修正前：

$$\sigma_b = p(\rho_m - t)^2 / (2\rho_m t) \quad (4)$$

修正後：

$$\sigma_b = p(\rho_m - t/2)^2 / (2\rho_m t) \quad (4)$$

外接多角形による降伏関数簡易同定法の数値解析的検証

瀧澤 英男* 児玉 渉平**

Numerical Verification of Simplified Identification Method of Yield Function Using Circumscribing Polygon of Yield Locus

Hideo TAKIZAWA* and Shohei KODAMA**

(Received on June 4, 2018)

A method for identifying the yield function using simple material tests is proposed. The identification accuracy of this method is verified by finite element analysis. In the proposed method, a polygon circumscribing the equal plastic work contour is defined through uniaxial tensile tests, hydraulic bulge test, and plane strain tensile tests. The parameters of the anisotropic yield function are identified as a smooth curve inscribed in the polygon. The virtual material tests of three material models, namely, mild steel, aluminium alloy, and pure titanium, are conducted by the finite element method. On the basis of the results, stress measurement error and yield surface identification error are discussed. When the material exhibits strong in-plane anisotropy, the measurement error of equi-biaxial stress in the hydraulic bulge test becomes large. When the initial gradient of work hardening is large, the stress value of the circumscribed line of the small plastic strain stage in the plane strain tensile test is estimated to be lower than that on the true yield surface. These errors affect the identification accuracy of the material parameters of the yield function quantitatively, but the difference between the identified locus and true yield locus is small. The proposed method is feasible as a simple identification method of the yield function.

Key words: sheet metal forming, material testing, anisotropy, yield function, biaxial tensile test, finite element method, verification, material parameter identification.

1. 緒言

塑性加工プロセス設計の効率化のために有限要素解析が広く用いられている。解析精度の向上のためには、材料モデルの精度向上が不可欠であり、特に圧延板を素材とする板成形解析においては、異方性降伏関数を用いた材料モデルの必要性が広く認識されている¹⁾。

材料の塑性モデルの異方性を表現する異方性降伏関数は、現在までに数多く提案されている^{2),3)}。近年提案された降伏関数は、数式の複雑化と材料定数の増加により、その表現力は飛躍的に向上している。これらの降伏関数のいくつかは市販有限要素解析ソフトウェアにも組み込まれており³⁾、実務的な工程設計でも利用できる環境が整いつつある。

異方性降伏関数の材料パラメータを求めるためには、単軸引張試験だけでは不十分であり、二軸応力場での材料試験を必要とする。任意の応力比を付与できる材料試験については、十字形試験片を用いる二軸応力試験⁴⁾および円管

に加工した試験片を用いる軸力内圧型二軸応力試験⁵⁾が提案されている。前者の試験法は国際標準規格 (ISO) に登録され⁶⁾、市販の専用試験機が開発される⁷⁾など、学術研究から産業利用へと移行しつつある。

しかしながら、二軸応力試験にもとづく異方性降伏関数の産業利用は、現在、十分に普及しているとは言い難い。普及の障壁は、特殊な試験設備への投資に対するシミュレーション高度化の効果が定量化しにくいことにある。この課題に対する当面の対策として、任意の応力比は与えられなくとも、廉価な材料試験により材料パラメータを同定できる方法⁸⁾⁻¹⁰⁾が求められる。

本研究では、基準となる「単軸引張試験」に加え、古典的試験法である「液圧バルジ試験」および引張試験機で実施可能な「平面ひずみ引張試験」の計三種の材料試験法を用いる。これらの試験結果から降伏曲面の外接多角形を定義して、異方性降伏関数を同定する。各材料試験の有限要素解析を仮想実験とみなし、材料試験における応力の測定誤差および降伏関数の同定精度を定量的に評価する。

