論文

切欠付丸棒引張試験による変形抵抗同定のための
応力補正法の検討

村田 真伸* 西脇 武志* 吉田 佳典**

Stress Correction Method for Flow Stress Identification
by Tensile Test using Notched Round Bar

Masanobu MURATA*, Takeshi NISHIWAKI* and Yoshinori YOSHIDA**

(Received on December 31, 2015)

In this paper, a stress correlation method for flow stress identification using notched round bar tensile test is proposed. Flow stress is evaluated in uniform elongation and local elongation until final fracture in a tensile test with circumference-notched round-bar tensile test specimens. Tensile load and change in the shape of the notch are measured by image analysis. In order to correct the average tensile stress to the flow stress, inverse analysis is applied to the tensile test. For the validation of the inverse analysis, numerical tensile tests are performed by FEM. As a result of applying the inverse analysis for the numerical tensile tests, the corrected flow stress completely reproduces the two types of reference flow stress curves. On the other hand, the flow stress corrected by Bridgman's method, which is a conventional stress correction method, overestimated these reference flow stress curves. In the case of the tensile test of SS400, the flow stress corrected by inverse analysis is in good agreement with Swift's hardening law determined in uniform elongation. As well as numerical tensile test results, the flow stress corrected by Bridgman's method is higher than that of obtained by the inverse analysis.

Key words: tensile test, notched specimen, image analysis, inverse analysis, flow stress, large strain.

1. 緒言

鍛造や板成形等の分野において、製品開発の短期化やコスト削減等を目的とした有限要素法 (FEM) による塑性加工シミュレーションの適用が進んでおり、加工力や製品形状予測をはじめとするシミュレーションの予測精度の向上が望まれている。塑性加工シミュレーションの予測精度は、材料の加工硬化挙動を表現する変形抵抗曲線に大きく左右されるため、変形抵抗曲線同定の高精度化が必要である。一般に、材料の変形抵抗曲線は、その簡便さからダンベル状の試験片を用いた引張試験から取得される。しかしながら、ひとたび試験片にくびれが生じるとくびれ部においては多軸応力状態にさらされるため、たとえ時々刻々の引張軸方向の平均応力 (以後、平均引張応力と称する) $\sigma_{zave} = P/A$ を計測したとしても、材料の変形抵抗 σ_{flow} とは一致せず、くびれ発生以降の変形抵抗を直接的に計測することはできない。ここで、 P は引張荷重、 A は時々刻々の最小垂直断面積である。Fig. 1 は丸棒引張試験における、変形抵抗と平均引張応力を示した模式図である。

一方、実製品の塑性加工においては多くの場合で一様伸び限界を超える大ひずみが材料に付与されるため、それ以

降の σ_{flow} は、Swift 則¹⁾や Voce 則²⁾等の硬化則によって外挿予測されて用いられる。適切な硬化則の選択やパラメータの予測精度に関する課題が未だ残されている。

くびれ発生以降の σ_{zave} から σ_{flow} を同定する方法として、Bridgman の応力解析³⁾を用いた方法 (以下 Bridgman 法と称する) が提案されている。Bridgman は丸棒引張試験におけるくびれ部の応力状態を、軸対称問題と仮定した初等解法により解析した。くびれ底における時々刻々の曲率半径 R および最小断面半径 a を測定すれば、 σ_{zave} を σ_{flow} に補正できることを示した。類似の解析は、Davidenkov らによっても行われている⁴⁾。Bridgman 法を利用するために、複並らは断続的に引張試験を行い、 R および a を実測した^{5)~7)}。筆者の一人はくびれ部の形状計測を画像解析により自動化し、破断までの連続的な変形抵抗曲線と限界ダメージ値の

Fig. 1 Difference between the average tensile stress and the material flow stress in local elongation after necking

* 名古屋工業研究所 〒456-0058 名古屋市熱田区六番三丁目4番41号
Nagoya Municipal Industrial Research Institute,
3-4-41, Rokuban, Atsuta-ku, Nagoya-shi, Aichi, 456-0058, Japan.

