論文

高張力鋼板のビード引抜き力
計算モデルと検証実験

吹春 寛* 石川 一輝** 吉田 元之**

Approximate Calculation of Drawbead Force for High-Strength Steel
and Verification Experiment

Hiroshi FUKIHARU*, Kazuki ISHIKAWA** and Motoyuki YOSHIDA**

(Received on February 21, 2011)

The drawbead technique is very important for sheet metal forming in order to control defects such as springback, cracking, wrinkling. Therefore, approximation calculation models of drawbead force have been proposed in the past. However, such calculation models were applied to mild steel or aluminum alloy. In this paper, we propose an approximation calculation model of high-strength steel using the energy method and taking into account the Bauschinger effect. The calculation results were compared with the experiment results obtained under several drawbead shape conditions, and it was confirmed that the prediction value of drawbead force has good accuracy. Also, the through-thickness strain after passing through a drawbead was in good agreement with what obtained using stress reduction parameter due to Bauschinger effect. Moreover, it was found that the strain decreases effectively when the drawbead width is larger than the drawbead height. As a conclusion, the approximate calculation model discussed here is a practical and effective means of designing what tools.

Key words: sheet metal forming, drawbaed force, high-strength steel, Bauschinger effect, energy method.

1. 緒言

自動車プレス部品には、軽量化による燃費向上の対応、あるいは車体強度を高めることで衝突安全性向上への対応が求められている。これらを比較的低コストで対応できる高張力鋼板は、その使用量が年々増加している¹⁾。しかし高張力鋼板は、スプリングバックが非常に大きく発生することや延性に乏しいので成形途中で破断が起きやすいなど成形性が劣ることで知られている。これまでも成形性の向上のため、様々な加工法が提案²⁾されている。例えばハット曲げ成形において、特殊な加工法にビードの設定により大きな張力を付加し、スプリングバックを低減した事例³⁾もある。この事例のみならず、ビードによる材料の流入量の制御は、絞り加工に重要な役割をもち、われ・しわ・スプリングバック全てに影響を及ぼす。よってビード引抜き力を予測することや、引抜き力とビード通過後の板厚ひずみの関係を明らかにすることは、金型設計を行う上で大変有益である。高張力鋼板の適用拡大に伴い、対応するビード技術の確立は必要と考えられる。

これまでに、ビード技術の塑性曲げ理論⁴⁾、⁵⁾や実験検討⁶⁾による研究は多く行われてきている。引抜き力の予測式の提案等もされているが、その材質は軟鋼板⁴⁾やアルミニウム合金板⁵⁾、⁶⁾が中心である。

本研究は高張力鋼板を対象とし、金型設計の一助となるように、簡便な計算でビード引抜き力とビード通過後の板厚ひずみを算出できる予測式を構築する。そこで高張力鋼板の特徴の一つであるバウシンガー効果を考慮することでその精度向上を図った。さらに得られた結果を実験値と比較検証する。

2. ビード引抜き力予測式の導出

高張力鋼板のビード引抜き力および引抜き後の板厚ひずみの予測式を導出するため、以下の仮定を設ける。

- (1) 板厚内部の公称応力は一定とし、弾性変形は考慮しないが、バウシンガー効果は考慮する。
- (2) 全ビード押し力は摩擦力として考慮し、作用する範囲は入口側板押え部のみとする。
- (3) 平面ひずみ状態で材料は変形するとする。

本論文の基礎式の導出は、文献4)で求められた有効曲率を使った式をベースとし、さらにバウシンガー効果を考慮すること、および繰り返し計算を排除し、簡易に求められるようにしたものである。検討の対象は丸ビードとし、その工具形状をFig. 1に示す。凹側の工具の曲げ半径 r_d 、ビードの幅を $2l$ とし、凸側工具の曲げ半径 r_p 、高さ H とす

* 佛先端力学シミュレーション研究所 〒351-0198 和光市広沢 2-1
ASTOM R&D Co., Ltd., RIKEN 2-1, Hirosawa, Wako, Saitama 351-0198, Japan.
現在: 佛JSOL エンジニアリング本部 〒104-0053 東京都中央区晴海 2-5-24
Engineering Technology Division, JSOL Corporation,
2-5-24 Harumi, Chuo-ku, Tokyo 104-0053, Japan.

