = \mathbf{F}\mathbf{e}(k) \quad (41)$$

一方、任意の $\mathbf{e}(k_0)$ 、すなわち $\bar{\mathbf{e}}(k_0)$ に対して、補題 2、定理 1 およびその証明より、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}(k_0 + N_F) &= \mathbf{F}(\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{D}\hat{\mathbf{Y}})^{N_F} \mathbf{e}(k_0) = \mathbf{F}\mathbf{Q}\mathbf{D}^{N_F} \mathbf{Y}\mathbf{e}(k_0) \\ &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}})^{N_F-1} \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}}\mathbf{e}(k_0) \\ &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{Y}}\hat{\mathbf{X}})^{N_F} \mathbf{e}(k_0) \end{aligned}$$

しかも、文献 1) より、

$$\begin{aligned} \text{range}[(\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}})^{N_F}] &= \mathbf{W}_0 \cdot \beta_0 + \mathbf{W}_1 \beta_1 + \dots + \\ &\quad + \mathbf{W}_{\nu_0-1-N_F} \beta_{\nu_0-1-N_F} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\beta_\tau \in R^{b_\tau} \quad \tau=0, \dots, \nu_0-1-N_F$$

である。

さて、 $N_F \triangleq \nu_0 - \delta_0$ とおくと、 $\hat{\mathbf{Y}}\mathbf{W}_0 = \mathbf{0}$ より、

$$\mathbf{F}\hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{Y}}\mathbf{W}_0 = \mathbf{0}$$

がいえる。さらに、(11) 式および (21) 式より、

$$\mathbf{I}_n - \mathbf{Q}_0 \mathbf{C} + \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{Y}}, \quad \mathbf{C}\mathbf{W}_1 = \dots = \mathbf{C}\mathbf{W}_{\nu_0-1} = \mathbf{0}$$

であるから、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{Y}}\mathbf{W}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{I}_n - \hat{\mathbf{Q}}_0 \mathbf{C})\mathbf{W}_1 \\ &= \mathbf{F}\mathbf{W}_1 = \mathbf{0}, \dots, \mathbf{F}\hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{Y}}\mathbf{W}_{\delta_0-1} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

($\because$ (35) 式の δ_0 の定義より)

したがって、 $\bar{\mathbf{e}}(k_0 + \nu_0 - \delta_0) = \mathbf{0}$ がいえる。

逆に $\bar{\mathbf{e}}(k_0 + N_F) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{e}(k_0)$ または $\bar{\mathbf{e}}(k_0)$ となるためには $N_F = \nu_0 - \delta_0$ でなければならないことは明らかである。(証明終わり)

したがって、上のように構成した S_F は $\mathbf{F}\mathbf{x}$ の観測に対して線形関数オブザーバになっている。 $\mathbf{F}$ の決定ステップ数 N_F が $N_F \leq N$ とできる理由は、つぎのように説明される。 $\mathbf{F}\mathbf{x}$ を観測する場合、 $\mathbf{F}$ の零空間に含まれる状態の成分は観測する必要がなくなり、この分だけ決定ステップ数は小さくなる可能性が生じる。(35) 式の δ_0 の定義において、 $\mathbf{F}\mathbf{W}_\delta \neq \mathbf{0}$ ということは、 $\mathbf{W}_\delta$ の列ベクトルによって張られる部分空間が $\mathbf{F}$ の零空間に含まれないことを意味している。とくに、 $\hat{\mathbf{W}}$ の列ベクトルによって張られる部分空間が $\mathbf{F}$ の零空間に含まれるときは $N_F = 0$ 、すなわち $\mathbf{F}\mathbf{x}$ は S の出力 $\mathbf{y}$ から直接観測可能となる。

ここで述べたような線形関数オブザーバ S_F は、もちろん最小次元観測システムであるとは限らない。

5. 例題

簡単な例を示す。 S をつぎのように与える。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} c_1' & c_2' \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$n=5, p=1, m=2$ $\mathbf{A}$: 非正則

