流束曲線による回分沈降の解析 (I)

Analysis of Batch Sedimentation with Solid Flux Curve

渡 辺 治 夫*

Haruo Watanabe

緒 言

工業的に用いられる沈降濃縮操作は、スラリー中の固体粒子と液との密度差を利用して、固体と液体とを分離しようとするものである。

沈降管内にスラリーを放置すると、上部に清澄液が生成し、下方からスラジ堆積層が上昇して、濃度が急激に変化している層、すなわち、濃度不連続界面と、濃度が連続的に変化している層が形成される。

粒子の管単位断面積あたりの流量、すなわち固体粒子流束は、粒子濃度のみの関数であるとして、固体流束対濃度曲線を用い、粒子群沈降に伴う濃度不連続面や等濃度層の移動現象を解析し、連続沈降槽の設計や操作に役立てることができる。

ここでは、重力場における回分沈降に関連して、固体流束曲線における濃度不連続面と等濃度層の移動状態と沈降曲線との関係を求め、さらに、遠心力場における回分沈降状態、流動層における等濃度層の伝播、輸送過程のスラリー濃度変化などについて述べる。

1. 回分沈降曲線

Fig. 1 回分沈降曲線

昭和49年4月26日受理

* 室蘭工業大学化学工学科 (〒050 室蘭市水元町27)

TEL 0143-44-4181

Fig. 1 左は、断面積一定の沈降管内におけるスラリーの典型的な回分沈降の状態である。沈降管内は、最初は均一濃度 c_0 のスラリー層 B だけであるが、沈降開始とともに、上部に清澄層 A が形成され、同時に、底部に高濃度の粒子沈積層 (スラジ) D が生成し、成長していくのが認められるようになる。B 層と D 層の中間に濃度勾配のある C 層が現われる場合も知られている。

けん濁固体粒子の粒径が均一であるか、あるいはスラリー濃度が大きい場合には、A 層と B 層の間に明瞭な沈降界面 AB が認められる。B 層と C 層の間の界面 BC は生じないこともある。上部の下降界面と下部の上昇界面が一致すると、B 層は消失し、その後は、C 層と D 層の緩慢な圧密が始まり、沈積スラジ全体が最大濃度 c_∞ になって、全沈降過程が終了する。

界面をはさむ上下の層では、濃度が急激に変化しており、この濃度不連続面が移動する。これは、衝撃波 (Shock wave)、不連続波 (Discontinuity wave)、あるいは Kinematic wave と呼ばれるものである。

Fig. 1 左の清澄層 A と粒子沈降層との界面高さ z の時間的変化を示すものが Fig. 1 右で、回分沈降曲線と呼ばれる。沈降管内の全スラリー容積を V_0 、最終沈積スラジ容積を V_∞ 、これに対応する濃度を c_0, c_∞ 、高さを z_0, z_∞ とすると、 $c_0 V_0 = c_\infty V_\infty$ が成立する。沈降管断面積 A が一定であれば、 $V = zA$ であるから、 $c_0 z_0 = c_\infty z_\infty$ である。

2. スラリーの沈降速度

単一粒子が無限長さの静止流体中を沈降するときの終末速度を v_g とする。静止流体中を沈降する粒子群の沈降速度 v は、粒子濃度 c がきわめて希薄なときは、 $v = v_g$ であるが、濃度が大きくなるにつれて減少し、 $v < v_g$ となり、 v は濃度の関数であると考えられる。したがって、管水平断面単位面積を単位時間に通過する固体粒子量、すなわち、粒子流束 cv もまた濃度の関数となる¹⁾。

スラリー初濃度 c を変えて、定速沈降速度 v を測定

Fig. 2 等濃度面の移動, $u > 0$

し、固体粒子流束 cv を c の関数として図示することができる。これが流束曲線である。

2.1 等濃度層の移動速度

Fig. 2 のように、断面積一定の無限長さの管中を、スラリーが一定速度 u で下方に流れている場合を考える。流れと逆方向に z 軸をとり、下向き速度を正にとる。管壁にたいする粒子の相対沈降速度 v_r は、 $v_r = v + u$ となるから、濃度が Δc だけ異なる Δz 間に Δt 時間に、管水平断面単位面積を通過する粒子量、すなわち固体粒子流束について、つぎの物質収支が成立し、(1)式が得られる。

$$(cv_r)\Delta t - c\Delta z = [cv_r + \Delta(cv_r)]\Delta t - (c + \Delta c)\Delta z$$

$$\therefore \Delta c\Delta z = \Delta(cv_r)\Delta t \quad \dots\dots(1)$$

両辺を $\Delta c\Delta t$ で割り、 $v_r = v + u$ より(2)式を得る。

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial(cv_r)}{\partial c} = \frac{\partial(cv)}{\partial c} + u \quad \dots\dots(2)$$