2. 降伏関数同定手法および数値解析的検証法

2.1 外接多角形による降伏曲面の概略形状の測定

本研究では、材料モデル同定法の基礎検討として、測定

* 日本工業大学 基幹工学部 機械工学科 〒345-8501 埼玉県南埼玉郡宮代町学園台 4-1
Department of Mechanical Engineering, Nippon Institute of Technology,
4-1 Gakuendai, Miyashiro-machi, Saitama 345-8501, Japan.
E-mail: htaki@nit.ac.jp

** 日本工業大学 大学院 工学研究科 機械システム工学専攻 同上
Graduate School of Engineering, Nippon Institute of Technology, ibid.

対象とする塑性構成式に以下の前提を置く。

(1) 加工硬化特性に等方硬化を仮定し、等塑性仕事面と降伏曲面を同一視する¹¹⁾。

(2) 塑性ひずみ増分方向は、関連流れ則を満たす¹²⁾。

(3) 圧延方向 (RD) と圧延直交方向 (TD) を主軸とする直交異方性を仮定する。

これらの前提のもとで、以下に示す三種の材料試験により降伏曲面の外接多角形を測定する。Fig. 1 に本研究で提案する降伏曲面同定法の模式説明図を示す。

(1) 単軸引張試験：通常の単軸引張試験を行い、ここから加工硬化曲線および Lankford の r 値を求める。これにより、応力空間における応力軸と降伏曲面の交点およびこの点における降伏曲面の法線方向が定まる。

(2) 等二軸応力試験：円形ダイスを用いる液圧バルジ試験により頭頂部に等二軸応力を与える。また、頭頂部にひずみゲージを貼付し、異方性主軸方向の塑性ひずみ増分比 $r_b = d\epsilon_y^p / d\epsilon_x^p$ を求める。これにより、応力空間における等二軸降伏応力とこの点における降伏曲面の法線方向が求まる。

(3) 平面ひずみ引張試験：幅広の試験片を近接したチャックで引張ることで、試験片幅方向のひずみがゼロとなる変形状態を与える。弾性変形を微小として全ひずみ増分で

Fig. 1 Circumscribing polygon of yield locus measured by 3 types of simple material tests

(a) Experimental procedure to determine material model

(b) Verification of methodology for material modeling

Fig. 2 Numerical verification of material testing method and identification procedure to determine yield functions

塑性ひずみ増分を近似し、降伏曲面の法線が引張り方向を向く応力点の最大主応力、つまり、異方性主軸方向への降伏曲面の張出し量を決定する。

以上の材料試験により、Fig. 1 に示すような降伏曲面の外接多角形が定義できる。本同定法では、三つの応力点を通り、この多角形に内接する滑らかな曲線として降伏曲面の形状を同定する。

2.2 数値解析による検証

Fig. 2 に数値解析を用いた材料モデル同定法の検証の枠組みを示す。材料モデル同定法の妥当性を実験的に検証することは難しい。ある材料試験法で実験的に材料特性を測定し、バラツキの小さな結果が得られたとしても、同定したモデルが正解であることを証明することはできない。これは正解が既知の材料モデルを持った材料が明確には存在しないためである。一方、有限要素解析では、材料モデルの正解は入力データとして明示的に与えられる。つまり、同定すべき材料モデルの正解の存在を前提として、材料モデル同定法を検証することができる。

本報告では、材料試験の有限要素解析を仮想実験とみなし^{13),14)}、材料モデル同定法の妥当性を検証する。上述した一連の材料試験を数値解析し、この仮想材料試験の解析結果のうち実験的に測定可能な物理量（例えばロードセルによって測定される引張荷重、ひずみゲージによる局所ひずみの測定値など）のみを利用して、材料モデルの同定を行う。同定された材料モデルと解析の入力として与えた正解の材料モデルを比較することで、材料モデル同定のための材料試験法および一連のデータ処理方法の妥当性を検証する。

