剛体壁との衝突における硬式テニス ボールの変形と反発係数の測定と解析†

江 草 利 昌* 佐 川 和 則* 竹 原 幸 生*

Measurement and Analysis of the Deformation and the Restitution Coefficient of a Tennis Ball Colliding with a Rigid Wall

Toshimasa Egusa*, Kazunori Sagawa* and Kosei Takehara*

Abstract

The impact phenomena of a tennis ball on a rigid surface are experimentally investigated by high-speed video camera. It is found that the maximum values of deformations of a ball increase with the incident velocity of a ball, while the collision time and the values of the restitution coefficient decrease with the incident velocity.

The dynamical model including both elastic and damping properties is proposed to explain our experimental results. We have found that our model can well reproduce the experimental values of the restitution coefficient, the collision time and the time history of the deformations.

We also investigate theoretically the rebound velocity, the collision time and the displacement of a ball when it collides with a accelerated rigid surface.

Key words : Tennis Ball, Deformation, Restitution Coefficient, Impact, High-Speed Video Camera

1. 序 論

近年、高性能ラケットの開発や打撃感触の良いテニスボールの開発が試みられている。ラケットにボールが衝突する時、ラケットの振動とストリングスの沈下とボールの変形が起こる。高性能ラケットを設計する為には、ラケットとストリングスとボールのそれぞれの力学特性とそれ等の衝突に於ける力学的挙動を理解することが重要である。

これまで、ラケットやストリングスやボールに対してそれぞれ力学模型を想定し、理論的・

実験的にボールとラケットの衝突の研究⁵⁾⁷⁾が行われている。Headがラージサイズのラケットを開発して以来、ラケットについては比較的よく調べられるようになったが、ボールそのものについての研究はまだ少ない。幾つかの研究⁵⁾⁷⁾ではボールは線形または非線形の弾性ばねとダッシュポットの系に付着した質点として単純に模型化(SDモデル)されている。

しかし、実際には、ボールがコートやラケットに衝突して変形すると、ボールの中心と重心は一致¹⁾しなくなる。ボールの変形が大きいと、この食い違いは無視できないくらい大きくなり、

†原稿受付 1993年6月17日

*近畿大学

〒577 大阪府東大阪市小若江3-4-1

* Kinki University, 4-1, Kowakae 3-chome, Higashiosaka, Osaka, Japan (577)

ボールを質点として取り扱うことは困難になる。

ボールの内圧が大きいとボールはよく弾み、ボールの内圧が小さいとボールの弾みは悪くなることはよく知られている。しかし、このことを物理的に説明することは容易ではない。SDモデルでもボールの内圧とボールの弾みの関係は明瞭であるとは言えない。SDモデルでは普通、弾性ばね定数の値を準静的試験より決めている。準静的試験では、ボールは両側変形し（衝突では片側変形）、ボールの内体積の減少によってボールの内圧は増加するが、その様子は衝突時のそれとは異なる。SDモデルの弾性ばね定数の値がボールの内圧によってきまると考えると、準静的過程と衝突過程でのSDモデルの弾性ばね定数値は同一とはみなせない。こうして、SDモデルを衝突現象に適用するには種々の困難があることがわかる。

最近、ボールの変形そのものを調べる為に、ボールが剛体壁に垂直に衝突した場合を考察し、ボールと剛体壁の接触面が平面と仮定して、ボールの中心と重心の関係やボールに作用する力についての模型が考案¹⁾された。この模型では衝突時にボールに作用する力は大気圧やボールの内圧やボールのコア内部に作用するせん断力に依存すると仮定している。この力はボールの変形が小さいと、重心の変位に対しておおよそ線形と見なされるが、ボールの変形の大きい領域ではしだいに非線形性²⁾を示すようになる。この模型で調べると、ボールの入射速度が小さく、ボールが剛体壁との衝突であまり変形しない場合には、ボールと剛体壁の衝突時間はボールの入射速度に依存せず一定で、ボールの入射速度が大きくて衝突によってボールが大きく変形する場合には、衝突時間はボールの入射速度と共に減少することがわかる。このことと、ボールに作用する力の性質（線形性、非線形性）を考えあわせると、ボールに作用する力の性質が衝突時間のボールの入射速度への依存性に重要な役割を果たしていると思われる。