** 岐阜大学 次世代金型技術センター 〒501-1193 岐阜市柳戸1-1
Gifu University (G-CADET),
1-1 Yanagido, Gifu 501-1193, Japan.

同定に成功している⁸⁾。しかしながら Bridgman 法は簡単な式で応力補正ができる一方で、式の導出過程において多くの仮定を用いているため、応力の補正精度自体に問題があることが指摘されている⁹⁾。Mirone¹⁰⁾は、実験結果と FEM 解析結果とを詳細に比較することで、応力補正にはくびれ部曲率が必ずしも必要ないことを指摘するとともに、Bridgman 法より高精度な応力補正の実験式を構築したが、すべての材料に適用できる保証はない。

また、近年のコンピュータ性能の飛躍的な向上に伴い未知の材料パラメータの決定に FEM 解析による逆解析を適用する事例^{11)~14)}が増えてきているが、硬化則のパラメータを同定対象とした場合、同定される変形抵抗曲線は選択した硬化則に依存してしまう課題がある^{12), 13)}。延性の低い高強度材料では、変形抵抗曲線を多直線近似した事例¹⁴⁾もあるが、高延性材料へ適用された事例はない。

本研究では、引張開始から破断までの σ_{flow} を硬化則によらずに、簡便にかつ、高精度に同定する手法を提案する。具体的には、画像解析を用いた切欠付丸棒引張試験を実施し、得られる σ_{zave} を補正することで、 σ_{flow} を同定する。応力補正量の決定には、FEM 解析による逆解析を利用する。実験では、高延性材料である一般構造用鋼材の切欠付丸棒引張試験に本手法を適用して破断までの σ_{flow} の同定を試みた。また、本手法の妥当性を検証する目的で、FEM 解析による切欠付丸棒引張試験の数値実験を実施し、あらかじめ設定した正解の変形抵抗曲線（以後、参照変形抵抗曲線 σ_{ref} と称する）が再現できるかを検証した。実験および数値実験において、本手法と並行して従来法（Bridgman 法）による応力補正も実施し、応力補正精度の比較を行った。

2. 実験方法

2.1 供試材および試験片形状

一般構造用鋼材の SS400 丸棒から、引張試験片を削り出し実験に使用した。SS400 丸棒の化学組成を Table 1 に示す。引張試験には Fig. 2 に示すとおり、4 種類の切欠付丸棒引張試験片と平滑丸棒引張試験片を使用した。平滑丸棒引張試験にて計測した機械的特性値および一様伸びの範囲で同定した Swift 則のパラメータを Table 2 に示す。ここで、 ε_p は相当塑性ひずみである。切欠付丸棒引張試験片は、切欠形状を付与することで、くびれ発生位置が定まり計測が容易になる。また、初期切欠半径 R_0 を変化させることで、くびれ部に発生する応力の負荷履歴を変化させた試験が可能となる。複数の応力負荷履歴の引張試験結果から同じ変形抵抗曲線が得られれば、手法が妥当であると判断できる。

2.2 引張試験方法

4 種の切欠付引張試験片に対して 3 mm/min の速度で画像解析引張試験を行った。引張開始から破断までのくびれ部の変形の様子を CCD カメラで動画撮影し、画像解析によって最小断面半径 a と、後述の Bridgman 法で必要となるくびれ底の局率半径 R を連続的に測定した。なお、 R は

Table 1 Chemical composition of SS400

C	Si	Mn	P	S
0.07%	0.16%	0.6%	0.024%	0.041%

Table 2 Material properties of SS400

Tensile strength	Yield strength	Uniform elongation	F^*	n^*	ε_0^*
473MPa	357MPa	19%	788MPa	0.19	0.002

*Approximated using $\sigma = F(\varepsilon_p + \varepsilon_0)^n$ for $\varepsilon_p = 0.1 - 0.19$

