繰り返し静水圧加圧におけるセラミックス成形体内の 均質化過程に関する多重球殻モデルによる弾性解析

Elastic Analysis on Homogenization Process in Ceramic Powder Compact during Repeated Cold Isostatic Pressing by Multiple Shell Model

安田 公一^{a*}, 田中 諭^b, 内藤 牧男^c

Kouichi Yasuda, Satoshi Tanaka, Makio Naito

Received 2 September 2013; Accepted 2 December 2013

A multiple shell model was proposed to explain homogenization process in ceramic powder compact during repeated isostatic pressing. The multiple shell model was composed of n -concentric thin shells and each shell had its own relative density and Young's modulus. When a cold isostatic pressure was applied to the model from the outside, simultaneous equations for pressures in the shells were obtained so as to match the displacement between adjacent shells. The stress distribution in the model was obtained by solving these equations, and then the relative density and Young's modulus of each shell was updated to correspond its own stress distribution. By repeating this calculation, the change in the relative density was obtained under repeated isostatic pressing. The calculation showed that repeated isostatic pressing was effective to homogenization of ceramic powder compact, compared with applying high isostatic pressure once.

Keywords: Cold isostatic pressing, Elastic analysis, Homogenization, Multiple shell, Number of cycles

1. 緒 言

成形体の均質性が、焼結後のセラミックス製品の強度信頼性に大きく影響することが知られている^{1~4)}。汎用品では、金型を使った1軸加圧のみで成形するが、信頼性が要求される高性能品では、1軸金型成形に加えて冷間静水圧成形(CIP)も用いられている。

しかし、CIP成形においても、成形体内部と表面とで均質性に違いがあるとの報告^{5~7)}もあり、より均質な成形体の作製技術が求められている。

1987年に松尾らは、サイクリックCIP成形法を提案した⁸⁾。この方法は一定の静水圧(バイアス圧力 P_0)に周期的に変動する静水圧を重ね合わせるというものであり、静水圧成形に振動成形の長所を取り入れたものである。サイクリックCIP法では、CIP加圧の繰り返し数を増加させると、成形体自体の相対密度や、この成形体から作製した焼結体の強度信頼性が増加することが報告されている^{9~12)}。

そこで、著者の一人は、単分散の球状シリカ粒子からなる顆粒を用いて15 MPaの1軸金型成形で予備成形体を作製したのち、それを最高圧力100 MPa、バイアス圧力0 MPa、周波数1 HzでサイクリックCIP成形を行い、繰り返し数に伴うCIP成形体内部の局所相対密度の変化を検討した¹³⁾。その結果、CIP加圧の繰り返し数が10回までで、成形体内の相対密度分布が均質化し、その後、繰り返し数が増加するにつれて、

a 東京工業大学 材料工学専攻
(〒152-8552 東京都目黒区大岡山2-12-1-S7-14)
Department of Metallurgy and Ceramics Science, Tokyo
Institute of Technology
(2-12-1-D7-14 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552,
Japan)

b 長岡技術科学大学 化学・材料系
(〒940-2188 新潟県長岡市上富岡1603-1)
Materials Science and Technology, Nagaoka University of
Technology
(1603-1 Kamitomioka, Nagaoka, Niigata 940-2188, Japan)

c 大阪大学 接合科学研究所
(〒567-0047 大阪府茨木市美穂ヶ丘11-1)
Joining and Welding Research Institute, Osaka University
(11-1 Mihogaoka, Ibaraki, Osaka 567-0047, Japan)

* 責任著者連絡先 kyasuda@ceram.titech.ac.jp

均質性を保ちながら相対密度が全体的に増加していくことを明らかにした。また、通常の CIP 法で最高圧力を 500 MPa にしたものでは、成形体内の相対密度は高いものの、粗密が残っていることもわかった。さらに、多重球殻モデルの基本的な考えを提案して、この現象の解釈を試みている¹³⁾。

このような成形体の均質化過程については、近年、個別要素法などの数値シミュレーション^{14~17)} が大きな発展をみせて、粒子個々の運動や複雑形状の成形体内の充填構造を予測できるようになってきている。しかしながら、本研究では、サイクリック CIP 成形体中の応力分布や均質化に関する一般的な特徴を見極めるためには、連続体力学に基づく解析的手法も簡便で有効であろうと考えた。