当然、数値解析では生じない様々な測定誤差が実験では生じる。しかし、外乱的な誤差を含まない数値解析的検証で十分な同定精度が得られなければ、材料モデル同定法として本質的に不適切と判断できる。つまり、本検証は、材料モデル同定法の「必要条件の検証」と位置付けられる。

3. 材料試験の有限要素解析

3.1 仮想材料試験の供試材

同定対象として想定した三種類の材料の特性を Table 1 に示す。M1 は軟鋼板¹⁵⁾を、M2 はアルミ合金板¹⁶⁾を、M3 は純チタン板¹⁷⁾をそれぞれ想定し、文献の実験値を参考に材料パラメータを設定した。降伏関数には Yld2000-2d¹⁸⁾を用いた。Fig. 3 に想定材料の加工硬化曲線 (RD 方向の単軸引張における応力ひずみ曲線)、異方性主軸を主応力としたときの降伏曲線および r 値の面内分布を示す。M1 材および M3 材は面内の塑性異方性が強く、M3 材は降伏初期での加工硬化勾配が大きい。弾性特性には等方性を仮定した。

3.2 仮想材料試験の条件および真応力の算出方法

Fig. 4 に各試験の試験片形状および境界条件を示す。板材の RD および TD を x 方向および y 方向とする。試験片の初期板厚 t_0 は 1 mm と設定した。以下、各試験の試験条件および真応力-真ひずみ曲線の算出方法を示す。

(1) 単軸引張試験 単軸引張試験片は、JIS Z 2241 の 13B 号形状とした。試験片中心に二軸ひずみゲージを貼付することを想定し、この位置での局所ひずみを仮想測定値として用いる。引張方向および幅方向の真ひずみをそれぞれ ϵ_l

Table 1 Material parameters as input for simulations of virtual material tests

Material		Elastic prop.		Flow stress : $C(\bar{\varepsilon}^p + \varepsilon_0)^n$			Material parameters in Yld2000-2d								
Code	Assumed	E/GPa	ν	C/MPa	ε_0	n	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	M
M1	SPCE	200	0.3	564.0	$5.90 \cdot 10^{-3}$	0.275	0.939	1.184	0.887	0.877	0.933	0.802	1.046	1.023	5.90
M2	A5182-O	70.0	0.3	716.7	$1.55 \cdot 10^{-2}$	0.421	0.966	1.000	0.892	1.010	0.994	0.916	0.984	1.157	8.86
M3	Pure Ti	100	0.3	455.7	$1.34 \cdot 10^{-4}$	0.162	0.976	1.001	0.888	0.786	0.853	0.369	0.973	0.852	6.13

Fig. 3 Material properties used in simulations of virtual material tests

および ε_w とし、体積一定条件を仮定して、以下の式で引張方向の真応力および r 値を求める。

$$\sigma_\theta = \frac{F \exp(\varepsilon_l)}{t_0 w_0}, \quad r_\theta = -\frac{d\varepsilon_w}{d\varepsilon_l + d\varepsilon_w} \quad (1)$$

ここで θ は RD に対する引張方向の角度を示す。

(2) 平面ひずみ引張試験 平面ひずみ引張試験については様々な試験片形状が提案されているが^{19),20)}、正確な測定のために、差分荷重による補正を用いた平面ひずみ引張試験²¹⁾を行う。この試験法では、試験片切欠き部周辺に生じるひずみ場の乱れに起因する測定精度低下を回避するために、切欠き部形状が同一で幅の異なる二種の試験片を用いて平面ひずみ領域の応力を求める。幅広および幅狭の試験片をそれぞれ w および n で示す。切欠き部周辺でのひずみ場の乱れが両試験片で同一であれば、引張荷重 F および試験片幅 W の差分により、切欠き部の荷重への影響を除去することができる。試験片 w および n の試験荷重を F_w および F_n 、試験片幅を W_w および W_n 、引張方向の真ひずみを ε_l として、以下の式で平面ひずみ状態の引張応力 σ_l を求める。

$$\sigma_l = \frac{(F_w - F_n) \exp(\varepsilon_l)}{(W_w - W_n) t_0} \quad (2)$$

なお、この試験では幅方向応力 σ_w は実験的には求まらない。しかし、幅方向の塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_w^p$ をゼロと近似するため、 σ_w の不明は塑性仕事の算出を妨げない。