** 佛野島製作所 生産技術部 〒955-0015 三条市三柳 14-14
Production Engineering Department, Nojima seisakusyo Co., Ltd.
14-14 Mitsuyanagi, Sanjyou, Niigata 955-0015, Japan.

る。次に変形した材料形状を Fig. 2 に示す。形状は曲率半径 r_i ($i=1,2,3,4$), 角度 θ_i ($i=1,2$) の円弧部と直線部 u_i ($i=1,2$) で表される。ビード高さ $h = H + t_0/2$ とする。ここで, 初期板厚を t_0 とする。またビードの中心を境に, 材料の入口側を領域 A, 出口側を領域 B とし, 添え字をつけてそれぞれの位置を表す。

Fig. 1 Tool shape

Fig. 2 Deformed material shape

2.1 予測式の導出

Fig. 3 は, 曲げ曲げ戻し変形を受けた時の応力およびひずみ増分 $\dot{\epsilon}$ の分布を示したものである。ここで平均変形抵抗応力を σ_m , 中央面と中立面との距離を e とする。また α ($0 < \alpha \leq 1$) はバウシinger効果による応力低下係数を表し, 圧縮側の応力は $-\alpha\sigma_m$ で分布するとする。つまり $\alpha=1$ でバウシinger効果を考慮していないことになる。

Fig. 3 Distribution of stress and incremental strain after bending-unbending

まず, 単位幅当たりの軸力を F とすると, 式(1)となる。

$$F = \sigma_m \left\{ (1-\alpha)t_0/2 + (1+\alpha)e \right\} \quad (1)$$

さらに曲率増分を $\dot{k}$ としたとき, ひずみ増分を式(2)で表す。

$$\dot{\epsilon} = \dot{k}(e-z) \quad (2)$$

ただし, z は中央面を 0, 圧縮側を正とする。中央面の伸びひずみ $\dot{\epsilon}_0$ は, 式(1), 式(2)より次式となる。

$$\dot{\epsilon}_0 = \dot{k}e = (F/\sigma_m - (1-\alpha)t_0/2)\dot{k}/(1+\alpha) \quad (3)$$

表記の簡便化のため, 長さの次元をもつ変数は t_0 , 力の次元をもつ変数は $\sigma_m t_0$ で無次元化し, 無次元量を $(\bar{\quad})$ とする。式(1), 式(3), 内外仕事増分のつりあいから関係式を構築し, 初期条件 $\bar{F} = \bar{F}_{A0} = 2\mu\bar{P}$ および $\bar{k} = \dot{\epsilon}_0 = 0$ で積分する。ここで工具と材料間の摩擦係数を μ , 押え力を P とする。するとビード引抜き力の予測式である式(4), および引抜き力と伸びひずみの関係式である式(5)が得られる。式誘導の

詳細は付録 1 に示す。

$$\bar{F} = \frac{\exp\left(\left|\bar{K}\right|/2\right)(\bar{F}_{A0} + \alpha) + \alpha(\bar{F}_{A0} - 1)}{\exp\left(\left|\bar{K}\right|/2\right)(\bar{F}_{A0} + \alpha) - (\bar{F}_{A0} - 1)} \quad (4)$$

$$\dot{\epsilon}_0 = \ln\left(\frac{\bar{F}_{A0}^2 - (1-\alpha)\bar{F}_{A0} - \alpha}{\bar{F}^2 - (1-\alpha)\bar{F} - \alpha}\right) \quad (5)$$