Fig. 2 Notched round bar specimens (a)~(d) and a smooth round bar specimen (e) (unit: mm)

くびれ底における画像輪郭を円弧に最小二乗近似することで決定した⁸⁾。各引張試験結果から以下の 2 種類の曲線を得た。その一つは、平均引張応力 σ_{zave} - 相当ひずみ ε_{eq} 曲線であり、応力補正の基準となる曲線である。丸棒でかつ等方的な変形をすると仮定すると、 σ_{zave} は次式で計算できる。

$$\sigma_{zave} = P / (\pi a^2) \quad (1)$$

相当ひずみ ε_{eq} は、くびれ底断面内に分布するひずみの平均を弾性変形を無視して次式で評価したものである。

$$\varepsilon_{eq} = 2 \ln(a_0/a) \quad (2)$$

もう一方は、引張荷重 P - くびれ底断面半径変化(a_0 - a)曲線であり、後の逆解析の同定対象となる。

3. 数値実験方法

提案手法の妥当性を検証する目的で、FEM による数値実験を実施した。軸対称かつくびれ底断面对称を仮定し、軸対称要素にて Fig. 3 に示すように試験片縦断面の 1/2 をモデル化した。くびれ底における代表要素寸法は 0.1 mm である。材料は弾塑性体で von-Mises の降伏条件に従うと仮定した。FEM 解析ソルバには LS-DYNA971 を用い、上端節点に強制変位を与えることで、引張試験解析を行った。

数値実験に使用する σ_{ref} は、式(3)および(4)に示すとおり、Swift および Voce 則に従う $\sigma_{ref}^{(swift)}$, $\sigma_{ref}^{(voce)}$ の 2 種類を用意した。

$$\sigma_{ref}^{(swift)} = 830 (\varepsilon_p + 0.002)^{0.22} \quad (\text{MPa}) \quad (3)$$

$$\sigma_{ref}^{(voce)} = 602.7 - 338.0 e^{-12.9 \varepsilon_p} \quad (\text{MPa}) \quad (4)$$

両者は一様伸びの範囲内ではほぼ一致し、くびれ発生以降に違いを示すようにパラメータを調整してある。また引張試験解析結果から 2.2 節の実験と同様に、 σ_{zave} - ε_{eq} 曲線および P - (a_0 - a) 曲線を、基準曲線および同定対象曲線として作成した。くびれ底の局率半径 R については、くびれ底近傍の節点座標を円弧近似し、引張変位 0.1mm ごとに抽出した。

Fig. 3 Mesh in tensile specimen and boundary conditions

4. 応力補正方法

4.1 Bridgman 法による応力補正 (従来法)

Bridgman の応力解析によれば、丸棒引張試験におけるくびれ底断面における各応力成分は式(5)および(6)で表される。

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_{flow} \cdot \ln \left(\frac{a^2 + 2aR - r^2}{2aR} \right) \quad (5)$$

$$\sigma_z = \sigma_{flow} \cdot \left\{ 1 + \ln \left(\frac{a^2 + 2aR - r^2}{2aR} \right) \right\} \quad (6)$$

ここで σ_r は半径方向応力、 σ_θ は周方向応力、 σ_z は引張方向応力、 r はくびれ底断面中心からの半径方向の距離である。また、 σ_z をくびれ底断面にわたって積分した値が P と等しくなることから、式(7)を導出することができる。

$$\sigma_{flow} = \frac{1}{\left(1 + 2 \frac{R}{a} \right) \ln \left(1 + \frac{a}{2R} \right)} \sigma_{zave} \quad (7)$$

式(7)右辺の σ_{zave} にかかる項は、 σ_{zave} を σ_{flow} に応力補正する拘束係数 (以後、Bridgman の補正係数と称する) であり、時々刻々の R と a から決定することができる。実験結果および数値実験結果から得られる $\sigma_{zave}-\epsilon_{eq}$ 曲線と Bridgman の補正係数との積をとって応力補正を実施し $\sigma_{flow}-\epsilon_{eq}$ 曲線を得た。