また、(1)式の両辺を $\Delta z\Delta t$ で割ると、(3)式が得られる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial(cv_r)}{\partial z} = \frac{\partial(cv)}{\partial z} + u \frac{\partial c}{\partial z} \quad \dots\dots(3)$$

粒子がブラウン運動をしている場合には、(3)式の右辺に、 $D(\partial^2 c / \partial z^2)$ の項が加わる²⁾。 D は拡散係数である。

一定容器中の回分沈降では、 $u = 0$ であるから、(2～3)式は(4)式となる。

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial(cv)}{\partial c} \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial(cv)}{\partial z} \quad \dots\dots(4)$$

* 固体粒子流束 (Solid flux), すなわち (濃度×線速度) は、管水平断面単位面積を単位時間に通過する固体粒子の質量または容積で表わされ、濃度が容積分率であれば、 $[\text{m}^3\text{-solid}/\text{m}^2\text{-area, sec}]$, 濃度が $[\text{kg-solid}/\text{m}^3\text{-slurry}]$ ならば、 $[\text{kg-solid}/\text{m}^2\text{-area, sec}]$ の単位となる。

$c(z, t)$ として、全微分すると、次式を得る。

$$dc = \frac{\partial c}{\partial z} dz + \frac{\partial c}{\partial t} dt$$

等濃度では、 $dc = 0$ であるから、上式は(5)式となる。

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_c = -\left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)_z / \left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)_t = -\frac{\partial z}{\partial t} \quad \dots\dots(5)$$

(5)式と(4)式より、 $cv = cv(c)$ を考慮して(6)式が得られる。

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_c = -\frac{d(cv)}{dc} \quad \dots\dots(6)$$

この関係を用いると、(4)式は、回分沈降においてはつぎのように表わされる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial(cv)}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} = -\left(\frac{dz}{dt}\right)_c \frac{\partial c}{\partial z}$$

(6)式より、回分沈降において、濃度が連続的に変化する場合の等濃度層の移動速度は、流束 cv 対濃度 c の曲線上のある濃度 c における切線の傾きの符号を変えたもので、濃度について一定の値をとることが知られる。

2.2 不連続面の移動速度

Fig. 1 のA層とB層の界面ABは、下降する濃度不連続面であり、界面CDは沈積スラジの濃度不連続上昇面である。スラリー全体が無限長さの管中を下方に u の速度で下降している場合の界面における物質収支を考えてみる。

Fig. 3 左に示すように、 $c_1 v_1 > c_2 v_2$ であれば、界面は上昇する。その速度を U とすると、この界面に入る粒子の速度は $(v_r + U)$ であるから、 $v_{r1} = v_1 + u$, $v_{r2} = v_2 + u$, として次式が成立し、界面上昇速度 U は(7)式のようになる。

$$c_1(v_{r1} + U) = c_2(v_{r2} + U)$$

$$-U = \frac{z}{t} = \frac{c_2 v_2 - c_1 v_1}{c_2 - c_1} + u \quad \dots\dots(7)$$

z は時間 t のときの界面高さである。

回分沈降では $u = 0$, 沈降管底部より最後に上昇する層の濃度は $c_2 = c_\infty$ である。

同様に、 $c_1 v_1 < c_2 v_2$ の場合の上方不連続面の下降

Fig. 3 濃度不連続界面の移動, $u > 0$

速度 U は, Fig. 3 右より, (8)式で表わされる。

$$c_1(v_{r1} - U) = c_2(v_{r2} - U)$$

$$U = \frac{z_0 - z}{t} = \frac{c_2 v_{r2} - c_1 v_{r1}}{c_2 - c_1} + u \quad \dots\dots(8)$$

z_0 はスラリーの初高である。

回分沈降では $u = 0$ である。また, Fig. 1 の AB 界面では, 上方が清澄層であるから, (8)式において $c_1 = 0$, $c_2 = c_0$ であり, $U_{AB} = v_0$ となる。

