原著論文

棒高跳びポールの大たわみ変形挙動と跳躍特性の基礎的研究†

大槻敦巳* 大島成通*

Fundamental Study on Large Deformations of Poles
and Pole-Vaulting Characteristics

Atsumi OHTSUKI* and Shigemichi OHSHIMA*

Abstract

The record in pole-vaulting has been improved by using flexible fiberglass poles. In analysis of the dynamics of pole-vaulting, it is necessary to consider the high flexibility of poles. This paper deals with the large deformations of poles subjected to concentrated loads at two supporting points. A simple combination model is introduced which consists of a mass (vaulter) and a pole. Analytical solutions in terms of elliptic integrals are derived for vertical and horizontal displacements. Furthermore, time progress of pole deformation is investigated. From the results, it is clarified that the initial conditions(e.g., vertical and horizontal velocities of the vaulter) and the applied bending moment play important roles.

Key words : Pole-Vaulting, Pole Deformation, Bio-Motion, Simulation, Nonlinear Problem

1. はじめに

Fig. 1 に示すように、棒高跳び競技は助走と踏切による運動エネルギーをいったんポールの変形エネルギーとして蓄え、その変形エネルギーを徐々に放出することによって高さを獲得する競技であり、ポール素材が木製、竹製、ジュラルミン製、スチール製、そして現在のグラスファイバー製へと改善されるに従い跳躍記録が更新されてきた。このように、棒高跳びの記録向上には競技者の技量に加え、ポールの素材やポ

ール性能(特性)が大きく影響しているため、棒高跳びの跳躍テクニックにはポールの材料特性を精確に把握することが必要になっている。すなわち現今のグラスファイバーポールは極めて大きな変形を示す(Fig. 1 参照)ものであり、従来のように跳躍者の訓練によってポールの大たわみ変形特性を体験的に知るだけでは効果的な記録向上に結びつかないため、工学的視点からポールの有する変形特性を調べ、高く跳ぶために如何に効率的に人間機能を発揮させるかの研究が重要となってきた。

†原稿受付 1998年3月3日

1997年10月 スポーツ工学シンポジウム1997にて発表

*名城大学理工学部機械工学科

〒468-8502 愛知県名古屋市中白区塩釜口1-501

*Department of Mechanical Engineering, Meijo University, 1-501, Shiogamaguchi, Tempaku, Nagoya, Aichi, Japan (468-8502)

Fig. 1 An example of pole-vaulting with a fiberglass pole

棒高跳びの跳躍特性に関してはポールの弾性エネルギーのみに注目した例¹⁾やポール変形を近似的に扱っている例²⁾³⁾がほとんどであり、ポールの大変形特性についてはポール先端の一点に集中荷重とモーメントが作用した場合の解析例⁴⁾⁵⁾やポールの反転を考慮した著者らの解析理論⁶⁾がある。本論文は、跳躍者が備えている能力(助走力：初期水平方向速度，ジャンプ力：初期垂直方向速度)および体重などから、最高の跳躍高さ獲得に最適なポール(長さおよび剛性)を選択する際の目安を得るためにポールの大変形挙動について検討を加えたもので、実際上のポール負荷条件を十分考慮し、跳躍者の右手と左手の保持部分に相当する二点に二つの集中荷重を作用させた場合を非線形解析した。さらに、跳躍者の運動については跳躍者を質点とする簡単なモデルを構築し、跳躍高さに及ぼすポール性能(長さ、剛性)、跳躍者能力(走力等)などの影響を動力学的に解析した。

2. ポールの大たわみ変形理論解析

棒高跳びのポールはグラウンドボックス内のポール一端を回転自由端 A とし、他端 C および C から長さ l の位置 B に集中荷重を同時に受ける大たわみはりとしてモデル化 (Fig. 2 参照) できる。ただし、二つの荷重の大きさ、方向により、ポールに変曲点 (点 D) が現れる場合と、現れない場合がある。Fig. 2 に示すように回転自由端

Fig. 2 Schematic configuration of pole-vaulting

A を座標原点とし、水平方向に距離 x 、鉛直方向に距離 y 、たわみ曲線の円弧長さに s をとり、たわみ角を θ で表す。さらにはりの曲率半径を R 、曲げモーメントを M とすれば、 R, M, s, x, y, θ の各量間に成り立つたわみの関係式は、はりの縦弾性係数を E 、中立軸に関するはりの断面二次モーメントを I として

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{M}{EI} = -\frac{d\theta}{ds} \\ dy &= ds \cdot \sin\theta, \quad dx = ds \cdot \cos\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