そこで、本論文では、先の論文¹³⁾ で提案した多重球殻モデルでの解析方法を具体的に示すと共に、サイクリック CIP 成形体内の相対密度分布と繰り返し数の関係について詳細に議論し、繰り返し静水圧加圧による成形体内の均質化について検討することを目的とした。

2. 理論解析

2.1 多重球殻モデル

ここでは、Fig. 1 に示すように、 n 個の同心多重球殻から構成されるモデルを考える。球殻 i ($i=1, n$) は、それぞれ固有の相対密度 d_i を持ち、それに応じてヤング率 E_i 、ポアソン比 ν_i を有する。CIP 成形の最中には、この多重球殻の外部から CIP 圧 P_i が半径方向の応力として作用し、その結果、各層のヤング率とポアソン比に応じて、半径方向に応力分布が生じる。例えば、Fig. 2 (a) に示した球殻 i には、外側

Fig. 1 Multiple shell model

Fig. 2 Shell i and Shell $i+1$

から応力 P_i が、内側から応力 P_{i-1} が作用し、Fig. 2 (b) に示した一つ外側の球殻 $i+1$ には、外側から応力 P_{i+1} が、内側から応力 P_i が作用することになる。任意の球殻 i の応力を外側からかかる半径方向応力 P_i で代表させると、この P_i ($i=1, n$) がこの CIP 成形体（多重球殻）内の応力分布を表す。なお、一番内側の球殻 1 の内側から作用する応力 P_0 は題意より 0 となる。また、実際には、周方向応力も作用しているが、ここでは、半径方向の応力のみを考えることにする。その理由は、このモデルに実際のデータを当てはめて考えるときに、多軸応力下での圧密データを取得することが複雑になりすぎると考えられるからである。

このような CIP 加圧の 1 過程の間に、成形体内の応力分布に応じて、各球殻の相対密度 d_i がそれぞれ変化するものとする。そして、再度、CIP 加圧が繰り返された場合には、変化した新たな相対密度に応じてヤング率とポアソン比もそれぞれ変化して、応力分布が再計算されるという手順を取る。

なお、CIP 圧力が 0 から最大値（本研究では 100 MPa）まで増加するにつれて、当初の密度分布に応じ

た圧力も増加し、その結果、この加圧の過程で成形体内の密度分布やヤング率の分布も同時に変化していくものと実際には考えられる。また、最大値に達してから、除荷の過程で、弾性回復する現象も原理的には想定される。しかし、負荷除荷の過程において成形体内で起こるこれらの変化を直接測定することは難しい。そこで、本研究では、当初の密度分布が1回の負荷除荷の過程を経て、結果的に与えられる密度分布の変化に着目することにした。これは、1軸金型成形での粉体の圧密過程の研究と同様の考え方である。ただし、本研究の解析方法を、負荷過程に限って、非常に細かい圧力増分で計算を繰り返すと、CIP圧力が0から最大値に至るまでの密度分布やヤング率の分布の変化を議論することはできるものと考えられる。

また、実際には、予備成形体の密度分布が求まないと、先に述べた計算は行えないが、それについては、第3章で検討することとし、ここでは、密度分布に応じた各球殻のヤング率、ポアソン比が既知であるとして、外部からCIP圧力 P_n が作用したときの各球殻の半径方向の応力 P_i を求める具体的な方法を示す。

2.2 多重球殻の応力分布

Fig. 2 (a) に示した球殻 i については、外側から半径方向の応力 P_i が、内側から半径方向の応力 P_{i-1} が負荷された薄肉球殻と見なすことができる。球殻 i の内半径を r_{i-1} 、外半径を r_i とし、この薄肉球殻内の任意の位置を半径 r で表すと、この位置 r （ただし、 $r_{i-1} \leq r \leq r_i$ ）での半径方向の変位 $u_i(r)$ は、次式で表される¹⁸⁾。

$$u_i(r) = \frac{P_{i-1}\{2(1-2\nu_i)r_{i-1}^3r^3 + (1+\nu_i)r_i^3r_{i-1}^3\}}{2E_i r^2(r_i^3 - r_{i-1}^3)} - \frac{P_i\{2(1-2\nu_i)r_i^3r^3 + (1+\nu_i)r_i^3r_{i-1}^3\}}{2E_i r^2(r_i^3 - r_{i-1}^3)} \quad (1)$$