Fig. 1 の回分沈降曲線 ($z : t$) と, 流束曲線 ($cv : c$) との関係を Fig. 4 に示す。清澄沈降界面 AB の上では, 濃度は $c = 0$, 下では c_0 である。上昇界面 BC の下では, 濃度は c_0 から c_∞ まで連続的に変化しており, 界面 CD および AD の下の層の濃度は c_∞ である。

2.3 清澄界面直下の濃度

前節で, 不連続面直下の濃度を c_2 としたが, ここでは清澄界面直下の濃度について考えてみる。

Fig. 5 の回分沈降曲線において, 清澄界面の沈降速度 U_s は, 時間 t , 高さ z の点における曲線への接線で表わされるから, これと z 軸との交点を z_t とすると, U_s は次式で表わされる。

$$U_s = \frac{z_t - z}{t}$$

濃度 c の等濃度層は, 時間 t で上方よりの下降清澄界面と z の高さで合致し, その上昇速度 U_c は, 次式で表わされる。

$$U_c = \frac{z}{t}$$

容器断面積が A で一定であるとする, 容器内固体粒子総量は, スラリー初濃度を c_0 , 初高を z_0 として, $c_0 z_0 A$ である。時間 t ですべての粒子は, 濃度 c の層を通過し

Fig. 4 回分沈降曲線と流束曲線との関係

Fig. 5 清澄界面直下の濃度

ていなければならないから, つぎの固体収支が成立する。

$$(cU_s + cU_c)At = c_0 z_0 A$$

上式にさきの U_s と U_c を代入すると

$$\left[c \frac{z_t - z}{t} + c \frac{z}{t} \right] At = c_0 z_0 A$$

となり, これより, つぎの重要な関係が得られる。

$$cz_t = c_0 z_0 \quad \dots\dots(9)$$

Fig. 6 回分沈降曲線より流束曲線を求める作図法

(9)式の関係を用いて、回分沈降曲線と固体流束曲線の関係を Fig. 6 のように、作図により示すことができる³⁾。

回分沈降曲線の z_0 における沈降曲線への接線と平行に、 $cv:c$ 面上で OD を引き、初濃度 c_0 に相当する点を c 軸上にとって垂線をたて、 OD との交点を D とすると、 $D(c_0, c_0v_0)$ である。

沈降曲線の t における曲線への接線と平行に、 $cv:c$ の原点を通る直線 OE を引く。 t における接線と z 軸との交点 z_i から c 軸に平行な直線を引き、 D 点と c_0 を通る直線の延長との交点 G と、 $z: t$ 面の原点とを結ぶ。 OG の延長線と、 z_0 からの c 軸に平行な直線との交点 F を求め、 F から z 軸に平行な線を引き、 c 軸との交点を求めると、この濃度が t における清澄界面直下の濃度となることは、幾何学的にも容易に証明できる。したがって、 F を通り cv 軸に平行な直線と OE との交点を E として、流束曲線を求めることができる。

Fig. 6 の回分沈降曲線の OK 、もしくは OH の傾きは、流束曲線の D 、もしくは E における流束曲線への接線の傾きに等しい。したがって、流束曲線より沈降曲線を求めることもできる。

Fig. 6 の回分沈降において初濃度 c_0 のスラリーが、初高 z_0 から沈降を開始して t 時間後に、清澄界面高さが z で、界面直下の濃度を c 、濃度 c の等濃度層の上昇速度を U_c とすると、清澄界面を通過した固体粒子総量は、 $c(v+U_c)At$ である。