さらに、この模型で調べると、ボールの入射速度を一定にして、ボールの内圧を大きくする

と、衝突によるボールの変形量は小さくなることがわかる。ボールの変形量が小さいほど、変形によってボールが失うエネルギーは小さくなり、ボールの弾みは良くなると思われる。こうして、ボールの内圧を大きくするとボールの弾みが良くなることがわかる。

幾つかの興味ある結果がこの模型を調べて得られたが、この模型には、せん断力の取り扱いが不十分であることや、エネルギーの散逸力（減衰力）が取り入れられていない等の難点がある。

近年、高速度カメラによって、ボールとラケットの打撃が観測³⁾されボールの入射速度と衝突時間の関係や、反発係数についての知識が得られるようになったが、衝突時のボールの変形の詳細な観測や観測結果を説明するボールの模型についての理解はまだ不十分である。

我々は高速度ビデオカメラによって、ボールが剛体壁に衝突する時のボールの変形と反発係数を測定し、この結果を我々の提案するエネルギーの散逸力を取り入れた力学模型で分析する。さらに、この模型により加速度運動をする壁にボールが衝突する現象をしらべる。

2. 実験の方法

剛体壁に衝突するボールを図1に示すように高速度ビデオカメラ（近畿大学土木工学科で開発⁴⁾）で撮影し、コンピューター処理を行ってボールの変形、入射・反射速度の測定を行った。高速度ビデオカメラの概要は次のようである。

a) フレームレート

1画面全体の画素数は 256×256 で、1秒間に4500コマの撮影が可能である。また撮像素子はMOS型のものであるため、画面全域を読み出す必要はなく、ある領域だけを高速に読み出すことができる。最も小さい領域（1画面 64×64 の画素数）の場合で40500枚/sの撮影が可能である。

b) 撮像素子

MOS型の撮像素子で、画素数は 256×256 列の

図1 実験装置の模式図

65536個である。画素ピッチは $40\mu\text{m}$ としたので、受光面のサイズは1辺 10.24mm の正方形である。また開口率（画素面積に占めるフォトダイオードの面積）は83%と特別大きい。高速信号読みだしの為に、信号は16本の読みだし線から並列に読み出す方式となっている。

c) MCP 型 I.I 内蔵

MCP 型 I.I 管を内蔵することができ、照明ができない現象の撮影が可能となる。またこれにより高速のシャッタリング（最高で 100ns ）ができる。カメラの撮像素子は MOS 型であるためフォーカルプレーン効果があるが、I.I 管でシャッタリングすればフォーカルプレーン効果を防ぐことができる。

d) IC メモリによる記憶装置

撮影された画像信号は撮影後すぐに AD 変換され、画像構成することなく、いわば垂れ流しのデジタル信号として IC メモリーに記録される。画像は撮影終了後に内蔵マイコンで構成する。また記録されたデジタル信号をそのまま出力し、電子計算機で処理することもできる。

記録枚数は標準で、1000枚であり、ボードの追加により5000枚まで拡張できる。記録はアドレス上書き方式で、トリガーがかかると記録が停止する。記録時間は4500枚/秒にたいして標準で約0.22秒、最大で約1.1秒である。フレームレートを500枚/秒とすれば最大10秒間の撮影ができる。

図2 剛体壁に衝突して変形している半径Rのボール.

{ ボールの中心C, ボールの重心Gは座標の原点 }
 { Oよりそれぞれ Z_c , Z_g の位置にある. }

3. エネルギーの散逸力を取り入れた力学模型

ボールが図2に示すように鉛直な質量の充分大きい平面剛体壁に垂直に回転しないで衝突して変形する場合, 文献(1), (2)ではボールに作用する壁からの力 $N^{1)2)}$ は次のように与えられると仮定している.

$$N = F(\text{大気圧}) - F(\text{内圧}) - T_s \quad (1)$$

ここで, $F(\text{大気圧})^{1)}$ は図2に示すボールの壁と接触している部分に作用する大気圧による力で, ボールの壁と接触している円形の部分の面積 $S(=\pi R^2(2Z_c/R - (Z_c/R)^2))$ に大気圧 P_0 を乗じて, 次のようになる.

$$F(\text{大気圧}) = SP_0 = \pi R^2(2Z_c/R - (Z_c/R)^2)P_0 \quad (2)$$

ここで, R はボールの半径($=0.03\text{m}$)で, Z_c は図2に示すボールの変形量で, 大気圧 P_0 は760 mmHg とする.