また K は有効曲率であり, 出発点から任意の点までの曲率増分の絶対値の総和である。よって, 領域 A, B の終点での有効曲率の値は,

$$K_{B0} = 2/r_1 + 1/r_2 \quad (6)$$

$$K_{B4} = 2/r_1 + 2/r_3 + 2/r_4 \quad (7)$$

となる。また外部仕事増分 $\dot{w}_0$ は,

$$\dot{w}_0 = (\bar{F} + \dot{\bar{F}})(1 + \dot{\epsilon}_0) - \bar{F} \approx \dot{\bar{F}} + \bar{F}\dot{\epsilon}_0 \quad (8)$$

と表すことができる。式(8)を積分すると, 外部仕事 w_0 は,

$$w_0 \approx \frac{\alpha}{1+\alpha} \left| \bar{K} \right| - (\bar{F} - \bar{F}_{A0}) - \frac{(1-\alpha)}{2(\bar{F}_{A0} - 1)(\bar{F}_{A0} + \alpha)} (\bar{F}^2 - \bar{F}_{A0}^2) \quad (9)$$

である。ここで, 式(4)の近似式である式(10)を使用した。

$$\bar{F} \approx -\frac{(\bar{F}_{A0} - 1)(\bar{F}_{A0} + \alpha)}{1 + \alpha} \frac{\left| \bar{K} \right|}{2} + \bar{F}_{A0} \quad (10)$$

2.2 ビード形状の検討

精度の良いビード引抜き力予測式の導出のためには, 材料の巻きつき状態から, 材料形状の曲率半径を適切に求める必要がある。まず材料の幾何学形状より, 材料の曲率半径や直線部長さには, 以下の関係がある。

$$(r_{2i-1} + r_{2i})(1 - \cos\theta_i) + u_i \sin\theta_i = h \quad (i=1,2) \quad (11)$$

$$(r_{2i-1} + r_{2i})\sin\theta_i + u_i \cos\theta_i = \ell \quad (i=1,2) \quad (12)$$

次にビード通過により発生するエネルギーは, 材料の変形によるエネルギー W^d と押え力により発生した軸力によるエネルギー W^f の和で定義する。よって各々の領域で式(13), 式(14)となる。

$$W_A = W_A^d + W_A^f = \int_{A0}^{A3} \dot{w}_i + F_{A0} \int_{A0}^{A3} \dot{s} = w_{B0} + F_{A0} \ell_A \quad (13)$$

$$W_B = w_{B4} - w_{B0} + F_{B0} \ell_B \quad (14)$$

ここで, $\dot{w}_i$ は内部仕事増分, $\dot{s}$ は区分材料長さ, そして ℓ_{area} は各領域の変形後の材料長さであり, 以下で表される。

$$\ell_{\text{area}} = (r_{2i-1} + r_{2i})\theta_i + u_i \quad (i=1, \text{area} = A; i=2, \text{area} = B) \quad (15)$$

つまり r_i は, $\dot{w}_i$ および ℓ_{area} の両方の変数であり, 最小エネルギーの値を求めるには反復計算が必要となり煩雑である。そこで高張力鋼板の場合は σ_m が大きいので, 材料形状がエネルギーに及ぼす影響は, W^d が支配的であると考え。よってそれぞれの領域で, W^d が最小となるように, r_i の値を決める。極値を持つことより,

$$\frac{\partial W_A^d}{\partial r_i} = \frac{\partial K_{B0}}{\partial r_i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} - \frac{\partial F_{B0}}{\partial K_{B0}} - \frac{(1-\alpha)F_{B0}}{(F_{B0} + \alpha)(F_{B0} - 1)} \frac{\partial F_{B0}}{\partial K_{B0}} \right) = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial W_B^d}{\partial r_i} = \frac{\partial K_{B4}}{\partial r_i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} - \frac{\partial F_{B4}}{\partial K_{B4}} - \frac{(1-\alpha)F_{B4}}{(F_{B4} + \alpha)(F_{B4} - 1)} \frac{\partial F_{B4}}{\partial K_{B4}} \right) = 0 \quad (17)$$