(3) 等二軸応力試験 等二軸応力試験として液圧バルジ試験を行う。ダイス孔径を 150 mm とし、曲率計の全幅を 20 mm とする¹⁴⁾。

バルジ頭頂部外表面に貼付したひずみゲージで測定される二軸ひずみを ε_{s1} 、 ε_{s2} とする。外表面の三点から求まる曲率半径を ρ_s 、変形後板厚を t とする。板厚が十分薄いとすれば、Bernoulli-Euler の仮定により、板厚中心の面内方向ひずみ ε_{m1} 、 ε_{m2} と板厚 t には以下の関係式が成立する。

$$t = t_0 \exp(-\varepsilon_{m1} - \varepsilon_{m2}) \quad (3a)$$

$$\rho_m = \rho_s - t/2 \quad (3b)$$

$$\varepsilon_{m1} = \varepsilon_{s1} - t/(2\rho_m) \quad (3c)$$

$$\varepsilon_{m2} = \varepsilon_{s2} - t/(2\rho_m) \quad (3d)$$

ここで、下付添字 m は板厚中央での値を示し、体積一定条件を用いている。これらの式より ε_{m1} 、 ε_{m2} 、 ρ_m および t

(a) Test piece for uniaxial tensile test (JIS 13B)

(b1) Wide test piece for plane strain tensile test

(b2) Narrow test piece for plane strain tensile test

(c) Geometry and boundary conditions for hydraulic bulge test

Fig. 4 Dimensions and boundary conditions for 3 types of simple tests

Fig. 5 Simulation of 3 types of simple tests (M3)

を非線形方程式の解として求める。内圧を p として、以下の応力算出式により等二軸応力 σ_b を求める¹⁴⁾。

$$\sigma_b = p(\rho_m - t)^2 / (2\rho_m t) \quad (4)$$

3.3 有限要素解析

単軸引張試験および平面ひずみ引張試験の解析は、平面応力問題として二次元解析を行う。せん断応力 τ_{xy} の影響を測定するために単軸引張試験は RD から TD まで 15deg 毎の計 7 方向に対して、平面ひずみ引張試験は RD と TD の 2 方向に対してそれぞれ行う。液圧バルジ試験の解析には面外せん断成分を考慮しない薄肉シェル要素を用いて 1/4 領域をモデル化する。なお、シェル要素の板厚方向の積分点は 11 点とする。

一例として、Fig. 5 に M3 材の一連の材料試験の解析結果を示す。図はひずみ測定位置の相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^p$ が約 0.05 の時の $\bar{\epsilon}^p$ の分布を示している。

4. 降伏関数の同定手法の検証

4.1 応力の測定値と真値の比較

降伏関数同定の前に、仮想材料試験における応力の測定精度を検証する。Fig. 6 に仮想実験の可計測値から求めた応力（仮想測定値）と、ひずみゲージの貼付想定位置における有限要素内の積分点で算出された応力（真値）との比較を示す。横軸は各試験の応力成分に対応する真ひずみを示す。

単軸引張試験および平面ひずみ引張試験の仮想測定値は真値とほぼ一致している。これに対して液圧バルジ試験では、面内異方性の強い M1 材および M3 材で、仮想測定値が真値から乖離している。異方性の強い板材の等二軸応力状態を液圧バルジ試験で正確に実現する難しさについては、吉田が既に指摘しており¹⁴⁾、本結果はこれと一致する。

なお、単軸引張試験において異方性主軸と引張方向が一致しない場合は、付加的なせん断応力が発生するが、本条件でのせん断応力は、引張応力の 0.2% 程度であったため無視した。