点 B および自由端 C が水平方向に対してそれぞれ角度 α_1, α_2 をなす斜め集中荷重 P_1, P_2 を同時に受けるとき、回転自由端 A における鉛直方

向反力 P_V , 水平方向反力 P_H は

$$P_V = P_1 \cdot \sin \alpha_1 + P_2 \cdot \sin \alpha_2, \quad P_H = P_1 \cdot \cos \alpha_1 + P_2 \cdot \cos \alpha_2$$

$$\dots\dots\dots(2)$$

なお, 本モデルにおいては以下のように荷重点 B を境にして区間 AB と区間 BC で異なる変形理論式が導かれる。

2. 1 区間 AB に対する変形理論

区間 AB のはりの長さを L , 点 B におけるモーメントを M_B とすれば, たわみ曲線上の任意点 (x, y) に作用する曲げモーメント M は

$$M = -P_V \cdot x + P_H \cdot y = -P_V L \cdot \xi + P_H L \cdot \eta \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= s/L, \quad \xi = x/L, \quad \eta = y/L, \quad \delta = l/L, \\ \lambda_1 &= P_1 L^2 / (EI), \quad \lambda_2 = P_2 L^2 / (EI), \quad \beta = M_B L / (EI) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(3)の両辺を ζ で微分し, たわみ関係式(1)を考慮すれば

$$d^2 \theta / d\zeta^2 + \lambda \cdot \sin(\theta - \alpha) = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \lambda_2^2} \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$\alpha = \text{Arctan} \left(\frac{\lambda_1 \sin \alpha_1 + \lambda_2 \sin \alpha_2}{\lambda_1 \cos \alpha_1 + \lambda_2 \cos \alpha_2} \right) \quad \dots\dots\dots(7)$$

さらに, 点 B における境界条件 $(d\theta/d\zeta)|_{\theta=\theta_B} = M_B L / (EI) = -\beta$ より, 最終的に

$$d\theta/d\zeta = \pm \sqrt{2\lambda \{ \cos(\theta - \alpha) + \beta^2 / (2\lambda) - \cos(\theta_B - \alpha) \}} \quad \dots\dots\dots(8)$$

なお, 右辺の正負符号(±)は, 無次元円弧長さ ζ に対したわみ角 θ が増加する区間で正, 減少する区間で負を採用する。ところで, 本論文においては変曲点 D が存在する場合のみの理論計算式を示すこととする。

微分方程式(8)の理論解析にあたり

$$k = \sqrt{[2\lambda \{ 1 - \cos(\theta_B - \alpha) \} + \beta^2] / \lambda} / 2 \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$1 - \cos(\theta - \alpha) = 2k^2 \cdot \sin^2 \phi \quad \dots\dots\dots(10)$$

(ただし, $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$)

を導入すれば, 微小量 $d\zeta$, $d\xi$, $d\eta$ は

$$d\zeta = \pm d\phi / (\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}) \quad \dots\dots\dots(11)$$

[-: 区間 AD, +: 区間 DB]

$$d\xi = \pm 1/\sqrt{\lambda} \{ -2k \cdot \sin \alpha \cdot \sin \phi + \cos \alpha \cdot (2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} - 1/\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}) \} \cdot d\phi$$

[-: 区間 AD, +: 区間 DB] $\dots\dots\dots(12)$

$$d\eta = \pm 1/\sqrt{\lambda} \{ 2k \cdot \cos \alpha \cdot \sin \phi + \sin \alpha \cdot (2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} - 1/\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}) \} \cdot d\phi$$

[-: 区間 AD, +: 区間 DB] $\dots\dots\dots(13)$

ここで, 新しい角度変数 ϕ は

$$\phi = \pm \text{Arcsin} \left\{ \sqrt{\frac{2\lambda \{ 1 - \cos(\theta - \alpha) \}}{2\lambda \{ 1 - \cos(\theta_B - \alpha) \} + \beta^2}} \right\} \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$\left[\begin{array}{ll} + : & 0 \leq \theta - \alpha \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2 \\ - : & -\pi \leq \theta - \alpha \leq 0, \quad -\pi/2 \leq \phi \leq 0 \end{array} \right]$$

