論文

Orowan の w 関数の 2 次近似式

松本 絃美*

Second-Degree Approximation of Orowan's w -Function

Hiromi MATSUMOTO *

(Received on November 28, 2011)

“Orowan's w -function” in the theory of rolling is defined by a definite integral, and the general method of computing it is a time-consuming numerical integration. An alternative method is “zero-degree approximation” in the gradient of the roll surface, because, according to Orowan, the error in the w -function is less than 0.01. However, this is inconsistent with the aim of his theory to “avoid all mathematical approximations,” and the resulting error in overall rolling analysis has not yet been examined. In the present paper, we elaborate on the effects of the approximation by comparing it with numerical integration and second-degree approximation. The error of the latter in the w -function is 0.0002 at the largest. Since errors in the roll force, torque, and forward slip are much smaller than the error in the w -function itself, the error could be regarded as negligible even with zero-degree approximation in practical situations. The two equations of second-degree approximation provide reference values in place of numerical integration from the viewpoint of accuracy, and the computing time is sufficiently short for online use.

Key words: rolling, hot rolling, plate rolling, numerical analysis, slab method, theory of rolling.

1. 緒言

Orowan¹⁾の圧延理論は「数学的近似をすべて排した」ものとして知られている一方、オンライン計算のためには今でも粗い近似式が使われているようである。しかし、コンピュータの発達した現代では、この理論に忠実に計算することが可能になったため、オンライン計算における標準理論という観点で再び注目したい。

コンピュータ時代になってからは、解説記事^{2)~4)}はいくつかあるものの、Orowanの理論を直接応用した報告は少ない。これは、近似解法に関する議論がずいぶん昔に尽くされたからだけでなく、その理論の特徴である「 w 関数 (w -function)」が初等関数で表せない定積分で定義されているためでもあると思う。彼は、「 w 関数はロール面の傾斜角 ϕ にあまり依存せず、 $\phi=0$ としても誤差は高々1/100である」とし、圧延解析はそのような「ゼロ次近似」によっている。しかし、これは ϕ^2 以上の高次項を無視しているわけで、 $\cos\phi\approx 1$ や $\sin\phi\approx\phi$ などとする近似と同類である。これらは、彼が例示した「極端な条件」 $\phi\approx 0.52$ (30度)では通常は成立しないもので、実際に誤差が小さい理由が分からない。また、圧延荷重やトルクなど圧延解析の誤差に及ぼす影響も報告されていない。

本報では、高精度の数値積分で w 関数の基準値を計算し、近似式の誤差とその圧延解析に及ぼす影響を調べる。

このとき、精度上数値積分と実質的に等価な 2 次近似式を提出し、ゼロ次近似の誤差の挙動を解明する。

2. w 関数の計算方法2.1 w 関数の定義

Fig. 1 に座標 x の各鉛直断面に関係する変数の記号を示す。 w 関数は、 x 断面 AB に作用する水平圧力の断面内平均値 q と、被圧延材表面 A, B に圧延ロールから加わっているロール面圧力 s および摩擦応力 τ (入側に向かう方向を正 = 先進域で正, 後進域で負 = とする) との関係式中に現れる。これは被圧延材の降伏条件から導かれる。次式の表現は原論文にはないが、その内容をコンピュータ計算用に整理したもの²⁾である。

$$\begin{cases} s = q + kW(\phi, \lambda), & \lambda = \frac{\tau}{k/2} \quad (-1 \leq \lambda \leq +1) \\ W(\phi, \lambda) \equiv w(\phi, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{\phi} - \frac{1}{\tan\phi} \right) \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 k は拘束降伏応力、 λ は摩擦応力 τ をせん断降伏応力 $k/2$ で規格化した変数である。式(1)は、上下ロール面と垂直に交わる円弧 APB 上で仮定された応力を積分し、水平方向の合力 hq (h は x 断面の厚さ) を計算して得られる。 $W(\phi, \lambda)$ の主要項である第 1 項目 $w(\phi, \lambda)$ は円弧 APB 上の垂直応力 σ_ρ による項、第 2 項目 (λ の 1 次項) はせん断応力 $\tau_{\rho\theta}$ による項である。

主要項 $w(\phi, \lambda)$ は次式の積分で定義されており、「Orowan の w 関数」と呼ばれる。ここで積分変数 θ は円弧上の一般点 P の厚さ内位置を表す角度座標である。

* 北九州市立大学国際環境工学部
〒808-0135 北九州市若松区ひびきの 1-1
Faculty of Environmental Engineering, University of Kitakyushu
1-1 Hibikino, Wakamatsu-ku, Kitakyushu City 808-0135, Japan.