4.2 等塑性仕事面の外接多角形の評価

等塑性仕事面の外接多角形を算出するために、仮想実験により測定された応力と塑性ひずみを用いて、単位体積あたりの塑性仕事を求める。ここでは、等塑性仕事面を以下のように表現する。RD の単軸引張試験において引張方向ひずみ ϵ_0^p までの塑性仕事を計算する。各種材料試験において ϵ_0^p に対応する塑性仕事と等しい塑性仕事が行なわれた時の応力を求め、この応力を用いて等塑性仕事面の外接多角形を定める。等塑性仕事のレベルは基準塑性ひずみ ϵ_0^p で代表して表す²²⁾。

Fig. 7 に仮想測定値から求めた等塑性仕事面の外接多角形を、解析の入力として与えた正解の降伏曲面と共に示す。低ひずみ ($\epsilon_0^p = 0.002$) では、いずれの材料でも平面ひずみ引張試験で測定される外接線が正解の降伏曲面の内側に位置している。この傾向は初期降伏直後の加工硬化勾配が大

Fig. 6 Accuracy of stress measurement by 3 types of simple test (Measured: Calculated from measurable values in virtual experiments, Exact: Local values at integration point in element)

Fig. 7 Circumscribing polygon (Cs.P.) of equal plastic work calculated from virtual experiments and reference yield loci

Fig. 8 Illustration for stress evaluation error of plane strain tensile test in small plastic strain stage

きい M3 材で顕著である。

この理由を Fig. 8 を用いて説明する。平面ひずみ状態の応力比は、弾性状態では Poisson 比によって決まる。しかし、降伏直後に応力経路が変化し、塑性変形の発達に伴い、降伏曲面上で平面ひずみ状態を法線とする応力比 (σ_e を降伏関数として $\partial\sigma_e/\partial\sigma_y=0$ を満たす応力比) に漸近していく。加工硬化勾配が大きいほど、また降伏曲面における平面ひずみ状態の応力比が等二軸に近いほど、この遷移領域の影響は大きくなる。遷移領域における平面ひずみ外接線は、同定すべき降伏曲面の平面ひずみ状態を正確に表現できないため、平面ひずみ引張状態の応力値が低く算出される。ただし、塑性ひずみの増加により、この誤差は軽微となり、 $\varepsilon_0^p=0.03$ で測定された平面ひずみ外接線は、正解の

降伏曲面にほぼ接している。

4.3 同定した降伏関数の評価

前節で示した等塑性仕事面の外接多角形から、降伏関数を同定する。降伏関数の材料パラメータは、以下の条件を満たすように決定する。(1)単軸および等二軸引張試験で求めた応力点を通る。(2)単軸引張りにおける r 値または等二軸応力における r_b から求まる塑性ひずみ増分方向を降伏曲面の外向き法線とする。(3)降伏曲面の異方性主軸方向の最大応力は平面ひずみ引張りの応力値と一致する。

本研究で想定した材料試験は、7 方向の単軸引張試験、2 方向の平面ひずみ引張試験および等二軸応力試験であり、応力値について 10 条件、塑性ひずみ増分方向について 8 条件の合計 18 条件となる。これより最大 18 パラメータを含む降伏関数を同定できる可能性がある。今回用いる降伏関数 Yld2000-2d の材料パラメータは、次数 M を加えても 9 個であるため、以下に示す誤差の自乗和の平方根を目的関数 ψ として、これを最小化する材料パラメータを求める。

$$\psi = \frac{w_\sigma}{\sigma_0} \sqrt{\sum_{i=0}^6 (\sigma_{15i}^{ua} - \tilde{\sigma}_{15i}^{ua})^2 + \sum_{i=0}^1 (\sigma_{90i}^{pe} - \tilde{\sigma}_{90i}^{pe})^2 + (\sigma_b^{eb} - \tilde{\sigma}_b^{eb})^2} + w_\beta \sqrt{\sum_{i=0}^6 (\beta_{15i}^{ua} - \tilde{\beta}_{15i}^{ua})^2 + (\beta^{eb} - \tilde{\beta}^{eb})^2} \quad (5)$$