清澄液をのぞく界面以下のスラリー容積は、 $V=U_cAt$ であるから、平均濃度 $\bar{c}$ は、固体粒子量をスラリー容積で割ったものであり、次式のようになる。

$$\bar{c} = \frac{(cv + cU_c)At}{U_cAt} = \frac{cv}{U_c} + c$$

Fig. 6 において、 E における流束曲線への接線と c 軸との交点を c' 、 cv 軸との交点を $(cv)'$ とすると、 $U_c = cv/(c'-c) = (cv)'/c'$ であるから、上式に代入すると、つぎの関係が得られる。

$$\bar{c} = \frac{cv}{cv/(c'-c)} + c = c'$$

これから、 c' は界面高さ z における平均濃度を示していることが知られる。

$c_0z_0 = c'z$ で、 $z_0/z = c'/c_0$ であるから、Fig. 6 で、 DG の延長線と HL との交点 L と O を結んだ直線の延長上に、 c' に相当する M 点を求められることは、幾何学的にも容易に証明できる。

2.4 回分沈降管内の濃度分布⁷⁾

Fig. 1 の回分沈降曲線では、界面 AB の上部 A は清澄層で粒子濃度はゼロ、 B 部は沈降層で濃度は一定で初濃度に等しくなっている。

沈降清澄界面 AB と上昇界面 BC が一致したところから、清澄界面は AC 部のように湾曲して沈降するが、このときの C 層には種々の濃度層が上昇してきており、濃度勾配が存在している。界面 AC が c_∞ の濃度層の上昇界面 CD と一致したところで、堆積スラジの濃度は一様に c_∞ となって、沈降は終了する。

回分沈降で、はじめ様な初濃度 c_0 のスラリーが、沈降を開始してから t 時間経過したときの管内濃度分布を、沈降曲線から求めることができる。

Fig. 7 左の沈降曲線において、初濃度 c_0 のスラリーの沈降開始後の経過時間が t のところに、 z 軸に平行な直線を引き、このときの上方清澄界面は z にあり、 z から上は清澄層、 $z \sim z_1$ は c_0 である。この下には、管底から $c_1 \sim c_\infty$ の等濃度層が上昇してきているが、その高さは等濃度上昇面と t 軸との交点で求められ、また濃度は、等濃度線が沈降曲線と交わる点からの曲線への接線が z 軸と交わる点の高さから、(9)式によって求められ、Fig. 7 右のように濃度分布の状態が得られる。

3. 回分沈降の無次元式

回分沈降において、スラリーの沈降速度 v は、スラリー濃度の増大とともに減少するが、簡単な場合として、濃度増加に逆比例して v が直線的に減少すると考えると、 v_0 を単一粒子の沈降速度として、つぎのように表わされるであろう。

$$v = v_0(1 - kc)$$

Fig. 7 回分沈降管内の濃度分布

この場合には、沈降管底に堆積するスラジが最大濃度 c_∞ になって沈降を終了し、 $v=0$ となるから、 $k=1/c_\infty$ でなければならない、上式はつぎようになる。

$$v = v_g \left(1 - \frac{c}{c_\infty} \right)$$

したがって、管水平断面単位面積を単位時間に通過する固体量、すなわち固体粒子流束 cv は(10)式で表わされる。

$$cv = c_\infty v_g \left(\frac{c}{c_\infty} \right) \left(1 - \frac{c}{c_\infty} \right) \quad \dots\dots(10)$$

ここで、 $\phi \equiv cv/c_\infty v_g$ 、 $\alpha \equiv c/c_\infty$ とすると、 α は無次元濃度(相対濃度)、 ϕ は無次元流束となって、いずれも $0 \sim 1$ の範囲内にあり、(10)式は(11)式となる。

$$\phi(\alpha) = \alpha(1-\alpha) \quad \dots\dots(11)$$

また、回分沈降において、スラリー初濃度を c_0 、スラリー初高を z_0 とし、無次元高さ ξ と、無次元時間 τ をつぎのように定義する。

$$\xi \equiv \frac{z}{z_0} \quad \tau \equiv \frac{v_g t}{z_0} \quad \dots\dots(12)$$

回分沈降においては、 $u=0$ であるから、(3)式を無次元化すると、(13)式が得られる。

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 0 \quad \dots\dots(13)$$

(13)式の境界条件は、 $\xi \leq 0$ で $\alpha = 1$ 、 $\xi \geq 1$ で $\alpha = 0$

である。スラジの最終沈降高さを z_∞ とし、 $\xi_\infty \equiv z_\infty/z_0$ とすると、このときは $\alpha = 1$ である。すなわち、つぎの条件となる。

$$0 \leq \xi \leq \xi_\infty \quad \alpha(\xi) = 1$$

$$\xi_\infty \leq \xi \leq 1 \quad \alpha(\xi) = 0$$

したがって、上方の下降清澄界面として濃度 0 とある濃度 c との不連続面と、底からの c_∞ と c との上昇不連続面の存在が考えられる。

(7)式を $u=0$ として無次元化すると、次式を得る。

$$\frac{\xi}{\tau} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad \dots\dots(7')$$