したがって, 式(11)を角度変数 $\phi_A \sim \phi$ (実角度 $\theta_A \sim \theta$ に対応)にわたって積分すれば, はりのたわみ曲線上の任意点までの無次元円弧長さ ζ を求めることができ, 変曲点 D を境に 2 つの解析式が導かれる。角度変数 ϕ_A , ϕ_D について, 回転自由端 A, 変曲点 D において

$$(d\theta/d\zeta)|_{\theta=\theta_A} = (d\theta/d\zeta)|_{\theta=\theta_D} = 0, \quad \text{すなわち}$$

$$\phi_A = \pi/2, \quad \phi_D = -\pi/2 \quad \dots\dots\dots(15)$$

なる条件を考慮すれば

$$\zeta = \int_{\phi_A}^{\phi} d\zeta = \{ K(k) - F(k, \phi) \} / \sqrt{\lambda} \quad \dots\dots\dots(16)$$

[区間 AD]

$$\zeta = \int_{\phi_A}^{\phi_D} d\zeta + \int_{\phi_D}^{\phi} d\zeta = \{ 3K(k) + F(k, \phi) \} / \sqrt{\lambda} \quad \dots\dots\dots(17)$$

[区間 DB]

同様にして、たわみ曲線上の任意点までの無次元水平距離 ξ は、式(12)より

$$\xi = -\{2k \cdot \sin \alpha \cdot \cos \phi + \cos \alpha \cdot \Phi_1(\phi)\} / \sqrt{\lambda} \quad \cdots \cdots (18)$$

[区間 AD]

$$= \{2k \cdot \sin \alpha \cdot \cos \phi + \cos \alpha \cdot \Phi_2(\phi)\} / \sqrt{\lambda} \quad \cdots \cdots (19)$$

[区間 DB]

ここで、

$$\Phi_1(\phi) = \{K(k) - F(k, \phi)\} - 2\{E(k) - E(k, \phi)\}$$

$$\Phi_2(\phi) = -\{3K(k) + F(k, \phi)\} + 2\{3E(k) + E(k, \phi)\}$$

なお、 $F(k, \phi)$ 、 $E(k, \phi)$ は Legendre-Jacobi の不完全だ円積分第一種、第二種、 $K(k)$ 、 $E(k)$ は完全だ円積分第一種、第二種を表す。

さらに、たわみ曲線上の任意点における無次元垂直距離 η は、式(13)より

$$\eta = \{2k \cdot \cos \alpha \cdot \cos \phi - \sin \alpha \cdot \Phi_1(\phi)\} / \sqrt{\lambda} \quad \cdots \cdots (20)$$

[区間 AD]

$$= \{-2k \cdot \cos \alpha \cdot \cos \phi + \sin \alpha \cdot \Phi_2(\phi)\} / \sqrt{\lambda} \quad \cdots \cdots (21)$$

[区間 DB]

ところで、はりの変形後のたわみ曲線における円弧長さ s_B は、AB 間のはり長 L に等しく、式(17)において $\phi = \phi_B$ で $\xi_B (= s_B/L) = 1$ なる条件より、合成荷重パラメータ λ は

$$\lambda = \{3K(k) + F(k, \phi_B)\}^2 \quad \cdots \cdots (22)$$

したがって、点 B までの無次元水平距離

$$\xi_B (= \xi|_{\phi=\phi_B}) \text{ は}$$

$$\xi_B = \frac{2k \cdot \sin \alpha \cdot \cos \phi_B + \cos \alpha \cdot \Phi_2(\phi_B)}{3K(k) + F(k, \phi_B)} \quad \cdots \cdots (23)$$

点 B における無次元垂直距離 $\eta_B (= \eta|_{\phi=\phi_B})$ は

$$\eta_B = \frac{-2k \cdot \cos \alpha \cdot \cos \phi_B + \sin \alpha \cdot \Phi_3(\phi_B)}{3K(k) + F(k, \phi_B)} \quad \cdots \cdots (24)$$

2. 2 区間 BC に対する変形理論

区間 BC のたわみ曲線上の任意点 (x, y) に作用する曲げモーメント M は

$$M = -P_V \cdot x + P_H \cdot y + P_1 \cdot (x - x_B) \cdot \sin \alpha_1 - P_1 \cdot (y - y_B) \cdot \cos \alpha_1$$

$$= -LP_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \xi + LP_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \eta - P_1 \cdot (x_B \cdot \sin \alpha_1 - y_B \cdot \cos \alpha_1) \quad \cdots \cdots (25)$$

両辺を ξ で微分し、たわみ関係式(1)を考慮すれば

$$d^2\theta/d\xi^2 + \lambda_2 \cdot \sin(\theta - \alpha_2) = 0 \quad \cdots \cdots (26)$$

点 C における境界条件

$$(d\theta/d\xi)|_{\theta=\theta_c} = -ML/(EI) = 0 \quad \text{より、最終的に次式が導かれる。}$$

$$d\theta/d\xi = \pm \sqrt{2\lambda_2 \{\cos(\theta - \alpha_2) - \cos(\theta_c - \alpha_2)\}} \quad \cdots \cdots (27)$$