ここで、右上添字の ua, pe および eb は、それぞれ単軸、平面ひずみおよび等二軸の各試験での値を示す。 σ は応力値を、 β は降伏曲面の法線方向の角度を rad 単位で表した値である。波線 ($\sim$) 付きの変数は同定モデルの値を、波線無しの値は測定された外接多角形の値を示す。 w_σ と w_β は応力と法線方向の誤差に対する重みであり、今回は $w_\sigma/w_\beta=2$ を用いた。この場合、 β の 1 deg の誤差が応力の 1% の誤差とほぼ等価に扱われることを意味している。誤差最小化計算は、Microsoft 社の表計算ソフト Excel に標準搭載されている Solver 機能で十分である。

Table 2 に同定した降伏関数のパラメータの一覧を示す。表の各行の下段には Table 1 に示した正解に対する相対誤差を示す。面内異方性の強い M1 および M3 材では、パラメータとしては、4.1 で述べた等二軸試験の応力測定誤差に起因する同定誤差が約 10% 生じている。

Table 2 Identified material parameters and the error relative to reference ($\varepsilon_0^p=0.05$)

Material	Identified material parameters in Yld2000-2d (% error to reference)								
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	M
M1	0.923	1.194	0.959	0.885	0.921	0.724	1.046	1.028	5.928
	-1.74%	0.81%	8.12%	0.87%	-1.33%	-9.71%	0.04%	0.53%	0.47%
M2	0.970	0.996	0.876	1.006	0.994	0.923	0.984	1.157	9.093
	0.38%	-0.40%	-1.81%	-0.39%	0.05%	0.75%	0.03%	0.01%	2.63%
M3	0.993	0.992	0.849	0.784	0.859	0.414	0.971	0.849	6.138
	1.73%	-0.90%	-4.35%	-0.25%	0.69%	12.27%	-0.15%	-0.38%	0.13%

■ : |error| > 1% ■ : |error| > 5%

Fig. 9 Identified yield loci reproduced using circumscribing polygon and reference yield loci

Fig. 9 に $\varepsilon_0^p = 0.05$ において同定した降伏曲線を正解の曲線とともに示す。いずれの材料でも同定した降伏曲面は仮想材料試験で求めた外接多角形にほぼ内接している。正解の降伏曲面と比較すると、等二軸状態での応力測定精度に課題があるため、M1 および M3 材では、等二軸近傍での降伏曲線の再現精度がわずかに低い。しかし、同定した降伏曲面の応力空間での同定誤差は正解に対して 0.4% 以下であり、正解とほぼ同一の形状を再現できている。

Table 2 に示した材料パラメータの数値上の比較で見られた大きな誤差は、Fig. 9 では見られず、外接多角形を用いた同定法で降伏曲面の形状を補足できている。

5. 結 言

単軸引張試験、液圧バルジによる等二軸応力試験および差分荷重を用いた平面ひずみ引張試験を用いて、等塑性仕事面に外接する多角形を求め、これに内接する滑らかな曲線として異方性降伏関数を同定する手法を示した。また、軟鋼、アルミ合金および純チタンを想定した仮想実験を行い、応力測定誤差および降伏曲面同定誤差について検討した。以下に得られた知見をまとめる。

- (1) 液圧バルジ試験による等二軸応力の測定誤差は、面内異方性の強い板材で大きくなる。また、平面ひずみ引張試験では、加工硬化の初期勾配が大きい材料で、低ひずみ域の外接線の応力値を低く見積もる傾向がある。
- (2) これらの誤差は降伏関数の材料パラメータの同定精度に影響を与えるが、基準塑性ひずみ 0.05 における降伏曲面の同定誤差は軽微であった。