ここで、 E_i と ν_i は球殻 i のヤング率とポアソン比である。右辺の第1項は内側からの応力 P_{i-1} の寄与を、第2項は外側からの応力 P_i の寄与を表している。

球殻 i と同様に、Fig. 2 (b) に示した1つ外側の球殻 $i+1$ でも半径が r （ただし、 $r_i \leq r \leq r_{i+1}$ ）の位置における半径方向の変位 $u_{i+1}(r)$ は次式で表される。

$$u_{i+1}(r) = \frac{P_i\{2(1-2\nu_{i+1})r_i^3r^3 + (1+\nu_{i+1})r_{i+1}^3r_i^3\}}{2E_{i+1}r^2(r_{i+1}^3 - r_i^3)} - \frac{P_{i+1}\{2(1-2\nu_{i+1})r_{i+1}^3r^3 + (1+\nu_{i+1})r_{i+1}^3r_i^3\}}{2E_{i+1}r^2(r_{i+1}^3 - r_i^3)} \quad (2)$$

ここで、球殻 i の外側の変位 $u_i(r_i)$ と球殻 $i+1$ の内側の変位 $u_{i+1}(r_i)$ は同じ位置 r_i での変位を表しているため、両者は等しくならなければならない。そこで、Eq. (1)とEq. (2)を等値して整理すると、 P_{i-1} 、 P_i 、 P_{i+1} の3変数に関する1次方程式が得られる。

$$A_i P_{i-1} + B_i P_i + C_i P_{i+1} = 0 \quad (3)$$

ここで、 A_i 、 B_i 、 C_i は各球殻の内外半径、ヤング率、ポアソン比で決まる定数であり、次式でそれぞれ表される。

$$A_i = \frac{3r_{i-1}^3 r_i (1 - \nu_i)}{E_i (r_i^3 - r_{i-1}^3)} \quad (4)$$

$$B_i = - \left[\frac{r_i \{2(1-2\nu_{i+1})r_i^3 + (1+\nu_{i+1})r_{i+1}^3\}}{E_{i+1}(r_{i+1}^3 - r_i^3)} + \frac{r_i \{2(1-2\nu_i)r_i^3 + (1+\nu_i)r_{i-1}^3\}}{E_i(r_i^3 - r_{i-1}^3)} \right] \quad (5)$$

$$C_i = \frac{3r_{i+1}^3 r_i (1 - \nu_{i+1})}{E_{i+1}(r_{i+1}^3 - r_i^3)} \quad (6)$$

同様に、 P_1 から P_{n-1} までの $(n-1)$ 個の変数に関する $(n-1)$ 個の1次方程式が得られる。なお、境界条件より、 P_0 は0、 P_n は外部から負荷されるCIP圧力で与えられる。この連立方程式を解くことによって、成形体内の応力分布を推定することができる。具体的な解法の一例をAPENDIXに記載したので、参照されたい。

なお、 n 層からなる多重球殻という離散的なモデルではあるが、この系を表す連立1次方程式が作る係数行列が特殊な構造（対角成分に沿って、1つずつずれて行く構造）になっており、簡単なアルゴリズムで解を求めることができるようになっている。したがって、 n を十分大きくすることによって、他の数値シミュレーションとも同等の応力分布を予測できるものと思われる。次章では、この多重球殻モデルをサイクリックCIP成形に適用して、CIP成形体内部の応力分布と均質化について議論する。

3. サイクリックCIP成形中の成形体内の応力分布と均質化

3.1 予備成形体（1軸金型成形体）のパラメータの決定

本節では、まず、多重球殻モデルに代入するパラメータのうち、1軸金型成形で作製した予備成形体中の応力分布と、その結果として得られる相対密度分布について述べることにする。