が得られる。比をとり計算すると, α に関係なく各領域で $r_1 = \sqrt{2}r_2$ および $r_3 = r_4$ が得られる。また曲げ部の間の直線部の長さ u_i に関しては, 例えば領域 A では,

$$\frac{\partial W_A^d}{\partial u_1} = \frac{\partial W^d}{\partial K_{B0}} \left(\frac{\partial K_{B0}}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial u_1} + \frac{\partial K_{B0}}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial u_1} \right) > 0 \quad (18)$$

より, $u_i = 0$ でエネルギーは最小となる. この関係と式(11), 式(12)より r_i ($i=1,2,3,4$) を決定する.

$$r_1 = (\sqrt{2}-1)(\ell^2 + h^2)/\sqrt{2}h \quad (19)$$

$$r_2 = (\sqrt{2}-1)(\ell^2 + h^2)/2h \quad (20)$$

$$r_3 = r_4 = (\ell^2 + h^2)/4h \quad (21)$$

ただし算出した r_i が対応する工具形状の曲率半径に $t_0/2$ を加えた値より小さい場合は, 材料が工具に巻きついている条件とする. 各領域の入口側, 出口側の両側が巻きつく場合, 材料はそれぞれの工具の曲率半径に変形し, その間は直線であるとする. 片側の場合は, $u_i = 0$ となる曲率半径を有するとする. 例えば領域 A の r_2 のみ巻きつく場合は, 以下の式で算出する.

$$r_2 = r_p + t_0/2 \quad (22)$$

$$r_1 = (\sqrt{2}-1)(\ell^2 + h^2)/h - r_2 \quad (23)$$

2.3 バウシinger効果の考慮と平均変形抵抗応力

バウシinger効果の考慮に関するパラメータ, α の求め方について述べる. 材料にある値の引張りひずみを与え, 次にそれと同量の圧縮ひずみを与えるとする. このとき発生する圧縮時の平均の応力の値を, バウシinger効果を考慮した場合を σ_{Bau}^{Ave} , 考慮しない場合を σ_{Iso}^{Ave} とする. その値から α を式(24)で求める.

$$\alpha = \left| \frac{\sigma_{Iso}^{Ave} - \sigma_{Bau}^{Ave}}{\sigma_{Iso}^{Ave}} \right| \quad (24)$$

この場合, 応力-ひずみ挙動から数値計算により算出するの, バウシinger効果を表す Yoshida-Uemori model⁷⁾ (以下 Y-U model) の材料モデルを使用する. また次章で述べる実験に使用する材料は3種類とし, Y-U model のパラメータは, 材料の試験より求めた. 与えたひずみ量 ε_{given} と α の関係を Fig. 4 に示す. 与えるひずみが大きくなると α がサチュレートしていくことが分かる. これはひずみが増大した場合, 圧縮時の応力状態を考えると遷移軟化の影響が薄れ, 永久軟化の影響が中心となるからである. 通常用いられるビードは流入抵抗が目的であり, その曲げ半径は比較的厳しいものが多いので, 曲げ曲げ戻し時に発生するひずみの値は大きくなる. そこで, α は永久軟化による影響のみとすると, Y-U model のパラメータから算出できる.

$$\alpha = (B+Q)/(B+Q+b) \quad (25)$$

ここで各パラメータ B , Q , b は, それぞれ二曲面モデルの限界曲面の初期の大きさ, 等方硬化応力の飽和値, 移動硬化を表す. 各材料の α について, 数値計算により求めたひずみが 0.2 の場合の値と式(25)より求めた値を Table 1 に示す. 値はほぼ一致するので, α は式(25)より算出できることが分かるが, ひずみが約 7%より小さい場合は, 遷移軟化の影響で値が異なる.