ここで、右辺の正負符号($\pm$)は、無次元円弧長さ ξ に対し、たわみ角 θ が増加する区間で正、減少する区間で負を採用する。なお、本論文においては区間 BC に変曲点が存在しない場合のみの理論計算式を示すこととする。

微分方程式(27)の理論解析にあたり

$$q = \sqrt{\{1 - \cos(\theta_c - \alpha_2)\}}/2 \quad \cdots \cdots (28)$$

$$1 - \cos(\theta - \alpha_2) = 2q^2 \cdot \sin^2 \psi \quad \cdots \cdots (29)$$

(ただし、 $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$)

を導入すれば、はりのたわみ曲線上の任意点までの無次元円弧長さ ξ 、無次元水平距離 ξ 、無次元垂直距離 η はそれぞれ次のように求めることができる。

$$\xi = \int_{\phi_B}^{\phi} d\xi + \int_{\psi_B}^{\psi} d\xi$$

$$= 1 \pm \{F(q, \psi) - F(q, \psi_B)\} / \sqrt{\lambda_2} \quad \cdots \cdots (30)$$

$$\xi = \xi_B \pm \{2q \cdot \sin \alpha_2 \cdot (\cos \psi - \cos \psi_B) + \cos \alpha_2 \cdot \Phi_3(\psi)\} / \sqrt{\lambda_2} \quad \cdots \cdots (31)$$

$$\eta = \eta_B \pm \{-2q \cdot \cos a_2 \cdot (\cos \psi - \cos \psi_B) + \sin a_2 \cdot \Phi_3(\psi)\} / \sqrt{\lambda_2} \dots (32)$$

ここで,

$$\Phi_3(\psi) = \{F(q, \psi_B) - F(q, \psi) - 2\{E(q, \psi_B) - E(q, \psi)\}\}$$

また, 角度変数 ψ は

$$\psi = \pm \text{Arcsin} \left\{ \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta - a_2)}{1 - \cos(\theta_C - a_2)}} \right\} \dots (33)$$

$$\left[\begin{array}{ll} + : & 0 \leq \theta - a_2 \leq \pi, \quad 0 \leq \psi \leq \pi/2 \\ - : & -\pi \leq \theta - a_2 \leq 0, \quad -\pi/2 \leq \psi \leq 0 \end{array} \right]$$

ところで, はりの変形後のたわみ曲線における円弧長さ s は, はり長 $(L + l)$ に等しく, すなわち式(30)において $\psi = \psi_C$ で $\xi_C (= s_C/L) = 1 + \delta$ なる条件より, 荷重パラメータ λ_2 は

$$\lambda_2 = [\{F(q, \psi_C) - F(q, \psi_B)\} / \delta]^2 \dots (34)$$

なお, 角度変数 ψ_C (たわみ角 θ_C に対応) は, 自由端 C で $(d\theta/d\xi)|_{\theta=\theta_C} = 0$ なる条件より

$$\psi_C = \pm \pi/2 \dots (35)$$

したがって, 式(34)は

$$\lambda_2 = [\{\pm K(q) - F(q, \psi_B)\} / \delta]^2 \dots (36)$$

また, 自由端 C までの無次元水平距離 ξ は

$$\xi_C = \xi_B \pm \frac{-2q \cdot \sin a_2 \cdot \cos \psi_B + \cos a_2 \cdot \Phi_3(\psi_C)}{\pm K(q) - F(q, \psi_B)} \delta \dots (37)$$

自由端 C における無次元垂直距離 η は

$$\eta_C = \eta_B \pm \frac{2q \cdot \cos a_2 \cdot \cos \psi_B + \sin a_2 \cdot \Phi_3(\psi_C)}{\pm K(q) - F(q, \psi_B)} \delta \dots (38)$$

3. 大たわみポールモデルの数値計算例

Fig. 4 は, 各種のモーメント (β) を受けたときの, 区間 AB の無次元弦長 $\omega_B (= W_B/L = \sqrt{\xi_B^2 + \eta_B^2})$ に対する無次元荷重パラメータ λ , すなわち跳躍者がポールに負荷する二つの荷重の合力の関係を表したものである (Fig. 3 参照).