本研究を進めるにあたって東京農工大学 桑原利彦教授に多くの示唆を頂いた。また、本研究は（一社）軽金属学会の「高精度板成形シミュレーションの普及化検討研究部会」および（一社）日本鉄鋼協会の「先進的多軸応力試験による鋼板成形の高度化研究会」の活動の一部として実施した。ここに謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Kuwabara, T. : Int. J. Plast., **23**-3 (2007), 385-419.
- 2) Banabic, D., Barlat, F., Cazacu, O. & Kuwabara, T. : Int. J. Mater. Form., **3** (2010), 165-189.
- 3) Banabic, D. : Sheet Metal Forming Processes – Constitutive Modelling and Numerical Simulation–, (2010), 30-120, Springer.

- 4) Kuwabara, T. & Ikeda, S. : J. Jpn. Soc. Technol. Plast., **40**-457 (1999), 145-149.
- 5) Kuwabara, T., Narihara, K., Yoshida, K. & Takahashi, S. : J. Jpn. Soc. Technol. Plast., **44**-506 (2003), 281-286.
- 6) ISO 16842 : 2014 Metallic materials Sheet and strip Biaxial tensile testing method using a cruciform test piece.
- 7) Matsumoto, S., Tashiro, K., Mazaki, A., Ikeda, S., Yoshida, K., Takahashi, S. & Kuwabara, T. : J. Jpn. Soc. Technol. Plast., **53**-623 (2012), 1065-1069.
- 8) Aretz, H., Hopperstad, O.S. & Lademo, O.-G. : J. Mater. Process. Technol., **186** (2007), 221-235.
- 9) Murayama, Y., Obara, K. & Ikeda, K. : J. Jpn. Soc. Technol. Plast., **35**-399 (1994), 349-354.
- 10) Aydin, M.-S., Gerlacha, J., Kessler, L. & Tekkaya, A.E. : J. Mater. Process. Technol., **211** (2011), 1957-1964.
- 11) Hill, R., Hecker, S. S. & Stout, M. G. : Int. J. Solids Struct., **31** (1994), 2999-3021.
- 12) Drucker, D.C. : Proc. 1st US Nat. Congr. Appl. Mech., (1951), 411-418.
- 13) Hanabusa, Y., Takizawa, H. & Kuwabara, T. : J. Mater. Process. Technol., **213** (2013), 961-970.
- 14) Yoshida, K. : ISIJ Int., **52**-1 (2013), 86-95.
- 15) Nakano, H., Hakoyama, T. & Kuwabara, T. : The 20th ESAFORM, AIP Conf. Proc., **1896** (2017), 020014.
- 16) Kawaguchi, J., Kuwabara, T. & Sakurai, T. : J. Jpn. Inst. Light Met., **65**-11 (2015), 554-560.
- 17) Ishiki, M., Kuwabara, T., Yamaguchi, M., Maeda, K., Hayashida, Y. & Itsumi, Y. : Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. A, **75**-752 (2009), 491-500.
- 18) Barlat, F., Brem, J.C., Yoon, J.W., Chung, K., Dick, R.E., Lege, D.J., Pourboghra, F., Choi, S.H. & Chu, E. : Int. J. Plast., **19** (2003), 1297-1319.
- 19) Wagoner, R.H. & Laukonis, J.V. : Metall. Trans. A, **14A** (1983), 1487-1495.
- 20) Flores, P., Tuninetti, V., Gilles, G., Gonry, P., Duchêne, L. & Habrake, A.M. : J. Mater. Process. Technol., **210** (2010), 1772-1779.
- 21) An, Y.G., Vegter, H. & Elliott, L. : J. Mater. Process. Technol., **155**-156 (2004), 1616-1622.
- 22) Kuwabara, T. : J. Jpn. Soc. Technol. Plast., **57**-669 (2016), 934-939.