次に σ_m の算出方法について述べる. 算出にビード中心の位置 B_0 のひずみ ε_{B_0} を用い, 板厚を t とし, 板厚 (z) 方向に式(26)のようにひずみは分布すると仮定する.

$$\varepsilon_{B_0} = \varepsilon_m + K_{B_0} z \quad (-t/2 \leq z \leq t/2) \quad (26)$$

ここで ε_m は軸力により発生したひずみを表すが, 簡単に求めるため, $\varepsilon_m = 0$ とする. 引張り方向の応力 σ_x として, 引張り試験結果と関連付けを行い, σ_m を式(27)で定義する.

$$\sigma_m = 2/t_0 \int_0^{t/2} \sigma_x(\varepsilon_{B_0}) dz \quad (27)$$

材料の応力-ひずみ線図の近似式は任意であるが, ここでは前節と共通の Y-U model のパラメータを用いて表現した. m を移動硬化の速度を支配するそのパラメータとすると,

σ_m は式(28)で表される. 式誘導の詳細は付録 2 に示す.

$$\sigma_m = \frac{4(B+Q+b)}{\sqrt{3}K_{B_0}t_0} (\ln(1 + K_{B_0}t_0/2)) + \frac{2(Q+b)}{mK_{B_0}t_0} \left((1 + K_{B_0}t_0/2)^{-2m/\sqrt{3}} - 1 \right) \quad (28)$$

Fig. 4 Relation of stress reduction coefficient and given strain

Table 1 Stress reduction coefficient

	Mat. A	Mat. B	Mat. C
α obtained from Fig. 4 ($\varepsilon_{given} = 0.2$)	0.85	0.81	0.84
α calculated by Eq.(25)	0.83	0.81	0.85

3. ビード引抜き実験方法

導出した予測式の精度を検証するため, ビード引抜き試験装置を作成し, ビード引抜き実験を行った. 実験に使用した工具形状の組み合わせは, Table 2 に示す8種類である. ただし $h = r_p + t_0/2$ とした. また型材質は SKD11 であり, 潤滑油として, 動粘度 20.0cSt (40℃) のものを使用した. Table 3 に示す各材料の摩擦係数 μ は, ビード形状のない平面工具による実験を行い, 求めた. 供試材の材質は, Table 4 に示す3種類とし, 寸法は長さ 350mm 幅 30mm 板厚 1.2mm とする. 引抜き速度は, 300mm/min で行った. ビードの単位幅あたりの押え力 P は 400N/mm で一定とする.

Table 2 Tool geometry of drawbead test

Bead shape	r_p /mm	r_d /mm	ℓ /mm
I	4.0	3.0	10.9
II	4.0	6.0	10.9
III	4.0	3.0	12.9
IV	4.0	6.0	12.9
V	4.0	3.0	14.9
VI	4.0	6.0	14.9
VII	6.0	3.0	14.9
VIII	6.0	6.0	14.9

Table 3 Friction coefficient

	Mat. A	Mat. B	Mat. C
Friction coefficient	0.187	0.176	0.139

Table 4 Mechanical properties of experimental materials

	Yield strength YS/MPa	Tensile strength TS/MPa	Elongation EL/%
Mat. A	324.1	469.2	30.9
Mat. B	464.3	624.6	27.0
Mat. C	505.2	780.2	23.2

4. 予測式の検証

4.1 ビード引抜き力

ビード引抜き力の実験結果と予測式である式(4)の計算値の精度検証を行う。それぞれの値を比較した結果を Fig. 5 に示す。各材質共に、実験値と計算値が全ての条件において良く一致している。これにより、予測式、 α 、 σ_m の決め方が適切であったことが分かる。さらに Table 5 に、材料毎に相対誤差の平均値を示す。バウシンガー効果を考慮した方がわずかに精度は向上するが、引抜き力に関しては、バウシンガー効果の影響は少ないことが分かる。また材料の強度が大きくなるとやや誤差が大きいの、次節で述べるが、強度が大きくなると板厚ひずみの絶対値が小さくなるので、予測式導出の仮定(2)が崩れつつある状況、つまり押え力が出口側でも作用しているのが原因と考える。