ボールの壁と接触している部分にはボールの内圧による力 $F(\text{内圧})^{1)}$ が作用しており, 接触部分の面積 S にボールの内圧 $P^{1)}$ を乗じて次のよ

うになる.

$$F(\text{内圧}) = \pi R^2(2Z_c/R - (Z_c/R)^2)P' \quad (3)$$

ボールが Z_c だけ変形している時のボールの内圧 P' はボールが変形していない時の内圧を $1.9P_0$ として, 次のようになる.

$$P' = 7.6P_0 / (4 - 3Z_c^2(R - \delta/2)^{-2} + Z_c^3(R - \delta/2)^{-3}) \quad (4)$$

ここで, δ はコアの厚みで $5 \times 10^{-3}\text{m}$ である.

(1)式の右辺の T_s はボールの壁と接触している円形の部分の円周上に作用する Z 軸に平行なせん断力で, 文献(1),(2)では単位長さあたりのせん断力にボールと壁の接触部分の円周の長さを乗じたものとして取り扱われている. 文献(3)では, 以下に概説するように, せん断力 T_s に具体的な形³⁾を与え, ボールが変形する時, コアの内部に生じるエネルギーの散逸力 $T_E^{3)}$ を導入して, 文献(1),(2)の力学模型を改善した. ボールが図2のように変形した状態からさらに微小な ΔZ_c だけ変形すると, ボールの壁と接触している円形の部分の半径 r は Δr だけ増加する. ΔZ_c の2次の量を無視すると, $\Delta r = (dr/dZ_c) \Delta Z_c$ となるか

ら, $r = (2RZ_c - Z_c^2)^{1/2}$ を使って, $\Delta r = (R - Z_c) \Delta Z_c / r$ を得る. ボールが ΔZ_c だけ変形する時の歪み $\gamma (= \Delta Z_c / \Delta r)$ は $\Delta r = (R - Z_c) \Delta Z_c / r$ を使って次のようになる.

$$\gamma = (2RZ_c - Z_c^2)^{1/2} / (R - Z_c) \quad (5)$$

ボールの壁と接触している円形の部分の円周上に作用する Z 軸に平行なせん断応力 $\hat{T}_s$ は, コアの剛性率 G と歪み γ と $\hat{T}_s$ の初期値 α を使って, 次のように表せる.

$$\hat{T}_s = G\gamma + \alpha \quad (6)$$

ボールの壁と接触している円形の部分の円周上に作用する Z 軸に平行なせん断力 T_s は(6)式のせん断応力 $\hat{T}_s$ に円形部分の円周の長さとコアの厚みを乗じて, 次のようになる.

$$T_s = 2\pi R (2Z_c/R - (Z_c/R)^2)^{1/2} (G\delta\gamma + \beta) \quad (7)$$

ここで $\beta = \delta\alpha$ で, β は一般に Z_c に依存する.

ボールは変形によってエネルギーを失う. ボールが時間 Δt の間に ΔZ_c だけ変形した時, コアの内部の変形部分に作用する粘性応力 $\hat{T}_e$ が歪み速度 $(\Delta Z_c / \Delta r) / \Delta t$ に比例すると仮定し, この粘性応力 $\hat{T}_e$ にボールの壁と接触している円形の部分の円周の長さとコアの厚みを乗じて, エネルギーの散逸力 T_e を求めると次のようになる.

$$T_e = 2\pi R (2Z_c/R - (Z_c/R)^2)^{1/2} \eta (dZ_c/dt) / (R - Z_c) \quad (8)$$

ここで η はコアの粘性率に対応する定数である.

エネルギーの散逸力 (減衰力) は文献(7)では線形減衰則 ($T_e = C_b dZ_c/dt$) に従うと仮定されている. そしてこのことを落下実験によって確かめている. しかし, ボールが衝突した直後はボールの変形は小さくエネルギーの散逸も大きくないと想像される. 我々はボールが変形する時, コアの内部に作用するエネルギーの散逸力は歪み速度と円周の長さ $\times \delta$ に比例するとし線形減衰則とは異なる仮定をしている. このことにより, ボールの変形やボールの変形の手がかりが小さい場合には, エネルギーの散逸力は小さくなる.