まず、前報¹³⁾の実験結果と対応するように、圧力 15 MPa の金型成形により作製した円柱状予備成形体内での軸方向深さの応力分布が必要となる。ここで、前述の多重球殻モデルで計算してということも考えられるが、実際にそうしようとすると循環論法に陥ってしまうので、何らかの方法で別途決めざるを得ない。そこで、次式で表される Janssen¹⁹⁾ の式を用いることにした。

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{4\mu K}{D}h\right) \quad (7)$$

ここで、 P_0 は外部から負荷する 1 軸応力、 D は粉体層の直径、 h は深さ、 μ は壁摩擦係数、 K は Rankine 係数、 P は深さ h における応力を表している。なお、前報¹³⁾ の実験では、圧力 15 MPa の 1 軸金型成形により直径 20 mm、高さ 8.5 mm の円柱状予備成形体を作製したが、ここでは、この予備成形体内の円柱軸方向の圧力分布を、多重球殻モデルの半径方向の応力分布として与えることにより、多重球殻モデルの予備成形体（1 軸金型成形体）の半径方向の相対密度分布を求めるという考え方をとることにした。

パラメーター μ と K については、次のようにして決定した。まず、予備成形体に対応するように、直径 20 mm、厚さ 8 mm の円盤状成形体に Janssen の式を適用し、 P_0 を 15 MPa として、 h を 0 mm から 4 mm まで変化させた時の予備成形体内の圧力分布 P を求めた。この時、積 μK の値を変化させて計算し、その圧力分布に応じて予備成形体の相対密度の分布を、この後に述べる川北の式²⁰⁾で推定した。この相対密度分布から多重球殻構造を持つ予備成形体（ここでは、厚さ 0.5 mm の球殻 8 層からなる半径 40 mm の球状予備成形体を仮定）全体の相対密度を計算し、前報¹³⁾ の実験で作製した円柱状予備成形体密度 0.508 に一番近い値が計算上得られるような積 μK の値を用いることにした。この検討の結果、 μK が 0.28 の時に、多重球殻構造の予備成形体の相対密度 0.507 となり、実験の結果と最も近い値となった。

次に、この応力分布に応じて予備成形体内の相対密度分布を割り当てるのであるが、それには、次式で示す川北²⁰⁾ の式を用いた。

$$\frac{V_0 - V}{V_0} = \frac{\alpha\beta P}{1 + \beta P} \quad (8)$$

ここで、 V_0 はタッピング時の粉体層の体積、 V は圧力 P での体積、 α と β は実験的に決めるパラメーター

である。この式をそれぞれ V_0 と V に対応する相対密度 d_0 と d で書き換えると、

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d}}{\frac{1}{d_0}} &= \frac{\alpha\beta P}{1 + \beta P} \\ \therefore 1 - \frac{d_0}{d} &= \frac{\alpha\beta P}{1 - \beta P} \end{aligned} \quad (9)$$

この式を変形して、圧力 P での相対密度 d とタッピング相対密度 d_0 との関係が次式のように得られる。

$$d = \frac{1 + \beta P}{1 + (1 - \alpha)\beta P} d_0 \quad (10)$$

この式中の α と β を求めるには、Eq. (9) を次のように変形して、

$$\frac{d - d_0}{d} = \frac{\alpha\beta P}{1 + \beta P} \quad (11)$$

両辺の逆数をとって

$$\begin{aligned} \frac{d}{d - d_0} &= \frac{1 + \beta P}{\alpha\beta P} \\ &= \frac{1}{\alpha\beta P} + \frac{1}{\alpha} \end{aligned} \quad (12)$$

再度、両辺に圧力 P をかけて

$$\frac{Pd}{d - d_0} = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} P \quad (13)$$

を得る。そこで、前報¹³⁾で示したように、1 軸金型成形の圧力 P を 4 MPa から 15 MPa の範囲で 4 条件変化させて薄い円盤状予備成形体（直径 20 mm、厚さ 2 mm）を作り、その成形体の相対密度 d を質量と寸法から求め、 P に対して $Pd/(d - d_0)$ をプロットすることにより、 α が 0.259、 β が 0.535 という値が得られている¹³⁾。また、このときのタップ相対密度 d_0 は、直径 20 mm の円柱状容器に所定量の顆粒を投入し、数十回タッピングして、粉体層の高さが一定値となった時の粉体層の体積と質量から求め、40.2% という値が得られている。