Fig. 5 Comparison of calculated drawbead force with Bauschinger effect and experimental drawbead force**Table 5** Average of relative error of prediction as drawbead force with or without Bauschinger effect

α	Mat. A	Mat. B	Mat. C
Cal. Eq.(25)	3.6%	4.4%	6.9%
$\alpha = 1.0$	4.3%	5.9%	7.5%

4.2 ビード引抜き力と板厚ひずみ

ビード引抜き力とビード通過後の板厚ひずみの関係について、計算値と実測値を比較する。ここで計算値の板厚ひずみ ε_t は、式(5)と $\varepsilon_t = -\varepsilon_0/(1+\varepsilon_0)$ の関係から求める。また計算値の算出において、ビード形状毎に σ_m が定まるが、見やすくするため材質毎に求まる σ_m の平均値を使用し、計算値を曲線で示した。各材料について、その関係を Fig. 6

に示す。バウシンガー効果の考慮によって計算値に大きな違いが見られ、 α が小さいと板厚ひずみの絶対値が小さくなる。このように適切に α をとることで精度が大幅に向上する。さらに材料ごとに比較すると、高強度の材料ほど α の違いが顕著に表れている。また高強度の材料の方が、 ε_t を F で除した勾配が小さく、同程度のビード引抜き力でも ε_t の変化が少ないことが分かる。しかし高強度の材料の方が、少ない板厚ひずみの発生で破断する⁸⁾と考えられるので、その判断基準については別途定める必要がある。

(I) Material A

(II) Material B

(III) Material C

Fig. 6 Relationship through-thickness strain and drawbead force with or without Bauschinger effect

4.3 ビード形状と板厚ひずみ

ビード形状と板厚ひずみの関係を検討する。まず明らかに、 r_f が大きくなると K が小さくなるので、式(4)、式(5)より板厚ひずみの絶対値が小さくなるのが分かる。次に工具押え力が大きくないなど、材料がビード工具に巻きつかない条件が成り立つ場合、すなわち r_f が ℓ と h で決まる

場合を考える．式(4)，式(5)，式(19)～式(21)から，例えば $\ell=10$ ， $\bar{N}_{A0}=0.3$ とすれば， h/ℓ と ε_t の関係が陽に表すことができる． $\alpha=0.8$ ， 1.0 の場合を Fig. 7 に示す． α の値に関係なく， $h/\ell=1$ で ε_t の絶対値がもっとも大きくなる．また h/ℓ の値を小さくすると効果的に ε_t の絶対値が小さくなることから分かるので，ビード形状を設計するときは，それぞれの工具間のクリアランスを適切にとるなど， h/ℓ に着目することで，ビード通過後の板厚の減少を少なくすることができる．

Fig. 7 Relationship through-thickness strain and h/ℓ ($\ell=10$ ， $\bar{N}_{A0}=0.3$)

5. 結 言

丸ビードにおける，高張力鋼板を使用した場合のビード引抜き力あるいは引抜き力と板厚ひずみの関係式をエネルギー法で算出した．また比較検証のため，ビード引抜き装置を作成し，実験を行った．そこで次の結論を得た．

- (1) バウシinger効果を考慮したビード引抜き力の予測式，および引抜き力と板厚ひずみの関係式を算出した．予測結果は実験結果と良く一致した．バウシinger効果は，引抜き力への影響は少ないが，板厚ひずみの予測には大きく影響し，適切に応力低下量を算出することで精度向上に寄与する．
- (2) 予測値の算出は，ビード形状や Yoshida-Uemori model のパラメータから反復計算もなく簡便に求まる．よって実用的であり，金型設計時に有効である．
- (3) 破断を防ぐため，ビード通過後の板厚ひずみを抑制するビード形状は，それぞれビード肩半径を大きくすることが有効である．また材料が工具に巻きつかないとき，凹側ビードの幅の半分 ℓ と凸側ビードの高さ h が同じ長さのときが，もっとも板厚ひずみの絶対値が大きくなる．この場合， h/ℓ を小さくする方が，効果的に板厚ひずみが抑制される．このときビードを通過した材料の板厚ひずみの絶対値を 7%程度に抑えられれば，遷移軟化の影響で，応力低下係数が α 小さくなり，板厚ひずみの抑制がより効果的である．

参 考 文 献

- 1) 山崎一正：塑性と加工，**46**-534(2005)，565-569.