図 2 に示すように, ボールが変形すると, ボールの重心の位置 Z_g と中心の位置 Z_c は一致せず, その関係は次のように与えられる.

図 3 ボールの最大変化量 ΔL_c 対ボールの入射速度 V_0

実線 a) は我々の模型による理論値

実線 b) は我々の模型で $T_s = T_e = 0$ として得た理論値

$$Z_g = Z_c - Z_c^2 / (4R) \quad (9)$$

ボールの重心 G とボールの中心 C は $Z_c^2 / (4R)$ だけずれることになり, これはボールの変形と共に増大する.

静止した質量の充分大きい剛体壁にボールが衝突して変形する時, 我々の模型では, (2),(3),(7), (8)式で与えられる力を使って, ボールの質量を M として, ボールの運動方程式は次のようになる.

$$Md^2Z_g/dt^2 = F(\text{大気圧}) - F(\text{内圧}) - T_s - T_e \quad (10)$$

又, 剛体壁が加速度 a で動いている時, ボールが剛体壁から受ける力 N と(8)式で与えられるエネルギーの散逸力 T_e を使って, 加速度運動をする剛体壁に固定した座標系でのボールの重心の位置を Z_g として, ボールの運動方程式は次のようになる.

$$Md^2Z_g/dt^2 = N - T_e - Ma \quad (11)$$

4. 測定結果と考察

4-1 ボールの中心の変位と最大変位

質量が 0.055kg, 外半径が 3.25cm の試料のダンロップフォートを入射速度 4.1m/s ~ 14.1m/s で剛体壁に垂直に衝突させ, ボールの中心の位置の変位 Z_c を高速度ビデオカメラで測定した.

ボールの中心の最大変位 ΔL_c (測定値) と入射速度 V_0 の関係を図 3 に示し, 我々の模型による理論値と比較する.

文献(1)では Z_c に対して線形なボールに作用する力によるボールの変形が調べられている. そして, 適当な仮定のもとに, この力を $2\pi R\Delta P Z_c$ として, ΔL_c と V_0 の関係を調べ, $\Delta L_c = V_0 (2\pi R\Delta P/M)^{-1/2}$ という結果を得ている. この結果を使って, $R=0.03\text{m}$, $M=0.055\text{kg}$, $\Delta P=0.9$ 気圧として ΔL_c を求めると, $V_0=4.1\text{m/s}$ に対して $\Delta L_c=0.77\times 10^{-2}\text{m}$ となり, $V_0=14.1\text{m/s}$ に対して $\Delta L_c=2.7\times 10^{-2}\text{m}$ となり, これは V_0 が小さい領域では図 3 に示す測定値と比較的によく一致しているが, V_0 が大きくなると測定値よりかなり大きい.

我々の模型は文献(1)のモデルを改善して, ボールの変形が大きくなるにつれてボールの内圧が増加する効果や, コアの剛性や粘性がボールの変形に及ぼす影響を取り入れ, ボールに作用する力は, (2)式で与えられる F (大気圧) や(3), (4)式で与えられる F (内圧) や(5), (6), (7)式で与えられる T_s や(8)式で与えられる T_E を使って, (10)式の右辺に示すように与えられると仮定している. そして, ボールが変形するにつれてボールの重心 G とボールの中心 C は(9)式に示すように一致しなくなると考えている.

我々の模型で, $G=2\times 10^5\text{N/m}^2$, $\eta=140\text{Pa}\cdot\text{s}$, $\beta=-500\text{N/m}$ として, 初期条件を与えて(10)式を数値計算で解いて ΔL_c を求めると図 3 の実線 a) に示すようになる. 図 3 よりわかるように, 我々の模型による ΔL_c の理論値は ΔL_c の測定値を V_0 の広い範囲にわたって良く再現している.