Fig. 3 に、近似式の誤差（数値積分値との差）を (a) $\phi = 0.52$ と (b) $\phi = 0.2$ の場合に例示する。これらの図では、ゼロ次近似の誤差は 100 倍した値をプロットしているのに対し、2 つの 2 次近似式(8), (11) の誤差は 1000 倍をプロットしている。Orowan が述べているように、ゼロ次近似の誤差は、極端な条件 (a) $\phi = 0.52$ の場合でも最大 $1/100$ 程度 (0.91×10^{-2}) である。一方、2 次近似式の誤差は両式とも最大 0.02×10^{-2} （ゼロ次近似の $1/45$ ）しかない。

Fig. 3 Error in w -function ((a) $\phi = 0.52$, (b) $\phi = 0.2$)

ゼロ次近似の誤差は、式(10) で 2 次近似式の値を真値とみなせば、ほぼ $\phi^2 / (1 - \phi^2 / 6) \approx \phi^2$ に比例するはずである。このことは、Fig. 3 の両図の数値を比べて確認できる。とくに、ゼロ次近似の誤差が最大になる $\lambda = \pm 1$ のときの 2 次近似式の値は、式(8) より次式で与えられる。

$$w(\phi, \pm 1) \approx \frac{1 - \phi^2 / 8}{1 - \phi^2 / 6} \frac{\pi}{4} \approx (1 + \frac{1}{24} \phi^2) \frac{\pi}{4} \quad (12)$$

ゼロ次近似の最大誤差は、ほぼ式(12) と $w(0, \pm 1) = \pi/4$ との差で与えられ、これは同式で $\pi/4$ に掛かる因子と 1 との差に比例する。分数表示の因子の分母は、式(3) の係数の逆数 $\sin \phi / \phi$ が ϕ の増加とともに小さくなる程度を表し、分子は、式(3) の被積分関数中の $\cos(\phi \xi)$ が ϕ の増加とともに小さくなる程度を表す。結局、 ϕ がそれほど小さいとは言えない値なのにゼロ次近似の誤差が小さい理由は、これら 2 つの効果、すなわち式(12) 中の因子の分母と分子の変化が相殺するためであることが分かる。

2 次近似式(8) の誤差は、 $w(\phi, \lambda)$ が ϕ の偶関数だからほぼ ϕ の 4 乗に比例すると予想され、このことも Fig. 3 の両図の比較で確認できる。すなわち、Fig. 3 で ϕ が小さい図(b)

を図(a) と比べると、式(8) の誤差はゼロ次近似の誤差に対して割合がさらに小さくなっている。

これに対して、式(11) の最大誤差は、ゼロ次近似と同程度、すなわち ϕ の 2 乗に比例する程度でしか小さくない。これは、式(11) の ϕ^2 の係数に誤差が生じているためである。しかしながら、誤差が最も大きくなる $\phi = 0.52$ のときの最大誤差は式(8) とほとんど同じであり、一方 ϕ が小さくなるとほぼ ϕ^2 に比例して小さくなるから、最大誤差のゼロ次近似誤差に対する割合はつねに小さい。誤差が ϕ の 4 乗に比例して小さくなる必要はない。

3.2 圧延解析の精度

w 関数単独の誤差は、最大 $1/100$ 程度であることが確認されたが、圧延解析の誤差がその程度にとどまるとは限らない。これは、入口近くで生じる誤差が、釣合い方程式を積分する過程で累積・拡大するかもしれないからである。このため本節では、 w 関数の計算方法の相違による圧延荷重、トルク、および先進率の精度を比較する。