4.2 逆解析による応力補正 (提案法)

(a) 変形抵抗曲線のパラメータ表現 本提案法では、同定対象曲線である、 $P - (a_0-a)$ 曲線が FEM 解析で再現されるように、逆解析によって σ_{zave} を補正する。逆解析に使用する $\sigma_{flow}-\epsilon_{eq}$ 曲線は、実験および数値実験から得られる $\sigma_{zave}-\epsilon_{eq}$ 曲線を基準曲線として、Fig. 4 のように定義した。すなわち、一様伸びの範囲内では平滑丸棒引張試験片による σ_{zave} の測定値を正値とし、それ以降のひずみ範囲については N 個の区間に分割した多直線近似で表現した。各相当ひずみに対応する変形抵抗 σ_{flowI} は式(8)のように対応する平均引張応力 σ_{zaveI} に $\mathbf{x} = x_I$ ($I = 1, 2, \dots, N$) を乗じる形で表現した。

$$\sigma_{flowI} = x_I \sigma_{zaveI} \quad (0 \leq x_I \leq 1, I = 1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

$$\sigma_{flowI} \leq \sigma_{flowI+1} \quad (I = 1, 2, \dots, N) \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{x}$ は Bridgman の補正係数に対応する最適化計算の設計変数である。本論文では、一般的に加工軟化が生じないとされる冷間かつ準静的な条件下での変形を対象と考え、式(9)の拘束条件を付与した。すなわち、図中の網かけ領域がこの変形抵抗曲線の定義式が表現しうる範囲となる。相当ひずみ区間の分割は、 $\epsilon_u \leq \epsilon_{eq} \leq 0.5$ の範囲では 0.05 間隔、 $0.5 \leq \epsilon_{eq} \leq \epsilon_f$ の範囲では 0.1 間隔とした。ここで、 ϵ_u は一様伸び限界の相当ひずみ、 ϵ_f は破断時のくびれ底における平均相当ひずみであり、破断時のくびれ底断面半径を a_f とすると、 $\epsilon_f = 2 \ln(a_0/a_f)$ である。例えば数値実験結果を対象とした応力補正の場合、 σ_{ref} および R_0 によらず $\epsilon_u = 0.2$ 、 $\epsilon_f = 1.2$ と仮定すると、決定すべき設計変数は $x_1 \sim x_{13}$ の 13 個である。

(b) 逆解析の方法 逆解析の同定対象曲線は、前述の通り、破断までの $P - (a_0-a)$ 曲線とした。この曲線には一様伸び以降の σ_{flow} の情報が多く含まれる。Fig. 5 は同定対象曲線における引張荷重の実験点 P_i と逆解析の荷重の計算点 $F_i(\mathbf{x})$ 間の誤差に関する模式図である。式(10)に定義した P_i と $F_i(\mathbf{x})$ の間の平均二乗誤差 e の最小化を目的関数として、 $\mathbf{x}$ の最適値を求める。ここで、 n は対象曲線の分割数である。本研究では、多変数かつ大規模モデルでの逆解析を行うため、 $\mathbf{x}$ の最適値の探索に、GA¹⁵⁾等に代表される大域的最適化手法ではなく、Stander らによって開発された逐次近似応答曲面法の一つである SRSM (Successive Response Surface Method)¹⁶⁾法を使用した。同法は局所最適化に適した特徴がある。最適化ソフトウェアには、LS-OPT4.2 を使用した。

Fig. 6 には、SRSM のフローチャートを示す。実験計画の水準選択には D -optimal 計画を使用して引張試験解析を実施する。次いで応答曲面を作成するが、同定対象曲線に対応する計算点ごとに応答曲面 $F_i(\mathbf{x})$ を作成し、式(10)で定義した e の関数の最適化を実施する。

$$e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{F_i(\mathbf{x}) - P_i}{\text{Max}|P_i|} \right)^2 \rightarrow \min \quad (10)$$