Fig. 3 Schematic configuration of pole-vaulting

Fig. 4 Variation of load parameter λ with non-dimensional chord length ω_B

点 B でのモーメントが 0 ($\beta = 0$) のとき, ポールはオイラー座屈荷重 ($\lambda_{Euler} = \pi^2 = 9.87$) で変形が始まり, ω_B が小さくなるにつれ λ は徐々に増加する。なお, いずれのモーメント ($\pm$) が存在する場合にも下に凸の変化傾向を示す。また, モーメントが負の場合には, ω_B が大きい場合もポールを変形させるためには大きな λ が必要となることが分かる。

Fig. 5 は, 各種のモーメント (β) を受けたときの, 区間 AB の無次元弦長 ω_B に対する合成荷重の角度パラメータ $\alpha' (= \alpha - \gamma)$ の関係を表したもので, α' はポールの区間 AB の弦と合成荷重 λ のなす角度 (Fig. 3 参照) である。点 B でのモーメントが 0 ($\beta = 0$) のときは $\alpha' = 0$ で, モーメントが負の場合は α' は正值をとり, ポールが変

Fig. 5 Variation of angle parameter α' with nondimensional chord length ω_b

形するに伴い漸増する。一方、モーメントが正の場合には α' は負値で、上に凸の変化傾向を示す。ところで、回転自由端としたボックス内の点 A では、ポールに対して圧縮荷重のみが作用するため、角度パラメータ α' の範囲は

$$\theta_{\text{BOX2}} - 180^\circ - \gamma \leq \alpha' \leq \theta_{\text{BOX1}} + 180^\circ - \gamma \quad \dots\dots\dots (39)$$

($\theta_{\text{BOX1}} = 11.6^\circ$, $\theta_{\text{BOX2}} = 116.6^\circ$)

に限られる。したがって、この範囲外は棒高跳びには不適切な領域であり、特に、 α' が小さな値(負)、すなわち区間 AB の変形量がきわめて小さな範囲ではポールの点 B に正のモーメントが現れるような負荷はできないと言える。

Fig. 6 は、ポールの各種変形状態を表したもので、 $\eta_b = 0$, $\delta = 0.1$ とし、区間 BC には変曲点は現れない場合を例示した。ポールの形状は $\beta > 0$ ではポール先端側に膨らんだ傾向、逆に $\beta < 0$ ではポールの区間 AB に変曲点が現れ、かつポールの支点側に膨らんだ傾向を示す。 $\beta = 0$ の場合は、図中の Case a ~ Case c の変形が現れ、点 B が変曲点となるような状態 (Case c) も存在する。Case a の状態は点 B のみへの負荷 ($\lambda_2 = 0$) の場合であり、このとき、 $\lambda_1 = \lambda$, $\alpha_1 = 0^\circ$ となり、区間 BC は変形しない。Case b, Case c はそれぞれ $\lambda_1 = 2997$, $\alpha_1 = 0^\circ$, $\lambda_2 = 2985$, $\alpha_2 = -180^\circ$ と $\lambda_1 = 1240$, $\alpha_1 = -180^\circ$, $\lambda_2 = 1252$, $\alpha_2 = 0^\circ$ の場合

Fig. 6 Some examples of pole deformation
[$\eta_b = 0$, $\delta = 0.1$]

であり、どちらも荷重パラメータ λ_1 , λ_2 が非常に大きく、棒高跳びを扱う際には不適当であると考え、ここでは主に Case a の状態について図示してある。

Fig. 7 は、 $\xi_b = 0.8$ で、各種のモーメント ($\beta =$

Fig. 7 Variation of load parameter λ_1 , λ_2 and angle parameter α_1 , θ_c with angle parameter α_2

2, -2)を受けたときの, 荷重の角度パラメータ α_2 に対する荷重パラメータ λ_1 , λ_2 および点 B の荷重角度パラメータ α_1 , 点 C のたわみ角 θ_c の関係, 言い換えれば, 区間 AB のポールをある状態に保持する場合の荷重パラメータ間の関係を表したものである. 点 B でのモーメントが $\beta = 2$ (Fig.a), $\beta = -2$ (Fig.b) のいずれの場合も, θ_c は α_2 の変化に依らずほぼ一定値を示す. すなわち, 区間 AB のポールをある状態に保とうとしたとき, 荷重パラメータの変化に関わらず区間 BC のポールもほぼ一定の変形状態に保たれることを意味する. また, α_2 が θ_c あるいは $\theta_c \pm 180^\circ$ に近づくにつれて λ_1 , λ_2 が非常に大きくなる, 下に凸の変化傾向を示す. すなわち, ポールの接線方向へは非常に大きな荷重を必要とし, 逆に垂直方向には小さな荷重で良いことが分かる.

4. 跳躍者モデル

4.1 運動方程式

跳躍者の運動軌跡を求めるため, 次の跳躍者・ポールシステムを仮定した.