最後に、この予備成形体を表す多重球殻の各層にヤング率とポアソン比を割り当てていくことになるが、予備成形圧力が 15 MPa と低く、この条件で作った曲げ試験片を用いて、ヤング率、ポアソン比の測定をするが難しく、実際には、次節で述べる CIP 成形体の

曲げ試験を行って、相対密度とヤング率の関係を実験的に求め、その線形回帰式を予備成形体の範囲に外捜して、予備成形体内部のヤング率の分布を推定することにした。なお、ポアソン比については、精度のよい測定がさらに難しいと考えられたので、実験値を求めることはせず、石英ガラスのポアソン比0.16²¹⁾という値を用いることにした。

以上、述べたように、Janssen の式で予備成形体内の圧力分布を与え、川北の式で圧力分布から相対密度分布を推定し、次節で述べる CIP 成形体の曲げ試験結果からの外捜により予備成形体内のヤング率の分布を求めることにより、多重球殻モデルに代入する予備成形体のパラメーターを決定した。次節では、CIP 成形体のパラメーターの決定の仕方を示す。

3. 2 CIP 成形体のパラメーターの決定

既に、予備成形体内のヤング率の分布とポアソン比が与えられているので、多重球殻モデルの解析式にこれらの値を代入し、外部からの CIP 圧力を前報¹³⁾の実験に合わせて 100 MPa として計算すると、CIP 中（正確には、CIP の最大圧力時）の成形体内の応力分布を推定することができる。この応力分布に応じて、CIP 後の成形体内の相対密度分布が変化するので、その推定には、予備成形体と同様に Eq. (10) と類似の式を用いることにした。

$$d = \frac{1 + \xi P}{1 + (1 - \eta) \xi P} d_0 \quad (14)$$

ただし、パラメーター ξ 、 η は、CIP 成形体に合わせて次のようにして実験的に求めた。すなわち、直径 20 mm、厚さ 2 mm の円盤状の CIP 成形体を CIP 圧力を 30 MPa から 450 MPa の範囲で 7 水準変化させて作製し、得られた CIP 成形体の密度と圧力の関係を Eq. (13) を用いてプロットすることにより、パラメーター ξ が 0.389、 η が 0.0418 という値が得られている¹³⁾。

次に、CIP 成形体内の相対密度分布からヤング率の分布を推定するには、種々の条件で CIP 成形した直方体状成形体（幅 4 mm × 厚さ 5.5 mm × 長さ 48 mm）の 3 点曲げ試験（スパン 30 mm、クロスヘッド速度 0.2 mm/min）を行い、その荷重/荷重点変位曲線から、各成形体のヤング率 E を次式により求めた。

$$E = \frac{l^3 (W_2 - W_1)}{4wt^3 (s_2 - s_1)} \quad (15)$$

ここで、 l はスパン、 w は試験片幅、 t は試験片厚さ、 s_1 と s_2 は荷重がそれぞれ W_1 と W_2 の時の荷重点変位

である。このようにして求めた CIP 成形体のヤング率 E [GPa] と相対密度 d [%] の関係を最小自乗法で線形回帰して、次式で近似した。

$$E = md + E_0 \quad (16)$$

その結果、 m は 7.0×10^{-2} 、 E_0 は -2.6 となった。この近似式は、CIP 成形体だけでなく、外挿することにより、予備成形体のヤング率の分布についても適用した。

このようにして、CIP 成形体の応力分布を多重球殻モデルで計算し、その結果から川北の式で相対密度分布を得て、最後に、ヤング率の分布を推定することができる。そして、再度、同じ計算を繰り返すと、繰り返し数にともなって、CIP 成形体内の相対密度分布の変化を理論的に予測できることになる。

3. 3 サイクリック CIP 成形中の成形体内の応力分布と均質化

ここでは、サイクリック CIP 成形体内の密度分布の変化について検討することにする。

Fig. 3 (a) には、予備成形における球状成形体の応力分布を Janssen の式で推定した結果を示す。この加圧の結果、予備成形体の相対密度分布は、Fig. 4 (a) のようになることが川北の式で推測される。表面では 52% の相対密度であるが、中心に近づくにつれて約 44% まで減少することがわかる。この相対密度に対応したヤング率の分布を Fig. 5 (a) に示す。表面で約 1 GPa であるが、内部では 0.6 GPa まで減少している。