我々の模型では, V_0 が小さい場合には, ボールに作用する力の中で F (内圧) - F (大気圧) が支配的で T_s や T_E はあまり大きくないが, V_0 が大きい場合には, T_s は小さいが T_E は F (内圧) や F (大気圧) と同程度の大きさになる. V_0 が大きい場合には, ボールの変形にエネルギーの散逸力が重要な役割を果たしていると思われる. このことを調べる為に, 我々の模型で $T_E=0$ として (T_s は小さいから無視する), (10)式を数値計

算で解いて ΔL_c を求めると, 図 3 の実線 b) のようになる. 図 3 の実線 a) と b) と測定値を比べると, 我々の模型で求めた ΔL_c と T_E を無視した模型で得た ΔL_c は V_0 の小さい領域では測定値と比較的によく一致しているが, V_0 の大きい領域では T_E を無視して得た ΔL_c は我々の模型で求めた ΔL_c や測定値よりかなり大きいことがわかる. このことから, 我々の模型では, V_0 の大きい領域で, エネルギーの散逸力によってボールの最大変形が押さえられることがわかる.

我々の模型は 3 個の未知量 G , η , β を含んでいる. G と η と β の値は図 3 に示したボールの最大変形の測定値を我々の模型で再現するようにきめた. 我々の模型で, コアの剛性率 G を $2\times 10^5\text{N/m}^2$ としてボールの変形の分析を行ったが, この G の値は弾性ゴムの剛性率 $5\sim 15\times 10^5\text{N/m}^2$ とほぼ一致する常識的な値である.

公認ボールは庭球規則によってバウンドや変形が定められている. この規則では, ボールのバウンドはコンクリーの床上 254cm の高さよりボールが落下した時, ボールの跳ね返りの高さが 135cm 以上 147cm 以下となるように定められている. ボールが 254cm の高さより落下した時, 空気抵抗を無視すると (空気抵抗の影響はボールの速さに 2.5% 程度の影響を与える), ボールが床に衝突する速さは約 7.1m/s である. ボールの入射速度の値が約 7m/s 前後では, コアの硬さや粘性を取り入れても (図 3 の実線 a), 取り入れなくても (図 3 の実線 b), 我々の模型は測定値を良く再現することが図 3 よりわかる. 公認球の落下試験基準によるボールの床への衝突では, ボールの変形は小さくてコアの硬さや粘性にあまり依存せず, ボールの内圧に強い影響をうける. 実際のグラウンドストロークやサービスではボールとラケットの相対速度は大きく, ボールの変形も大きくなるから, 打撃の機構にコアの硬さや粘性を取り入れなければならない.

図 4 では剛体壁に衝突したボールの入射・反射過程の Z_c の測定値と次のような手順で得た理論値を比較した. 入射過程 (ボールが壁に衝突して静止するまでの過程) では, $G=2\times 10^5\text{N/m}^2$,

図4 ボールの変化量 Z_c 対 t
実線は我々の模型による理論値

$\eta=140\text{Pa}\cdot\text{s}$, $\beta=-500\text{N/m}$ として, 我々の模型で(10)式を初期条件 $V_0=14.1\text{m/s}$, $Z_c(0)=0$ を使って解いて ΔL_c と $Z_c(t)$ をもとめた. 反射過程(ボールが静止の状態から壁より離れる過程)では, G や β の値は入射過程と同じだが, η は入射過程とは異なると考えて⁶⁾, $\eta=-30\text{Pa}\cdot\text{s}$ とし, 初期条件 $V_0=0$, $Z_c(0)=\Delta L_c$ を使って(10)式を解いてボールの変形 $Z_c(t)$ や反射速度 V' や反射時間 T' を求めた. 理論値は測定値を大略再現している. 衝突時間は 10^{-3}s 程度に短いことを考慮して, 衝突を断熱過程として分析し直すことや, コアのエネルギーの散逸機構を研究することは今後の課題である.

4-2 衝突時間

ボールの入射速度 V_0 に対する入射時間 T , 反射時間 T' , 衝突時間 T_0 の測定値と我々の模型による理論値を表1で比較した. 理論値は $G=2\times 10^5\text{N/m}$, $\beta=-500\text{N/m}$ とし, 入射過程に対しては $\eta=140\text{Pa}\cdot\text{s}$, 反射過程に対しては $\eta=-30\text{Pa}\cdot\text{s}$ として, それぞれの V_0 の値に対して(10)式を数値計算により解いて求めた. 表1よりわかるように測定結果は T' は T より大きいことと, T, T', T_0 は V_0 の増大につれて減少することを示している.