上式は α_2 と α_1 との不連続面上の昇速度を表わす。 $\alpha_\infty = 1$ と α との界面の昇速度は、上式で $\alpha_2 = 1$ 、 $\phi_2 = 0$ としたもので、次式となる。

$$\frac{\xi}{\tau} = \frac{\phi(\alpha)}{1-\alpha} \quad \dots\dots(14)$$

上方の清澄下降界面では、界面上部は清澄層で $c_1 = 0$ 、すなわち $\alpha_1 = 0$ となり、清澄界面の沈降速度は、(8)式を $u=0$ として、つぎのようになる。この場合の ξ は、上方清澄界面位置の初高面からの高さで、沈降距離であり、 $\xi = 1 - \xi$ (ξ は底からの界面高さ) である。

$$\frac{\xi}{\tau} = \frac{\phi(\alpha)}{\alpha} \quad \dots\dots(15)$$

また、濃度が連続的に変化している場合の等濃度層上昇速度は、(6)式より次式のように表わせる。

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\frac{d\phi}{d\alpha} = -\phi'(\alpha) \quad \dots\dots(16)$$

ϕ を α の関数として数式に表現することができれば、これらの式をとくことができる。また、 ϕ が曲線として与えられていれば、作図的に求めることもできよう。

4. 無次元流束曲線

無次元流束 ϕ と無次元濃度 α との関係として、もっとも簡単な場合は、さきに示した(11)式がある。

$$\phi(\alpha) = \alpha(1-\alpha) \quad \dots\dots(11)$$

(11)式で表わされる曲線は放物線で、変曲点をもたない。実際のスラリーでは、(11)式のように簡単な形でなく、濃度が増加すると、沈降速度は(11)式よりもさらに大きく減少し、1~2個の変曲点を有する曲線となる場合が多い。これは高次式となる。従来の研究によれば⁴⁾,

$$v=v_0(1-\alpha)^n$$

$$\phi(\alpha)=\alpha(1-\alpha)^n$$

もしくは⁵⁾,

$$\phi(\alpha)=\alpha(K_0+K_1\alpha+K_2\alpha^2+K_3\alpha^3+K_4\alpha^4)$$

などがある。

ここでは、変曲点の α の値を a 、 b として、変曲点1個の場合は、

$$\frac{d^2\phi}{d\alpha^2}=K_5(\alpha-a)$$

また、変曲点2個の場合には、

$$\frac{d^2\phi}{d\alpha^2}=K_6(\alpha-a)(\alpha-b)$$

と仮定する⁶⁾。これを、 $\alpha=0$ と $\alpha=1$ で $\phi(\alpha)=0$ 、および

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\phi(\alpha)}{\alpha} = 1$$

の条件を入れて K_5 、 K_6 を決定すると、つぎの2式が得られる。

$$\phi(\alpha)=\alpha(1-\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{3a-1}\right) \quad \dots\dots(17)$$

$$\phi(\alpha)=\alpha(1-\alpha)\left[1+\frac{1-2(a+b)}{1-2(a+b)+6ab}\alpha+\frac{\alpha^2}{1-2(a+b)+6ab}\right] \quad \dots\dots(18)$$

(11)、(17~18)式の曲線の形をFig. 8に示す。

(17)式が $0 \leq \alpha \leq 1$ で正、もしくは0であるための成立条件は、 $a \geq 1$ 、および $3a-1 \geq 1$ であるから、