このような予備成形体に 100 MPa の CIP 加圧をした場合の成形体内部の応力分布を Fig. 3 (b) に示す。表面では CIP 圧力の 100 MPa となっているが、内部に入るにしたがって、半径方向応力は減少し、中心部では約 80 MPa となっている。その結果、繰り返し数 1 回の CIP 成形体（通常の CIP 成形体と同等）の相対密度の分布は、Fig. 4 (b) のようになり、表面では約 54% となるが、中心に行くにつれてわずかに減少し、不均一な部分が残っていることが予測される。ただし、予備成形体の相対密度分布と比較すると、全体的に相対密度の値が増加し、また、分布の範囲も縮小していることがわかる。また、この相対密度の増加に伴って、繰り返し数 1 回の CIP 成形体のヤング率の分布は、Fig. 5 (b) のようになる。

このようなヤング率の分布を持つ繰り返し数 1 回の CIP 成形体に最高圧力 100 MPa の CIP 加圧を再度行って、繰り返し数を 2 回とすると、Fig. 3 (c) のような

Fig. 3 Radial stress distribution of the powder compact

応力分布となり、ほぼ、100 MPa で一定となり、成形体内に均一な応力がかかっていることがわかる。そして、その結果、繰り返し数2回のCIP成形体の相対密度分布は、Fig. 4 (c) のように、ほぼ一定となり、CIP加圧を繰り返すことにより、相対密度が全体として増加するとともに、表面と内部との差も少なくなり、均質化していることが多重球殻モデルで再現することができた。

さらに、繰り返し数3回のCIP成形体の場合を計算してみると、Fig. 3 (d)、Fig. 4 (d)、Fig. 5 (d) のようになり、繰り返し数2回のCIP成形体とほぼ同じ結果となり、これは、CIP圧力100 MPaで決まる相対密度の値に収束したことを意味している。

なお、予備成形体に500 MPaのCIP加圧を1回行っ

た場合（通常のCIP成形と同様）についても計算してみると、Fig. 3 (e)、Fig. 4 (e)、Fig. 5 (e) のようになった。これより、通常のCIP成形で圧力を500 MPaまであげた場合、CIP成形体内の応力分布は、400 MPaから500 MPaまで分布し、その結果、相対密度も表面から内部に掛けて、若干、減少していた。相対密度の絶対値としては、CIP圧力100 MPaで繰り返し数3回のものよりも増加しているが、内部の相対密度は、均質性の観点では、繰り返し数3回のCIP成形体の方が向上していることがわかった。これは、前報¹³⁾の実験で、500 MPaのCIP圧力による通常のCIP成形では、内部に、一部、顆粒が残存していることにも対応している。

今回の解析では、弾性体を仮定した解析であった。

Fig. 4 Relative density of the powder compact

実際には、顆粒の圧密過程では弾塑性挙動となっているので、弾性体から弾塑性体へ修正した解析も必要となるかもしれない。弾塑性体での解析とした場合、ひずみの増分に対して、応力の増加が降伏応力で頭打ちになることを考えると、今回の弾性解析は、応力の見積もりとしては過大評価側の解析となっていることが考えられる。したがって、実際には、成形体内の応力分布範囲がより大きくなる方向に修正されるものと考えられ、それは、実験結果に合致する方向になると予測される。ただし、顆粒の圧密を考えると、塑性歪みにも限界があるので、塑性ひずみは弾性ひずみと同程度か、あるいは、それよりも小さいと考えれば、弾性体での解析でも、CIP 圧力の繰り返しの効果の本質

的な部分は、おおよそ再現できたのではないかと考えることもできる。

4. 結 論

本論文では、多重球殻モデルの弾性解析を行い、サイクリック CIP 成形時の応力分布の変化と均質化について検討した。CIP 加圧を繰り返すことにより、CIP 成形体内の応力分布が外部から負荷される CIP 圧力と同じ値となり、相対密度も均一化することを示すことができた。一方、通常の CIP で最高圧力をかなり増加させても、繰り返し数 1 回では、CIP 成形体内の相対密度の不均一性が残ることもわかった。