我々の模型では T_E を無視して(10)式より T, T' を求めると, $T=T'$ となるが, T_E を取り入れて(10)式より T, T' を求めると $T<T'$ となる. 測定結果は $V_0=4.1\sim 14.1\text{m/s}$ に対して $T<T'$ となることを示しているが, これは我々の模型ではボールが変形する時のエネルギーの散逸に拠るものと考えられる.

我々の模型では, V_0 が小さくボールの変形が小さい場合にはボールに作用する力の振るまいを簡単に調べることができる. 我々の模型では, ボールに作用する力 ((10)式の右辺)の中で F (内圧) - F (大気圧) が支配的で, これはボールの変形が充分小さい場合には, 近似的に $2\pi R\Delta P Z_c$ となる. T_s や T_E はこの力に比べて充分小さいから無視すると, ボールに作用する力は Z_c に対して線形で, この力を用いて(10)式を解くと $T=T'=2\pi (2\pi R\Delta P)^{-1/2}$ となり, T, T' はボールの入射速度に依存しない. $R=0.03\text{m}$, $\Delta P=0.9\text{気圧}$ とすると $T=T'=3\text{ms}$ となり, 表1に示すようにボールの変形があまり大きくない $V_0=4.1\text{m/s}$ の場合の T, T' の測定値とおおよそ合致している. V_0 が大きい場合にはボールの変形は大きくなり上述のような Z_c に対して線形なボールに作用する力を用いて T, T' を求めることはできない. 我々の模型では V_0 が大きくなり, ボールの変形が大

表1 衝突時間対入射速度 V_0 .T(実), T'(実), T_0 (実): 入射時間, 反射時間, 衝突時間の測定値T(理), T'(理), T_0 (理): 入射時間, 反射時間, 衝突時間の我々の模型で求めた理論値

*) ダンロップ社より得た測定値

$$G = 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \quad \eta = 140 \text{ Pa} \cdot \text{s (入射)}$$

$$\beta = -500 \text{ N/m} \quad \eta = -30 \text{ Pa} \cdot \text{s (反射)}$$

V_0 m/s	30	25	20	18	14.1	11.5	9	7.4	4.1
T (実) ms					1.8	1.9	2.0	2.3	2.9
T (理) ms	1.0	1.3	1.5	1.6	1.9	2.1	2.3	2.5	3.0
T' (実) ms					2.1	2.2	2.2	2.7	3.3
T' (理) ms	1.7	1.9	2.1	2.2	2.4	2.6	2.9	3.0	3.6
T_0 (実) ms				3.8 ^{*)}	3.9	4.1	4.2	5.0	6.2
T_0 (理) ms	2.7	3.2	3.6	3.8	4.3	4.7	5.2	5.5	6.6

きくなると F (内圧) $- F$ (大気圧) は(2), (3), (4)式からわかるように, Z_G に対して非線形的に増大する性質を示すようになる. V_0 が大きくなると, T_s は小さいが T_E は F (内圧) $- F$ (大気圧) に対して無視できなくなる. T_E は Z_G に対して Z_G が小さいところでは, 単調に増加し, 次いで極大となり, その後減少するという振るまいをする. しかし, ボールに作用する力 (F (内圧) $- F$ (大気圧) $+ T_s + T_E$) は全体として Z_G に対して非線形的に増大する性質を示す. 我々の模型で求めた T, T' の理論値は表1からわかるように, V_0 が大きくなると減少していく. 測定値も同じ傾向を示しているが, この傾向は我々の模型ではボールに作用する力が Z_G に対して非線形的に増大することに起因していると考えられる.

4-3 反発係数

ボールの入射速度 V_0 に対する反射速度 V' と反発係数 $e (= V'/V_0)$ の測定値を表2に示し, 我々の模型による理論値と比較した. e の測定値は V_0 の増大と共に減少する. V_0 が大きくなると, ボールの変形は大きくなり, エネルギーの散逸も大きくなるから, V' は小さくなり, e も小さくなる.