- 1) 跳躍者の運動をクロスバーに垂直な平面上に限定する.
- 2) 跳躍者をポールの支点側荷重点 B に集中した質点と見なす.
- 3) ポールの質量は無視する.

点 B に質点として存在する跳躍者はポールから角度 α をなす集中荷重 $P [= \lambda \cdot (EI/L^2)]$ を受けると考えられ, 跳躍者の質量を m , 重力加速度を g , 加速度の水平方向成分を $\ddot{x}$, 垂直方向成分を $\ddot{y}$ とすれば, 運動方程式は次の形で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + P \cdot \cos \alpha &= 0 \\ m\ddot{y} + P \cdot \sin \alpha + m \cdot g &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

式(40)は跳躍者がポールを保持している状態, ポールを離して空中にいる状態 ($P_1 = P_2 = 0$) の双方で成立する. なお, 跳躍者がポールを保持している場合には, 跳躍者の軌跡と点 B の軌跡は等しく, $\ddot{x} = \ddot{x}_B$, $\ddot{y} = \ddot{y}_B$ としたときの λ , α の値を用いることができる.

4.2 跳躍者モデルの計算例

跳躍者の運動をシミュレートするに際し, ポールの曲げ剛性 EI と跳躍者質量 m の比を $\mu = EI/m$ とおき, 式(40)に 4 次の Runge Kutta 法を適用し, 時間ステップ幅 0.02 秒, 重力加速度 $g = 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}$ として計算した. なお, 初期垂直および水平速度は, ポール先端がボックスに当たる瞬間 (PP 時) の速度であり, 1991 年東京世界陸上競技の平均値を採用した.

Fig. 8 Trajectories of vaulter [$\dot{y}_{BO}=2.0$ [m/s], $\mu=21.0$, $L=4.6$, $\beta=0$]

Fig. 8 は、区間 AB のポール長を $L=4.6$ [m]、ポールの曲げ剛性 EI と跳躍者質量 m の比を $\mu=21.0$ [$\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}$]、曲げモーメントを $\beta=0$ とし、初期座標 $(x_{BO}, y_{BO})=(4.44$ [m], 1.2 [m])、初期垂直方向速度 $\dot{y}_{BO}=2.0$ [m/s] としたときの、各種の初期水平方向速度 $\dot{x}_{BO}$ に対する跳躍者の跳躍軌跡 y を示したものである。ただし、図示した実線の軌跡は跳躍者がポールを保持している場合のもので、破線は跳躍者が実線で示した軌跡上の各点でポールから離脱後に得られる跳躍高さのうち、最大の跳躍高さ H_{max} を得るときのポール離脱後の軌跡を示している。なお、跳躍高さとはクロスバーを跳躍者が飛び越すときの最大値を意味しているが、棒高跳びのルールでは、クロスバーをボックス上縁から前後に 60 [cm] 移動することが許されているため、ここでは -70 [cm] $\leq x \leq 50$ [cm] の範囲 (図中一点鎖線) で最大をとる場合を考えた。図より、初期水平方向速度 $\dot{x}_{BO}$ が -8.6 [m/s] のときに最大の跳躍高さ $H_{max}=5.16$ [m] が得られ、これよりも小さい (絶対値) 初期方向速度では跳躍者はポールに跳ね返されてしまい、逆に大きい速度では、高さが十分得られないうちにクロスバーの設置できる跳躍範囲に到達してしまう。したがって、初期水平方向速度は大きすぎても、小さすぎてもいけない適当な値が存在することが分かる。

Fig. 9 は、各種の初期垂直方向速度 $\dot{y}_{BO}$ に対する跳躍者の跳躍軌跡 y を示したもので、初期水平

Fig. 9 Trajectories of vaulter [$\dot{x}_{BO}=-8.6$ [m/s], $\mu=21.0$, $L=4.6$, $\beta=0$]

Fig. 10 Trajectories of vaulter [$\dot{x}_{BO}=-8.6$ [m/s], $\dot{y}_{BO}=2.0$ [m/s], $L=4.6$, $\beta=0$]

方向速度 $\dot{x}_{BO}=-8.6$ [m/s] とし、その他の条件は Fig. 8 と同様である。図より $\dot{y}_{BO}=2.0$ [m/s] のときに、最大跳躍高さ $H_{max}=5.16$ [m] を得ることができ、これより小さい値ではポールに跳ね返されてしまい、図中の 2.2~5.6 [m/s] の速度では高さが十分得られないうちにバーの跳躍範囲に到達してしまうことが分かる。なお、 $\dot{y}_{BO}=5.6$ [m/s] を越える大きな垂直方向速度でジャンプした場合は、より大きな跳躍高さが得られるが、この範囲は一般の跳躍者の出しうる能力を越えているのではないかと考えられる。