Fig. 5 Young's modulus of the powder compact

〔謝辞〕 本研究の一部は、科学研究補助金（基盤研究（C）No. 25420706，日本学術振興会），大阪大学接合技術研究所共同研究プロジェクトの支援を受けて行ったものである。記して感謝の意を表す。

Appendix

Eq. (3) の連立方程式は、次のようにすると機械的に解くことができる。まず、各 i に対して、 A_i 、 B_i 、 C_i を予め計算して求めておく。次に、 $i=1$ の場合について、1 次方程式を書くと、

$$A_1 P_0 + B_1 P_1 + C_1 P_2 = 0 \quad (\text{A-1})$$

となるが、ここで、 P_0 と P_1 を次のように表してみる。

$$P_0 = k_0 P_1 \quad (\text{A-2})$$

$$P_1 = k_1 P_1 \quad (\text{A-3})$$

これらを Eq. (A-1) に代入すると、 P_2 は、次式となる。

$$P_2 = -\frac{1}{C_1} (A_1 k_0 + B_1 k_1) P_1 \quad (\text{A-4})$$

そこで、この式の右辺を改めて $k_2 P_1$ とおけば、

$$P_2 = k_2 P_1 \quad (\text{A-5})$$

となり、この時の k_2 は、

$$k_2 = -\frac{1}{C_1}(A_1 k_0 + B_1 k_1) \quad (\text{A-6})$$

と表されて、 A_1 , B_1 , C_1 と k_0 , k_1 で決まる定数となる。同様にこの操作を繰り返すと、最後に、 $i=n-1$ の時には、

$$A_{n-1}P_{n-2} + B_{n-1}P_{n-1} + C_{n-1}P_n = 0 \quad (\text{A-7})$$

となり、

$$P_{n-2} = k_{n-2}P_1 \quad (\text{A-8})$$

$$P_{n-1} = k_{n-1}P_1 \quad (\text{A-9})$$

とおけるので、

$$P_n = -\frac{1}{C_{n-1}}(A_{n-1}k_{n-2} + B_{n-1}k_{n-1})P_1 \quad (\text{A-10})$$

となるが、この P_n は外部から負荷する CIP 圧力なので、この式より、簡単に P_1 が求められ、さらに、 P_1 がわかると、

$$P_i = k_i P_1 \quad (\text{A-11})$$

より、すべての P_i が求められることになる。

Nomenclature

A : constant coefficient	[m/Pa]	s : displacement at loading point	[m]
B : constant coefficient	[m/Pa]	t : thickness of specimen	[m]
C : constant coefficient	[m/Pa]	u : displacement in radius direction	[m]
d : relative density	[kg/m ³]	V : volume	[m ³]
D : diameter	[m]	W : load	[N]
E : Young's modulus	[Pa]	w : breadth of specimen	[m]
h : depth	[m]	α : experimental parameter	[—]
k : constant coefficient	[—]	β : experimental parameter	[1/Pa]
K : Rankine coefficient	[—]	μ : friction coefficient of wall	[—]
l : span	[m]	ν : Poisson's ratio	[—]
m : experimental parameter	[Pa]	ξ : experimental parameter	[1/Pa]
n : total number of shells	[—]	η : experimental parameter	[—]
P : Pressure	[Pa]		