応答曲面 $F_i(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ に関する一次多項式である。また e の最小値の探索には、ASA¹⁷⁾ (Adaptive simulated annealing) 法を用いた。実験と解析結果の誤差が十分小さくなるまで、パラメータ $\mathbf{x}$ の探索領域を移動、縮小させて繰返し計算を実施した。なお逆解析で実施する引張試験解析は、 $\sigma_{flow}-\epsilon_{eq}$ 曲線を除いて 3 章の数値実験と同一の条件で実施した。

Fig. 4 Corrected flow stress curves for inverse analysis

Fig. 5 Error between experimental and computed curves

Fig. 6 Flowchart of optimization method

5. 結果と考察

5.1 数値実験を対象とした応力補正とその考察

数値実験結果を用いた検証のフローチャートを Fig. 7 に示す. Bridgman 法および逆解析手法それぞれで応力補正された σ_{flow} の同定結果と数値実験に入力した σ_{ref} を比較し, その再現性を評価した.

Fig. 8 には, 数値実験結果から式(1)および(2)を用いて $\sigma_{zave} \sim \epsilon_{eq}$ 曲線を計算した例として, $\sigma_{ref}^{(swift)}$ を使用した場合の該当結果を示すが, 時々刻々の断面積から σ_{zave} を計算したとしても, それらは $\sigma_{ref}^{(swift)}$ よりも常になくなり, R_0 が小さいほど顕著である. これは, R_0 が小さいほど一軸応力状態から外れて多軸応力状態の影響が大きくなるためと考えられる.

(a)Bridgman 法による応力補正 $\sigma_{zave} \sim \epsilon_{eq}$ 曲線に対して, 4.1 節の手順に従い Bridgman 法による応力補正を実施した結果を Fig. 9 に示す. $\sigma_{ref}^{(swift)}$, $\sigma_{ref}^{(voce)}$ どちらを使った場合においても, 応力補正された σ_{flow} は R_0 に関わらずおおむね 1 本に重なった. しかしながら, ϵ_{eq} または ϵ_p が大きくなると $\sigma_{ref}^{(swift)}$ および $\sigma_{ref}^{(voce)}$ から乖離し, 最大で Swift 則の場合で 12% 程度, Voce 則の場合で 16% 程度変形抵抗を過大に評価する結果となった. Fig. 10 に, $\epsilon_f = 1.2$ 時点での, Bridgman 法による予測と数値実験結果のくびれ底断面における各応力成分分布の例を示す ($R_0 = 20\text{mm}$, 参照変形抵抗曲線は $\sigma_{ref}^{(swift)}$). 式(5), (6)および(7)の Bridgman 法で予測した応力分布は, 数値実験の応力状態を十分再現できていない. そのため変形抵抗を過大に評価したと考えられる.

(b)逆解析による応力補正 次に, 4.2 節の手順に従い逆解析による応力補正を実施した結果について示す. Fig. 11 は,

Fig. 7 Flowchart of the stress corrections and the validations for using the numerical tensile test results

Fig. 8 Tensile average stress curves obtained from numerical tensile tests (Reference flow stress curve : $\sigma_{ref}^{(swift)}$)

Fig. 9 Stress correction results using Bridgman's method about numerical tensile tests

Fig. 10 Distribution of stress components on neck at $\epsilon_f = 1.2$ ($R_0 = 20\text{mm}$, Reference flow stress curve : $\sigma_{ref}^{(swift)}$)

繰返し計算による設計変数の履歴の例であり、**Fig. 12** は応力補正結果の履歴の例である ($R_0 = 3\text{mm}$, 参照変形抵抗曲線は $\sigma_{ref}^{(swift)}$)。8 回目の繰返し計算終了時点において、いずれの x_i も真値に収束している。応力補正結果も 8 回目の繰返

Fig. 11 History of design variables on inverse analysis ($R_0 = 3\text{mm}$, Reference flow stress curve: $\sigma_{ref}^{(swift)}$)