Fig. 10 は、種々のポールの曲げ剛性と跳躍者質量の比 $\mu (=EI/m)$ に対する跳躍者の跳躍軌跡 y を示したもので、初期水平方向速度 $\dot{x}_{BO}=-8.6$ [m/s] とし、その他の条件は Fig. 8 と同様であ

Fig. 11 Variation of maximum vaulting height H_{max} with length L [$\dot{x}_{B0} = -8.6$ [m/s], $\dot{y}_{B0} = 2.0$ [m/s], $\beta = 0$]

る。この場合も $\mu = 21.0$ [N・m²/kg] のときに最大跳躍高さ $H_{max} = 5.16$ [m] が得られることが分かる。

Fig.11は、最大跳躍高さ H_{max} とポール長 L との関係を各種のポールの曲げ剛性と跳躍者質量の比 μ に対して示したもので、初期水平方向速度 $\dot{x}_{B0} = -8.6$ [m/s]、初期垂直方向速度 $\dot{y}_{B0} = 2.0$ [m/s] とし、初期位置は $y_{B0} = 1.2$ [m] でポールが真直な状態とした。図中一点鎖線で示した水平線は、PP時の運動エネルギー（水平および垂直方向）がすべて位置エネルギーに変換された場合の理論跳躍高さ $H_{th8.6} = 5.17$ [m] を示している。ポール① ($L = 4.6$, $\mu = 21.0$) の場合に最大跳躍高さ $H_{max} = 5.16$ [m] が得られる。また、 $\mu = 21.0$ のときは、 $L = 4.6$ [m] 以下のポールでも $H_{th8.6}$ とほぼ同じ跳躍高さが得られ、 $L = 4.6$ [m] を越えるポールでは跳躍高さが急激に減少している。また、21.0よりも大きいあるいは小さい μ の場合では $L = 4.6$ [m] 付近では十分な跳躍高さが得られないことが分かる。ところで、 $L = 3.0$ [m] 付近ではいかなる μ に対しても $H_{th8.6}$ に近い跳躍高さが原理的には得られるようであり、すなわち「抜き」の高さ（グリップ高以上に重心が上昇した距離）にはポー

Fig. 12 Variation of maximum vaulting height H_{max} with length L [$\dot{x}_{B0} = -9.1$ [m/s], $\dot{y}_{B0} = 2.0$ [m/s], $\beta = 0$]

ルの剛性が関係している⁷⁾だけでなく曲げ剛性と跳躍者質量の比 μ およびポール長（グリップ高） L に大きく関係していることが示唆される。これに対して Fig.12は、初期水平方向速度 $\dot{x}_{B0} = -9.1$ [m/s] としたときの、最大跳躍高さ H_{max} とポール長 L との関係を各種のポールの曲げ剛性と跳躍者質量の比 μ に対して示したもので、その他の条件は Fig.11と同様である。Fig.11に比べ初期水平方向速度が -0.5 [m/s] 増すだけで初期水平方向速度 $\dot{x}_{B0} = -8.6$ [m/s] に対し最大跳躍高さが得られたポール① ($L = 4.6$, $\mu = 21.0$) では、もはや十分な跳躍高さが得られないことが分かる。したがって、ポール長が $L = 4.6$ [m] のままであれば曲げ剛性のより大きい $\mu = 24.0$ のポール②を使うことによって、理論跳躍高さ $H_{th9.1} = 5.62$ [m] ($> H_{th8.6}$) に近い跳躍高さ $H_{max} = 5.60$ [m] を獲得できる。さらに、この剛性 ($\mu = 24.0$) の場合は $L = 5.2$ [m] 以下では $H_{th9.1}$ に近い跳躍高さが得られることが分かる。なお、同じポール剛性で、長さを長くした、例えばポール③ ($L = 4.9$, $\mu = 24.0$) の場合も $H_{th9.1}$ と同程度の跳躍高さが得られる。

Fig.13は、PP時から最高跳躍高さまでの総時間 t_0 とポールをリリースするまでの時間 t_r をポー

Fig. 13 Variation of vaulting time with length L [$\dot{y}_{Bo}=2.0$ [m/s], $\beta=0$]