S : 完全可観測, 可観測指数 $\nu_0=3$, $\mathbf{C}$: full rank

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \\ 1 & 0 & 1.8 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{matrix} c_1' \\ c_2' \\ c_1 \mathbf{A} \\ c_2 \mathbf{A} \\ c_1 \mathbf{A}^2 \end{matrix} \begin{matrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{matrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & -7.5 & -1.25 \\ 0 & -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0.8 & 2 & 1 & 2.5 & 1.25 \\ 0 & 5 & 0 & 7.5 & 1.25 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -2 \\ 0.8 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -0.8 & 3 & 1 & -1.8 & 3 \\ 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0.8 \\ -0.64 & -1.6 & 0.8 & -0.64 & -1.6 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1.8 & 0 & 0 & -1.2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_5 - \mathbf{K}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ -0.8 & -2 & 1 & -0.8 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \text{rank} \\ [\mathbf{I}_5 - \mathbf{K}\mathbf{C}] = 3 \\ (=n-m) \end{matrix}$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ -0.8 & -2 & 1 & -0.8 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} \triangleq \mathbf{I}_3$$

$$\hat{\mathbf{X}}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以上の準備により、定理 1 を用いて S_δ はつぎのようになる。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 1.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1.2 \\ -0.8 & -0.4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{A}, L = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -2 \\ 0.8 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \Omega_0$$

上のように入めたオブザーバ S_0 の動作をつぎに示す。

k	u	x'					v'		
0	0	1	0	1	0	1	-3	-2	2.8
1	1	2	0	0.8	1	0.6	2	0	1.6
2	0	2.8	1	0.64	0.6	1.36	2.8	1	0.64
3	0	3.44	0.4	0.512	1.36	0.816	3.44	0.4	0.512

したがって、 $N = \nu_0 - 1 = 2$ が検証できる。

つぎに、線形汎関数オブザーバ S_F の構成例を示す。

$$F = [1 \quad -0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \quad d = 1$$

$$F\tilde{W} = [F\tilde{W}_1 : F\tilde{W}_2] = [0 \quad 0 : -1.25]$$

$$\therefore \delta_0 = 2$$

定理2より S_F はつぎようになる。

D, E, G : S_0 に同じ。

$$FJ = [1 \quad -1.5 \quad 0], FL = [1 \quad -1]$$

上に求めた線形汎関数オブザーバ S_F はつぎのとおり動作する。

k	u	Fx	S
0	0	2	1
1	1	2.6	2.6
2	0	3.66	3.66
3	0	4.056	4.056

したがって、 $N_F = 1$
($= \nu_0 - \delta_0$) が検証できる。

6. あとがき

線形離散システムの状態観測において、最短時間かつ低次元観測システムとしてオブザーバの考えを導入し、その1構成法を示した。手順としては、最短時間観測モデル¹⁾に用いられるゲイン行列を基本にして、オブザーバの各係数行列を決定する形をとった。このゲイン行列は、モデルと離れて極指定問題の解法によっても決定することができる⁶⁾。すなわち、このゲイン行列は、状態フィードバックを施した閉ループシステムの転移行列がべき零行列となるように働くものであり、その決定はすべての極を零に指定してフィードバック行列を決定することに対応する。

状態観測には決定ステップ数が最小のものが望まれるが、本論文で構成されるオブザーバは(可観測指数-1)という決定ステップ数を持ち、これは状態観測

として考え得る最小のものである。

本論文で得られたオブザーバ S_0 は必ずしも最小次元観測システムとは限らない。これが最小次元となるための条件は、補題1の(ii)および付録におけるその証明において明らかにした。