(a) 圧延解析の数値計算法 ほぼ松本による講義³⁾の方法に従う。ただし、釣合い方程式の独立変数には長さ方向の座標 x （原点は出口）をとり、また $\cos \phi \approx 1$ や $\sin \phi \approx \phi$ などの近似をせずに、厚さ分布 $h(x)$ を次式の厳密な円弧形状で与える。 R はロール半径、 h_0 は出側材の厚さ、 l は接触長である。ロール偏平はここでは考えない。

$$\begin{cases} h(x) = h_0 + 2 \left\{ R - \sqrt{R^2 - x^2} \right\} = h_0 + \frac{2x^2}{R + \sqrt{R^2 - x^2}} \\ \tan \phi = \frac{1}{2} \frac{dh}{dx} = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (13)$$

$h(x)$ の 2 つの表示式のうち、初めの式は円の方程式から直接導かれる。しかし $\{ \}$ 内で桁落ちが生じるため、実際のプログラムでは、数式としては等価だが桁落ちのない第 2 式の形で計算する。

$W(\phi, \lambda)$ の第 2 項目 (λ の 1 次項) は、ゼロ次近似の場合はつねに Taylor 近似式(4) を採用するが、その他の場合は $\phi = 0$ の近く以外は厳密式で計算する。

なお、わずかな差を問題にしているため、釣合い方程式を積分する (Heun 法³⁾ による) とき、接触長を 160 等分して相対誤差を 10^{-5} 程度以下に抑える。

(b) 圧延条件 Table 1 に圧延解析の条件を示す。条件 A は、Orowan が例示した極端な条件に近く（接触角 = 入口におけるロール面の傾斜角 $\phi_1 = 0.522$ ）、条件 B はより現実的な条件（同 $\phi_1 = 0.293$ ）とする。降伏応力は一定値、張力は入・出側ともゼロである。

Table 1 Rolling condition for error evaluation

Item ↓	Condition name →	Cond. A	Cond. B
Roll radius R /mm		300	400
Entry thickness h_1 /mm		180	100
Exit thickness h_0 /mm		100	66
Fractional reduction r /%		(44.4)	(34.0)
Yield stress (constant) σ_Y /MPa		100	100
Friction coefficient μ / -		1.0	0.4
Contact length l /mm		(149.7)	(115.4)
Contact angle ϕ_1 /rad		(0.522)	(0.293)

(c) ゼロ次近似による誤差 Table 2 に条件 A による計算結果, Table 3 に条件 B による計算結果を示す. これらの表中の計算値でアンダーラインを引いた桁は, 数値積分で w 関数を計算するときと一致することを表す.

ゼロ次近似による場合, まず Table 2 では, 単位幅あたりの荷重 P , 単位幅あたりのトルク G , 前進率 f_s の相対誤差は, どれも w 関数単独の最大誤差 0.91×10^{-2} と比べて小さい. 入口における w 関数の誤差は拡大せず, 接触長内各場所の誤差が独立に寄与していると思われる.

P の誤差は G , f_s の誤差と比べて小さい. これは, P には w 関数の誤差が平均的に影響するが, G と f_s は中立点の位置と密接に関係し, これには先進域と後進域の誤差が逆符号で影響するためであると考えられる. ただし, P の誤差が w 関数の誤差の平均値よりもかなり小さい理由は分からない. 条件 A では λ の大きさが一定 ($|\lambda|=1$) で w 関数の誤差はほぼ ϕ^2 に比例するから, 接触長内の平均値は最大誤差の $1/3$ である. 式(4) の近似をしなれば, P の誤差はわずかながらさらに小さくなる.

より現実的な条件 B での結果 Table 3 では, ゼロ次近似でも誤差は 0.1% 以下である. これより, 極端な条件ではわずかな誤差が見られるが, 現実的な条件の場合は, ゼロ次近似では十分な精度であると言える. さらに, 条件 A のように接触長対厚さ比が小さい場合は, Orowan の理論自体の精度に疑問があり, w 関数にそれほどの精度を要求する意味は少ないと思われる.

(d) 2 次近似式による誤差 式(8), (11) の両式では, 条件 A の場合も含めて, すべての指標で誤差は 0.01% 以下であり, 工学的には誤差はないと言える.