Fig. 12 History of stress correction results using inverse analysis ($R_0 = 3\text{mm}$, Reference flow stress curve: $\sigma_{ref}^{(swift)}$)

Fig. 13 Stress correction results using inverse analysis on numerical tensile tests

Fig. 14 Numerical target curves and inverse analysis results

し計算終了時点では、 $\sigma_{ref}^{(swift)}$ に一致していることが分かる。他のすべての組合せについて、8 回目の繰返し計算後の $\sigma_{flow-\epsilon_{eq}}$ 曲線の同定結果を重ねて表示したものが **Fig. 13** であるが、同定された $\sigma_{flow-\epsilon_{eq}}$ 曲線は R_0 にかかわらず 1 本に重なり、かつ $\sigma_{ref}^{(swift)}$ および $\sigma_{ref}^{(voce)}$ とそれぞれ一致した。**Fig. 14** は、数値実験による同定対象曲線と逆解析で同定した $\sigma_{flow-\epsilon_{eq}}$ 曲線を用いた $P - (a_0 - a)$ 曲線の解析結果を比較したものであるが、試験片形状や σ_{ref} が異なっても数値実験結果を精度良く再現できていることが分かる。すなわち、数値実験の結果に逆解析を用いた応力補正を適用することで、 σ_{ref} を硬化則によらずに、複数の応力履歴の試験からでも、良い精度で再現することができた。

5.2 SS400 引張試験を対象とした応力補正とその考察

SS400 引張試験結果を用いた応力補正のフローチャートを **Fig. 15** に示す。実際の材料では、くびれ以降の真の $\sigma_{flow-\epsilon_{eq}}$ 曲線は不明であるため、応力補正後の σ_{flow} の同定結果を、一様伸びの範囲で決定した Swift 則 (Table 2) による外挿結果と比較した。

画像解析付引張試験から得られた各 R_0 の $\sigma_{zave-\epsilon_{eq}}$ 曲線の結果を **Fig. 16** に示す。なお、逆解析のためのデータ整理には、画像解析由来のノイズを除去するため、 a の時刻歴の測定値を 6 次関数で平滑化してから使用した。数値実験と同様に、 σ_{zave} は R_0 が小さいほど高いことが確認できる。また、 R_0 が小さいほど破断ひずみが小さくなるが、これは応力多軸度が増すためと考えられる¹⁸⁾。

逆解析手法で応力補正して得られた $\sigma_{flow-\epsilon_{eq}}$ 曲線の同定結果を **Fig. 17** に示す。 R_0 にかかわらず $\epsilon_u = 0.1$ とし、最適化アルゴリズムの繰返し回数は 8 回とした。図中には、Swift 則も示した。逆解析手法で応力補正した結果は、 R_0 によらずほぼ一本の曲線に重なり、Swift 則にほぼ一致する結果となった。また、各試験片とも破断までの σ_{flow} が同定できており、 $R_0 = 20\text{mm}$ の場合で $\epsilon_f = 1.05$ までの σ_{flow} が同定できた。これは、一様伸び限界の 5 倍以上のひずみである。同定された $\sigma_{flow-\epsilon_{eq}}$ 曲線を使用した $P - (a_0 - a)$ 曲線の同定曲線が **Fig. 18** であるが、実験結果を良く再現できていることが確認できる。

一方、Bridgman 法で応力補正した結果を **Fig. 19** に示す。応力補正後の $\sigma_{flow-\epsilon_{eq}}$ 曲線は試験片によらずおおむね一本の曲線に重なったものの、Swift 則よりも高めとなった。これは、Bridgman 法で応力補正した結果が逆解析手法の結果よりも高いことを意味しており、前節の数値実験の同定結果の傾向と合致する。これらのことから Bridgman 法で

Fig. 15 Flowchart of stress corrections for using SS400 tensile test results

力補正した結果より, 逆解析手法で得られた $\sigma_{flow}-\epsilon_{eq}$ 曲線の方が, 材料本来のそれに近いと考えられる。

Fig. 16 Average tensile stress curves obtained from SS400 tensile tests using image analysis