ル長 L に対して示したものである。ポール① ($L=4.6$, $\mu=21.0$) で、初期水平方向速度 $\dot{x}_{Bo}=-8.6$ [m/s] とした跳躍では $t_r=1.92$ [s]、これに対しポール② ($L=4.6$, $\mu=24.0$) で、初期水平方向速度 $\dot{x}_{Bo}=-9.1$ [m/s] とした跳躍では $t_r=1.52$ [s] を要している。すなわち、初期水平方向速度（絶対値）が増したとき、ポール長を変えずにポールの曲げ剛性を大きくすることだけで跳躍高さを増加させようとするとき、ポールリリースまでの時間 t_r が短くなることを示している。このことは、より短時間にリリースまでの動作を完了しなければいけないことになり、跳躍テクニックの大幅な改良が必要となることが予想される。したがって、リリースまでの時間を同じようにするためには、ポール長を大きくしたポール③ ($L=4.9$, $\mu=24.0$) を使用すれば良いことが分かる。

Fig. 14は、跳躍者の最大合成加速度 $a_{max}(=\text{Max}(\sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2}))$ をポール長 L に対して示したもので、ポール長が増すと減少し、一方、初期水平方向速度 $\dot{x}_{Bo}$ が大きく、ポールの曲げ剛性と跳躍者質量の比 μ も大きい方が大となる傾向になることが分かる。この最大加速度はPP時の直後に現れるもので、ポールをボックスに突いたときの衝撃に大に関連すると考えられるため、この数値はできるだけ小さい方が良く、す

Fig. 14 Variation of maximum acceleration with length L [$\dot{y}_{Bo}=2.0$ [m/s], $\beta=0$]

なわち、この例で言うときポール②よりポール③の方が衝撃が小さくなることを示している。

5. む す び

本論文では、棒高跳びポールを二つの集中荷重のみが負荷された大たわみはりとしてモデル化し、ポールに作用する荷重とポール変形の関係を非線形解析するとともに、跳躍者の運動について簡単なモデルを構築し、跳躍高さに及ぼすポール性能（長さ、剛性）、跳躍者能力（走力等）などの影響について動力的な解析を行った。

以上の解析の結果、次の諸点が明らかとなった。

- (1) 支点（点 A）から支点に近い荷重点（点 B）までの変形は、二つの集中荷重の合力とモーメントが同時に作用したとして扱うことができる。
- (2) 支点（点 A）から支点側の荷重点（点 B）までのポールを変形させるための合力は、同じ変形量に対しては、モーメントが小さい（負も含めて）方が大きい。すなわち、ポールに変曲点が現れるような負のモーメントをかけた場合の方がポールから大きな反力を得ることができる（Fig. 4 参照）。
- (3) ポールを変形させる力はモーメントが零の時を除いて、正負いかなるモーメントが

作用したとしても, 変形量に対して下に凸の変化傾向を示す (Fig. 4 参照).

- (4) 二つの荷重(P_1, P_2)は, その荷重方向が荷重点でのボールの接線方向に近くなるにつれて大きくなる. 逆に, 垂直方向の場合は小さくなる (Fig. 7 参照).
- (5) 荷重点間に変曲点が生じない場合でも, 支点側の荷重点でのモーメントが零の場合, 荷重点間に3つの変形状態がある (Fig. 6 参照).
- (6) ある特定のボールを用いた場合, 跳躍高さを獲得するための跳躍者の走力等には, 適当な値が存在する. したがって, その値は大きければ良いというものではない (Fig. 8 参照).
- (7) 跳躍者の体重, 走力等が決まっていれば, そのときに最大の跳躍高さを得ることのできる適当なボール剛性が存在する (Fig. 9, 10, 11, 12 参照).
- (8) 走力が向上した場合は, より剛性の大きい長いボールを使うことによってリリース時間および最大加速度をほぼ一定に保つこ

とができる (Fig. 13, 14 参照).

本研究の一部は文部省科学研究費・基盤研究(C) (課題番号09680133) の援助を得たことを付記する.

参 考 文 献

- 1) C.J.Dillman, *J. Biomechanics*, 1(1968), 175-183.
- 2) M. Buczek, Cz. II. Wlasnosci mechaniczen tyczki.Raort MINS/PNT/8/77, Warszawa, sierpien (1977).
- 3) J. Morawski, *Wychowanie Fizyczne I Sport*, 22(1978), 43-61.
- 4) M.Hubbard, *Trans. ASME, J. Applied Mechanics*, 47(1980), 200-202.
- 5) G.M.Griner, *J. Applied Mechanics*, 51(1984), 409-414.
- 6) 大槻敦巳, 大島成通, スポーツ工学シンポジウム, 97-10-2(1997), 156-161.
- 7) 淵本・ほか3名, 「動きとスポーツの科学」, (1992), 276-281.