ラケットヘッドを固定したラケットにボールを衝突させた時, 反発係数はボールの入射速度 V_0 ($V_0 = 14 \sim 25 \text{ m/s}$) によらずほぼ一定であると報告⁵⁾されている. 我々の e の測定値や理論値は V_0 に依存していることを示しているから, この報告とは矛盾しているように見える. 剛体壁にボールを衝突させた場合には V_0 が大きくなると, ΔL_c も大きくなり, 失うエネルギーも大きくなるが (e は小さくなる), ボールがストリングスに衝突する場合には, V_0 が大きくなると, ストリングスの沈下が大きくなりボールの最大変形 ΔL_c はあまり大きくなり, エネルギーの損失は大きくならない (e はほぼ一定) であろう. ストリングスの張力の強弱とボールの失うエネルギーは関係しており, ストリングスの張力を弱めると反発係数 e は大きくなると予想⁷⁾される. 我々は, このことを実験や理論で確かめることは, 今後の課題であると考えている. ラケットでボールを打つ場合の反発係数は, 上述のストリングスの問題や, ラケットの屈曲や, ラケットが加速度運動をしていること等を考慮すると, 剛体壁に於ける反発係数とは異なるであろう.

我々の模型では, (8)式からわかるように, ボールの変形 Z_G がボールの半径 R に近づくとエネ

表2 反射係数 e 対入射速度 V_0 .

e (実): 反発係数の測定値 e (理): 我々の模型で求めた反発係数の理論値

V' (実): 反射速度の測定値 V' (理): 我々の模型で求めた反射速度の理論値

*) ダンロップ社より得た測定値

$$G = 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \quad \eta = 140 \text{ Pa} \cdot \text{s (入射)}$$

$$\beta = -500 \text{ N/m} \quad \eta = -30 \text{ Pa} \cdot \text{s (反射)}$$

V_0 m/s	30	20	18	14.1	11.5	9	7.4	4.1
V' (実) m/s	15 ^{*)}	12 ^{*)}		10.2	9.3	7.8	6.1	3.5
V' (理) m/s	17	13	12	10.0	8.4	6.8	5.7	3.3
e (実)	0.5 ^{*)}	0.6 ^{*)}		0.72	0.81	0.87	0.82	0.85
e (理)	0.57	0.65	0.67	0.71	0.73	0.76	0.77	0.80

表3 加速度運動をする壁とボールの衝突

衝突後のボールの速さ, ボールの重心の移動距離

衝突時間: 我々の模型で求めた理論値

$$G = 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \quad \eta = 140 \text{ Pa} \cdot \text{s (入射)}$$

$$\beta = -500 \text{ N/m} \quad \eta = -30 \text{ Pa} \cdot \text{s (反射)}$$

壁の加速度 m/s ²	壁の初速 m/s	衝突後のボール の速さ m/s	ボールの重心の 移動距離 cm	衝突時間 ms
1.25×10^3	14.1	30	6.8	4.1
-1.25×10^3	14.1	17	5.1	4.6
0	25	40	7.9	3.2
-1.25×10^3	25	34.4	7.3	3.2

ルギーの散逸力は急激に大きくなる。線形減衰則ではエネルギーの散逸力はボールの変形の大さにあまり依存しておらず、我々の模型の仮定とは異なる。線形減衰則の減衰係数 C_D を $6.66 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ とすると、 $V_0 = 14 \text{ m/s}$ に対して、エネルギーの散逸力は 93 N となる。ボールは衝突の瞬間から、ほとんど変形していないのに、 93 N のエネルギーの散逸力によってその速さを減じることになる。今回の Z_G の測定結果は衝突直後にボールの速さが大きく減少していないことを示しているようである。(8)式のようなエネルギーの散逸力を取り入れた我々の模型は $V_0 = 4.1 \sim 30 \text{ m/s}$ の広い範囲にわたって反発係数の測

定値を比較的良好に説明する。

4-4 加速度運動をする壁へのボールの衝突

ラケットでボールを打つ場合、ラケットは並進加速度運動や回転運動をしている。

変形の無視できるラケットに充分強くストリングスを張って、ラケットを並進加速させて、ボールを打つ場合を想定する。これは並進加速度運動をする壁にボールが衝突した場合に対応する。ボールの初速が小さく、ボールに作用する力が Z_G に対して線形な場合は調べられており¹⁾、壁を加速すると、ボールの反射速度は大きくなり、ボールと壁の接触距離は長くなることがわ