Fig. 17 Stress correction results using inverse analysis on SS400 tensile tests

Fig. 18 Experimental target curves and inverse analysis results on SS400 tensile tests

Fig. 19 Stress correction results using Bridgman's method on SS400 tensile tests

6. 結 言

本研究では, 切欠付丸棒引張試験の一樣伸び後の $\sigma_{zave}-\epsilon_{eq}$ 曲線に逆解析による応力補正を行うことで, 破断までの $\sigma_{flow}-\epsilon_{eq}$ 曲線を硬化則によらない形で高精度に同定する手法を提案した。得られた結論は以下のとおりである。

- (1) 数値実験結果を用いた検証において, 逆解析法を用いた場合, 複数の応力の負荷履歴に関わらず, 加工硬化挙動の異なる 2 種類の σ_{ref} をそれぞれ良い精度で再現することができた。
- (2) Bridgman 法を用いた場合, 応力補正後の σ_{flow} はおおむね 1 本に重なるものの, 2 種類の σ_{ref} のどちらに対しても, 相当ひずみが大きな範囲では変形抵抗を過大に評価する。
- (3) SS400 の引張試験結果を用いた検証において, 逆解析手法, Bridgman 法とも, 同定した σ_{flow} は, R_0 に関わらずおおむね 1 本に重なり, 最大で相当ひずみで 1.0 を超える範囲までの σ_{flow} を同定することができた。
- (4) 逆解析手法で同定した σ_{flow} は, 一樣伸びの範囲内で決定した Swift 則とほぼ一致した。一方, Bridgman 法の同定結果は, Swift 則よりも高めになり, 数値実験の傾向と合致する。

参 考 文 献

- 1) Swift, H. W. : J. Mech. Phys. Solids, **1** (1952), 1-18.
- 2) Voce, E. : J. Inst. Met., **74** (1948), 537-562.
- 3) Bridgman, P. W. : Studies in Large Plastic Flow and Fracture, (1952), 9-32, McGrawHill.
- 4) Davidenkov, N. N. & Spiridonova, N. I. : Proc. ASTM, **46** (1946), 1147-1158.
- 5) 榎並啓太郎・長井寿 : 鉄と鋼, **91-9** (2005), 285-291.
- 6) 榎並啓太郎・長井寿 : 鉄と鋼, **91-9** (2005), 712-718.
- 7) 土田紀之・井上忠信・榎並啓太郎 : 日本金属学会誌, **76-10** (2012), 579-586.
- 8) Yoshida, Y., Yukawa, N. & Ishikawa, T. : Mater. Process. Des., **1** (2011), 1869-1874.
- 9) La Rosa, G. Mirone, G. & Risitano, A. : Metall. Mater. Trans. A, **34A-3**, (2003), 615-624.
- 10) Mirone, G. : Int. J. Solids Struct., **41** (2004), 3545-3564.
- 11) 濱崎洋・Toropov, V. V. ・新島数洋・吉田総仁 : 塑性と加工, **46-532** (2005), 397-401.
- 12) Yanagida, A., Liu, J. & Yanagimoto, J. : Mater. Trans., **44-11** (2003), 2303-2310.
- 13) 長谷川健一・陳中春・西村圭央・池田圭介 : 塑性と加工, **49-565** (2008), 143-147.
- 14) Dunand, M. & Mohr, D. : Int. J. Solids Struct., **47** (2010), 1130-1143.
- 15) Holland, J. H. : Adaptation in Natural and Artificial Systems, Univ. of Michigan Press, (1975), (MIT Press, 1992).
- 16) Stander, N. & Craig, K. J. : Eng. Comput., **19-4** (2002), 431-450.
- 17) Ingber, L. : Math. Comput. Modelling, **12** (1989) 967-983.
- 18) 大塚昭夫・宮田隆司・桜井勉・飯田浩 : 材料, **34-381** (1984), 622-626.