4. 計算時間の比較

前章で見たように, 2 次近似式は両式とも精度的には数値積分と実質上等価であり, Orowan がめざした「数学的近似

をすべて排した」標準理論の代替にできる. しかし, 現実的な圧延条件ではゼロ次近似の誤差も小さいから, 2 次近似式では計算時間が掛かるなどの欠点があれば, あえて採用する価値はない. このため本章では, 計算時間の観点から各計算法を比較する. これは, 理論に忠実にオンラインで計算することが現実的なことを確認するためでもある. 使用したパソコンは 2006 年製作のもので, OS は Microsoft 社製 Windows XP, CPU は Intel 社製 Pentium D - 3GHz, プログラム言語は同社製 Fortran Ver. 9.0 である.

4.1 時間比較時の計算条件

時間計測のためには, 同じ条件の計算を 1000 回繰り返して CPU 時間を計測し, 1 条件あたりに換算する. 圧延条件を Table 4 に示す. これは冷間圧延の条件でロール面傾斜角 ϕ が小さく, ゼロ次近似でも誤差はないが, ϕ が大きいときと共通のプログラムを利用することを想定して, 計算時間比較のための条件に選んだ.

同表の条件では接触長全域で滑り摩擦条件になっており, 式(1) と Coulomb の摩擦法則式との連立解を求めるための反復計算が必要である^{2), 3)}. これには, secant 法 (を応用し, 微分係数を使わないで Newton 法を擬似的かつ安定に実現する非線形方程式の数値解法⁶⁾) の汎用サブプログラム, または可能な場合は Newton 法³⁾ を使用する. また, この条件ではロール偏平が大きく, Hitchcock のロール偏平式²⁾ との連立解を求めるためにも反復計算が必要である. これも上記の汎用サブプログラムによる. 収束判定のための限界相対誤差は, どちらも 10^{-10} 以下とした.

w 関数の数値積分における積分区間の分割は 12 等分, 釣合い方程式の積分には接触長を 40 等分した. これらは第 3 章で精度を比較したときよりも粗いが, 実用時を想定したものであり, それでも前者起因の誤差は 10^{-6} 以下, 後者による相対誤差も 10^{-4} 以下である.

なお, 降伏応力を一定としているが, これはそのような材質定数を指定しているだけで, 計算時間に有利なわけではない. 使用した汎用プログラムでは, 各圧延解析の前に, 降伏応力のひずみ, ひずみ速度, および温度依存性を考慮し, さらに加工発熱による温度変化の微分方程式を解いて降伏応力の接触長内分布を計算しているからである.

4.2 滑り摩擦の連立方程式を secant 法で解く場合

Table 5 に, 式(1) と摩擦法則式との連立方程式を secant

Table 2 Computed results with Cond. A ($\phi = 0.522$)
(Upper data = Value, Lower data = Relative error /%)

Equation for w -function	Roll force $P/\text{MN}\cdot\text{m}^{-1}$	Roll torque G/kN	Forward slip $f_s/\%$
Integration	18.8128	1422.37	3.8215
Zero-degree	<u>18.7787</u> -0.18	<u>1417.38</u> -0.35	<u>3.8507</u> 0.76
Eq. (8)	<u>18.8131</u> 0.002	<u>1422.43</u> 0.004	<u>3.8211</u> -0.010
Eq. (11)	<u>18.8129</u> 0.001	<u>1422.40</u> 0.002	<u>3.8213</u> -0.005

Table 3 Computed results with Cond. B ($\phi = 0.293$)
(Upper data = Value, Lower data = Relative error /%)

Equation for w -function	Roll force $P/\text{MN}\cdot\text{m}^{-1}$	Roll torque G/kN	Forward slip $f_s/\%$
Integration	14.9246	850.257	4.6313
Zero-degree	<u>14.9171</u> -0.051	<u>849.657</u> -0.071	<u>4.6290</u> -0.050
Eq. (8)	<u>14.9246</u> 0.000	<u>850.259</u> 0.000	<u>4.6313</u> 0.000
Eq. (11)	<u>14.9244</u> -0.001	<u>850.241</u> -0.002	<u>4.6312</u> -0.002