かっている。壁の加速度 a が $a=0, a=\pm 1.25 \times 10^3 \text{m/s}^2$ で、ボールの初速は零、壁の初速 U_0 は $U_0=14.1 \text{m/s}, 25 \text{m/s}$ の場合について我々の模型で調べてみる。壁の加速度 a と初速 U_0 を与えて、ボールに作用する壁からの力 N は便宜的に静止する剛体壁の場合と同じものを用いて、 $G=2 \times 10^5 \text{N/m}^2, \beta=-500 \text{N/m}, \eta=140 \text{Pa} \cdot \text{s}$ (入射過程) として、(II)式を解くと、ボールの重心の最大変位 ΔL_c , 入射時間 T を得ることができる。さらに、 $Z_c(0)=\Delta L_c$, ボールの初速は零として、 $Z_c(T')=0$ となる T' 及び $dZ_c/dt(T')$ を G, β の値は入射過程と同じだが、 $\eta=-30 \text{Pa} \cdot \text{s}$ (反射過程) として、(II)式を解いて求める。この結果を使って、衝突後のボールの速さ、ボールと壁の接触距離、衝突時間を求めて表3に示した。

衝突後のボールの速さ V' は壁の加速度の大きさに強く依存する。 $U_0=14.1 \text{m/s}$ の場合壁を加速すると V' は 30m/s となり、 $U_0=25 \text{m/s}$ の場合、壁を減速すると $V'=34.4 \text{m/s}$ となる。このことから、ラケットの初速 U_0 は小さくても、ラケットを加速するとかかなり威力のあるボールを打つことができると想像される。又、壁を加速する方が壁とボールの接触距離を長くすることが表3よりわかる。ラケットでボールを打つ時、ラケットを加速する、または減速を押さえることがボールのコントロールを良くすることに役立つと思われる。

5. 結 論

- 1) 実験結果から入射時間 T や反射時間 T' や衝突時間 T_0 や反発係数 e はボールの入射速度 V_0 の増大につれて小さくなり、ボールの最大変形 ΔL_c は V_0 の増大につれて大きくなることがわかった。又、実験結果は反射時間 T' は入射時間 T より長くなることを示している。
- 2) 上述の実験結果を説明する力学模型を提案した。この模型では、大気圧やボールの内
- 3) この模型は $\Delta L_c, T, T', T_0, e$ の実験結果を $V_0=4.1 \text{m/s}$ から 14.1m/s の範囲にわたって良く説明する。
- 4) この模型で、加速度運動する壁にボールが衝突する場合を調べると、ボールの反射速度やボールと壁の接触距離は加速度の増大と共に大きくなることがわかった。

参 考 文 献

- 1) 江草利昌, 佐川和則: 剛体壁に衝突する硬式テニスボールの変形についての考察, 近畿大学教養部研究紀要, 24, 2, 67, 1992.
- 2) 江草利昌, 佐川和則: 硬式テニスボールの衝突現象の高速度ビデオカメラによる計測と解析, スポーツ工学シンポジウム1992, 講演論文集, No.920-89, 1992.
- 3) 江草利昌, 佐川和則, 竹原幸生: 硬式テニスボールの変形とエネルギーの散逸力の分析, 日本機械学会第70期通常総会講演論文集, No.930-9, 379, 1993.
- 4) 江藤剛二: 高速度カメラ, テレビジョン学会誌, 46, 5, 543, 1992.
- 5) 川副嘉彦: テニスのインパクトに関する力学的考察, スポーツ工学シンポジウム1992, 講演論文集, No.920-89, 74, 1992.
- 6) 小林一敏: ベキ関数型ゴム粘弾性モデルの同定, 日本機械学会第70期通常総会講演論文集, No.930-9, 385, 1993.
- 7) Leigh, D and Lu, W.: Dynamics of the Interactions Between Ball, Strings, and Racket in Tennis, International Journal of Sport Biomechanics, 8, 181, 1992.
- 8) 友末亮三: インパクトの秘密, 月刊テニスジャーナル, No.64, 67, 1989.