References

- 1) Okumiya, M., H. Abe and M. Naito : "Role of Pore Defect and its Control in Sintered Ceramics", *J. Soc. Powder Technol., Japan*, **46**, 532-540 (2009)
- 2) Okumiya, M., H. Abe and M. Naito : "Control of Non-uniform Structure of Sintered Ceramics for its Reliability Improvements", *J. Soc. Powder Technol., Japan*, **47**, 26-34 (2010)
- 3) Nakamura, S., S. Tanaka, Z. Kato and K. Uematsu : "Strength-processing defects relationship based on micrographic analysis and fracture mechanics in alumina ceramics", *J. Am. Ceram. Soc.*, **92**, 688-693 (2009)
- 4) Nakamura, S., S. Tanaka, R. Furushima, K. Sato and K. Uematsu : "Estimation of Weibull modulus from coarser defect distribution in dry-pressed alumina ceramics", *J. Ceram. Soc. Japan.*, **117**, 742-747 (2009)
- 5) Abe, O., S. Iwai, S. Kanzaki, Y. Ohashi and H. Tabata : "Influence of size and shape on homogeneity of powder compacts formed by cold isostatic pressing (part1)", *Yogyo-Kyokai-Shi*, **94**, 1092-1098 (1986)
- 6) Abe, O., S. Kanzaki and H. Tabata : "Structural homogeneity of CIP formed green compacts (Part2) influence of applying pressure", *Nippon Seramikkusu Kyokai Gakujyutu Ronbunshi*, **97**, 32-37 (1989)
- 7) Hamada, Y., K. Ishizaki and J. Briceño : "Computer Simulation of CIP Densified Bodies", *Nippon Seramikkusu Kyokai Gakujyutu Ronbunshi*, **98**, 327-331 (1990)
- 8) Matsuo, Y., T. Nishimura, K. Jimbo, K. Yasuda and S. Kimura : "Development of Cyclic-CIP and its application to powder forming", *Yogyo-Kyokai-Shi*, **95**, 1226-1231 (1987)
- 9) Matsuo, Y., T. Nishimura, K. Yasuda, K. Jimbo and S. Kimura : "Improvement of structural reliability of sintered alumina by new powder forming method, Cyclic CIP", *MRS Int'l. Mtg. on Adv. Mats.*, **5**, 151-157 (1989)
- 10) Nishimura, T., K. Jimbo, Y. Matsuo and S. Kimura : "Forming of ceramic powders by Cyclic-CIP - effect of bias pressure -", *Nippon Seramikkusu Kyokai Gakujyutu Ronbunshi*, **98**, 735-738 (1990)
- 11) Nishimura, T., K. Kubo, K. Jimbo, Y. Matsuo and S. Kimura : "Forming of ceramic powders by Cyclic-CIP effect of frequency -", *Nippon Seramikkusu Kyokai Gakujyutu Ronbunshi*, **98**, 1368-1371 (1990)

- 12) Matsuo, Y., T. Nishimura, K. Yasuda, K. Jimbo and S. Kimura : "Forming of silicon carbide powder by Cyclic CIP", *Nippon Seramikkusu Kyokai Gakujyutu Ronbunshi*, **98**, 1368-1371 (1990)
- 13) Yasuda, K., T. Kitamura, Y. Matsuo and T. Shiota : "Densification process of powder compaction by Cyclic CIP", in : Proc. Materials Science and Technology (MS & T), Cincinnati, OH, USA, pp. 495-506 (2006)
- 14) Cundall, P. A. and O. D. L. Starck : "A discrete numerical model for granular assemblies", *Geotechnique*, **29**, 47-65 (1979)
- 15) Shima, S., H. Kotera and Y. Ujie : " A study of constitutive behavior of powder assembly by particulate modeling", *Mater. Sci. Res. Inter.*, **1**, 163-168 (1995)
- 16) Tsuji, Y. : "Wide application of discrete particle simulation to particle technology", In : Proceeding of the Fifth World Congress of Chemical Engineering", 5, San Diego, USA, pp.18-22 (1996)
- 17) Christophe, L. M., D. Bouvard and G. Delette : "Discrete Element Simulation of the Compaction of aggregated Ceramic Powders", *J. Am. Ceram. Soc.*, **89**, 3379-3387 (2006)
- 18) Taira, S. : "Gendai Zairyo Rikigaku", Ohmsha, Ltd., p. 203 (1970)
- 19) Janssen, H. A. : "Versuche über Getreidedruck in Silozellen (Experiments on Grain Pressure in Silos)", *Zeit. d. Vereins Deutsch. Ing.*, **39**, 1045-49 (1895)
- 20) Kawakita, K. : "State equation of Powders Compressed", *Zairyo (J. the Society of Materials Science, Japan)*, **13**, 421-428 (1964)
- 21) Fine Ceramics Jiten", Gihodo, p. 148 (1987)