Table 4 Rolling condition for CPU time estimation

Items	Cond. C
Roll radius R/mm	200
Entry thickness h_1/mm	1.0
Exit thickness h_0/mm	0.7
Fractional reduction $r/\%$	(30)
Yield stress (constant) σ_Y/MPa	400
Back tension σ_b/MPa	100
Front tension σ_f/MPa	100
Friction coefficient $\mu/-$	0.1
Contact length l/mm	(7.74)
Contact angle ϕ/rad	(0.039)

法で解く場合の CPU 時間を比較する。同表より、数値積分によるとき以外の計算時間は、使用目的にもよるが、オンライン計算にも十分耐える程度に短い。2 次近似式による計算時間は、ゼロ次近似よりすこし長いが、2 倍は掛からない。数値積分では 7 倍近い。

ロール偏平を考慮するときは、ロールの弾性係数を 206 GPa とする。ここでの条件では、偏平後のロール半径 R' は偏平前半径 R の 1.43 倍である。使用したプログラムでは、ロール偏平がないとする場合、先進率と降伏応力のひずみ速度依存性との整合をとるために反復計算をする。これは本報の計算条件では必要ないのであるが、汎用のプログラムであるため、圧延解析を 4 回実行して整合性を確認している。これに対してロール偏平式との連立解を求める場合は、8 回の圧延解析で収束している。

4.3 滑り摩擦の連立方程式を Newton 法で解く場合

これまで滑り摩擦の連立方程式を secant 法で解いたのは、数値積分、および式(8)と比較するためである。しかし、ゼロ次近似は Newton 法による方が速いため、Table 6 に Newton 法で解くときの CPU 時間を比較する。

Table 5 と比べると、Newton 法は secant 法の 3/4 程度の時間で収束している。式(8)では secant 法で解くしかないため、Table 5 で見たように、ゼロ次近似で Newton 法による場合の 2.1 倍程度時間が掛かるが、式(11)では Newton 法が使えるため 1.4 倍程度である。

5. 結 言

w 関数の近似式による誤差の影響を、数値積分で計算する場合を基準として調べた。従来のゼロ次近似による w 関数の誤差は、2 次近似式との差で説明できる。これはほぼロール面の傾斜角 ϕ の 2 乗に比例し、極端な条件でも比較的小さい。さらに、圧延解析における圧延荷重、トルク、および先進率の相対誤差は、 w 関数単独の最大誤差よりかなり小さく、現実的な圧延条件では 0.1% 以下だから、実用上はゼロ次近似でほぼ十分な精度と言える。

Table 5 CPU time when using the secant method to solve the simultaneous equation of slipping friction

Equation for w -function	No flattening case /ms	With flattening case /ms
Integration	5.20	9.83
Zero-degree	0.75	1.44
Eq. (8)	1.20	2.27
Eq. (11)	1.08	2.07

Table 6 CPU time when using Newton's method to solve the simultaneous equation of slipping friction

Equation for w -function	No flattening case /ms	With flattening case /ms
Zero-degree	0.56	1.08
Eq. (11)	0.80	1.58

一方、2 つの 2 次近似式は、両方とも工学的に誤差のない値が得られ、基準理論である数値積分の代替にできる。計算時間はゼロ次近似と同等であり、オンラインの計算にも十分耐える程度に短い。

参 考 文 献

- 1) Orowan, E.: Proc. Inst. Mech. Eng., **150** (1943), 140-167.
- 2) 松本紘美: 板圧延の理論と実際, (1984), 第 2 章, 5-51, 日本鉄鋼協会.
- 3) 松本紘美: 塑性と加工, **30-342** (1989), 941-944.
- 4) 柳本潤・柳本左門・青木至: 塑性と加工, **34-395** (1993), 1314-1319.
- 5) 玉野敏隆・柳本左門: 日本機械学会論文集 (第 3 部), **36-281** (1970), 126-133.
- 6) 松本紘美: コンピュータによる実戦数値計算法, (1999), 21-25, 九州大学出版会.