最短時間かつ最小次元のオブザーバの構成方法、および一般的な線形関数オブザーバの構成方法については、今後に残された課題である。

《謝 辞》

本研究について、多くの有益なる討論をいただいた神戸大学工学部、池田雅夫氏に感謝する。

参 考 文 献

- 1) 長田 朗, 西村卓也: “線形離散システムの最短時間問題”, 信学会論文誌D, 56-D, 9, 507/514, 1973
- 2) D. G. Luenberger: “An Introduction to Observers,” IEEE Trans., AC-16, 6, 596/602, 1971.
- 3) 市川邦彦: “線形離散時間型オブザーバの設計”, 第10回計測自動制御学会学術講演会予稿集, 21/28, 1971.
- 4) 井上 昭, 室井伸一, 清水信行: “線形離散時間型制御系のモデルとオブザーバ”, 日本自動制御協会第2回ダイナミカルシステム・シンポジウム講演論文集, 41/42, 1972.
- 5) 舟橋康行, 中村嘉平: “線形離散時間系のオブザーバ設計”, 日本自動制御協会第4回統計学的制御理論シンポジウム講演論文集, 51/52, 1972.
- 6) S. K. Mitter and R. Foulkes: “Controllability and Pole Assignment for Discrete Time Linear Systems Defined Over Arbitrary Fields”, SIAM J. Control, Vol. 9, No. 1, 1/7, 1971.
- 7) 西村卓也, 長田 朗: “線形離散システムの制御および観測について”, システムと制御 (投稿中).

付 録

[補題1の証明]

(i) ($\Rightarrow$): S において、任意の時点 k_0 での状態 $x(k_0)$ を決定するためには、 k_0 を含んだ少なくとも ν_0 ステップの長さの入出力列を観測することが必要である。なぜならば、仮定(i)および ν_0 の定義より、 $\nu_0 > M$ なる M に対して、 $\text{range}[A^M] \cap \text{range}[U^M]$, すなわち $\text{null}[A^M] \cap \text{null}[U^M]$ が成立し⁷⁾, このとき、

$$A^M \bar{x} = 0, U^M \bar{x} = 0,$$

がいえるが、これはつぎのことを意味するからである。もし、 $x(k_0 - M) \triangleq \bar{x}$ および入力列 $\{0\}_{k_0-M}^{k_0-1}$ とするとき、その出力列は $\{0\}_{k_0-M}^{k_0-1}$ となり、 $x(k_0 - M) = 0$ および入力列 $\{0\}_{k_0-M}^{k_0-1}$ の場合と区別がつかなくなる。

したがって、もし、 $N_{\min} < \nu_0 - 1$ とすると、 ν_0 ステップの長さの入出力列を観測しないうちに状態が決定できることになり、矛盾を生じる。

($\Leftarrow$): 本論文において、 $M = \nu_0 - 1$ のオブザーバが構成できることから明らかである。

$$(ii) \quad \mathbf{x}(k_0+k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(k_0) + \mathbf{V}_k \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k_0+k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k_0) \end{bmatrix}$$

$$\forall k \geq N_{\min} = \nu_0 - 1$$

と表わされるから、 $\mathbf{x}(k_0+k)$ の動き得る範囲は、 R^n の部分空間であり、

$$U \triangleq \bigcup_{k=\nu_0-1}^{\infty} \text{range} [\mathbf{A}^k, \mathbf{V}_k]$$

と与えられる。一方、 $\text{range} [\mathbf{A}^k] \supset \text{range} [\mathbf{A}^{k+l}]$, $\text{range} [\mathbf{V}_k] \subset \text{range} [\mathbf{V}_{k+l}] \subset \text{range} [\mathbf{V}_n] \quad \forall l \geq 0$ は明らかであるから、 U はつぎのように表わされる。

$$U = \text{range} [\mathbf{A}^{n-1}, \mathbf{V}_n]$$

U のうち出力 $\mathbf{y}$ から直接観測できない部分空間 $\tilde{U}$ は $\tilde{U} = U \cap \text{null} [\mathbf{c}]$

である。 S_o の動的部分においては、状態 $\mathbf{x}$ の $\tilde{U}$ に属する部分の運動のみを再構成できればよい。したがって、そのためには、少なくとも $\dim \tilde{U}$ なる次元の動的な部分を必要とすることは明らかである。

他方、本論文で示すように $(n-m)$ 次元のオブザーバが常に構成できることより、求める結果を得る。

とくに、 $\mathbf{A}$ が正則なとき、および S が完全可制御なときは、明らかに $U = R^n$ であり、 $\lambda_{\min} = n-m$ である。もっと一般的には、 $\dim \tilde{U} = n-m$ のとき、 $\lambda_{\min} = n-m$ となる。 (証明終わり)