- 2) 例えば，薄鋼板成形技術研究会編：プレス成形難易ハンドブック第3版(2007)，333-382.
- 3) 吹春寛・久留主信一郎・武本兼幸・山根雅則・牧野内昭武：平成 22 年度塑性加工春季講演会講演論文集，(2010)，27-28.
- 4) 長井美憲・永井康友：塑性と加工，**36**-414(1995)，755-761.
- 5) 小西晴之・藤原昭文・吉田正敏・福本幸司：塑性と加工，**41**-469(2000)，121-125.
- 6) 桑原利彦・西村尚・秀野雅之：塑性と加工，**36**-413(1995)，653-658.
- 7) Yoshida, F. & Uemori, T : Int. J. Plasticity, **18**(2002)，661-689.
- 8) 藤井和慶・渥美学・椎名利行・杉山隆司・橋本浩二・吉田亨・栗山幸久：第 57 回塑性加工連合講演会講演論文集，(2006)，181-182.

謝 辞

本研究は，戦略基盤技術高度化支援事業「高張力鋼板によるプレス加工法構築支援システムの開発」の成果の一部であり，材料に関するデータは，広島大学の吉田総仁教授により取得された．ここに深謝の意を表する．また元先端力学シミュレーション研究所の横尾玲子氏に実験結果の測定等協力頂いた．

付録 1 式(4)，式(5)の誘導

内部仕事増分 $\dot{w}_i$ は，次式で表される．

$$\dot{w}_i = \int_{-t_0/2}^{t_0/2} \text{sgn}(\dot{\varepsilon}) \sigma_m \dot{\varepsilon} dz = \frac{\sigma_m |\dot{k}|}{2(1+\alpha)} \left(\frac{F^2}{\sigma_m^2} + \alpha t_0^2 \right) \quad (\text{A-1})$$

式(8)と式(A-1)が釣り合うこと，および式(3)を代入し無次元化すると，

$$|\dot{k}| / 2(1+\alpha) = \dot{F} / (\alpha + (1-\alpha)\bar{F} - \bar{F}^2) \quad (\text{A-2})$$

が得られる．式(A-2)を初期条件のもとで積分することで，式(4)が得られる．また式(3)に式(A-2)を代入し積分すると，式(5)が得られる．

付録 2 式(28)の誘導

相当応力を σ^{eq} ，相当ひずみを ε^{eq} とする．両変数の関係は，遷移硬化領域の引張り試験結果との差異を無視すると，式(B-1)と表すことができる．

$$\sigma^{eq} = B + (Q + b)(1 - \exp(-m\varepsilon^{eq})) \quad (\text{B-1})$$

平面ひずみを仮定しているので，引張り方向の公称応力 σ_x ，公称ひずみ ε_x と σ^{eq} ， ε^{eq} の関係式を表す．

$$\sigma_x(1 + \varepsilon_x)\sqrt{3}/2 = \sigma^{eq} \quad (\text{B-2})$$

$$\ln(1 + \varepsilon_x)2/\sqrt{3} = \varepsilon^{eq} \quad (\text{B-3})$$

式(B-2)，式(B-3)を式(B-1)に代入すると次式を得る．

$$\sigma_x = \frac{2(B + Q + b)}{\sqrt{3}(1 + \varepsilon_x)} + \frac{2}{\sqrt{3}}(Q + b)(1 + \varepsilon_x)^{-(2m/\sqrt{3}+1)} \quad (\text{B-4})$$

式(26)，式(27)，式(B-4)より，式(28)を得る．ここで簡略化のため $t = t_0$ としている．