$$\frac{2}{3} \leq a \leq 1$$

となる。(19)式の成立条件はさらに複雑である。

流束対濃度曲線が、変曲点の数によって、(11)、(17~18)式のように表わされる場合の回分沈降曲線の形を考えてみる。

4.1 2次の流束曲線-I類沈降

(11)式によって表わされ、Fig. 8、9中に示される2次の流束曲線は、放物線で、 $\alpha=1/2$ で $\phi=1/4$ の極値を有する。

(11)式から、(14~16)式はつぎのようになる。

$$\frac{\phi(\alpha)}{1-\alpha}=\alpha$$

$$\frac{\phi(\alpha)}{\alpha}=1-\alpha \quad \dots\dots(19)$$

$$\phi'(\alpha)=2\alpha-1$$

これから、流束曲線の傾き $-\phi'(\alpha)$ は、 $\alpha=0$ で $\phi'(0)=-1$ から、 $\alpha=1$ で $\phi'(1)=+1$ の間にあることが知られる。したがって、 $\alpha=0$ 、および $\alpha=1$ における曲線への接線は、 $0 \leq \xi \leq 1$ に対応する任意の α_0 における接線(傾き $2\alpha_0-1$)と交わることになる(Fig. 9上)。

Fig. 9下のスラリー上方清澄界面ABの上のA層では $\alpha=0$ 、下のB層では $\alpha=\alpha_0$ である。したがって、清澄界面ABの沈降距離は、(13)、(19)式より、つぎのようになる。

$$\xi=(1-\alpha_0)\tau \quad \dots\dots(20)$$

しかるに、回分沈降においては、 z_∞ をスラジ最終沈降高さとする、 $c_0 z_0 = c_\infty z_\infty$ であるから、

$$\alpha_0 \equiv \frac{c_0}{c_\infty} = \frac{z_\infty}{z_0} \equiv \xi_\infty$$

Fig. 8 流束曲線の形

Fig. 9 I 類沈降

となり, (20)式を

$$\zeta = (1 - \xi_\infty)\tau \quad \xi_\infty \leq \zeta \leq 1 \quad \dots\dots(21)$$

と書くことができる。

同様に, 下方のスラジ沈積界面 (Fig. 9 下BD) の上昇にたいし, (14), (19)式より, つぎの関係がある。

$$\xi = \alpha_0 \tau = \xi_\infty \tau \quad 0 \leq \xi \leq \xi_\infty \quad \dots\dots(22)$$

ABとBDはQ点で一致し, $\xi = 1 - \zeta$ となる。Qは $\tau = 1$, $\xi = 1 - \zeta = \xi_\infty$ の点である。したがって, 沈降全過程の所要時間は, z_0/v_0 で, これは初濃度に関係しないことになる。

このような沈降の形を「I類沈降」と分類しておくことにする。

4.2 3次の流束曲線

変曲点1個を有する3次の流束曲線は, (17)式で表わされ, Fig. 10 のような形になる。(17)式を簡単にして(23)式で表わす。

$$\phi(\alpha) = \alpha(1 - \alpha)(1 - \lambda\alpha) \quad \dots\dots(23)$$

$$\lambda = 1/(3a - 1)$$

(23)式を微分すると, 次式を得る。

$$\begin{aligned} \phi' &= 1 - 2(1 + \lambda)\alpha + 3\lambda\alpha^2 \\ \phi'' &= -2(1 + \lambda - 3\lambda\alpha) \end{aligned} \quad \dots\dots(24)$$

Fig. 10 の流束曲線において

C: 曲線OD上の任意の点

D: Jから曲線に引いた接線と曲線との交点

E: DA上の任意の点

A: 変曲点

H: Eから曲線へ引いた接線の接点

J: $\alpha = 1$, $\phi = 0$

とし, それぞれの点に対応する濃度を小文字で表わすことにする。A点に対応する $\alpha = a$ は, (13)式の λ に含まれる a に等しい。

ここで, スラリー初濃度 α_0 が, OD, DA, AJ間のそれぞれの場合について考えてみる。

4.2.1 $0 < \alpha_0 = c \leq d$

α_0 が Fig. 10 の OD間, すなわち, $0 < \alpha_0 \leq d$ の間の濃度 c である場合には, $\alpha = 1$ の等濃度層の上昇速度, すなわち JDの傾きが, $\alpha_0 = c$ の等濃度層の上昇速度 (JCの傾き) よりも大きい。したがって, 沈降の初期には, 清澄界面が直線的に下降し, $\alpha = 1$ の濃度の沈積スラジ層が直線的に上昇する。このときの上方清澄界面 (Fig. 11, AB) の沈降距離は, (15), (23)式より

$$\zeta = \frac{\phi(\alpha_0)}{\alpha_0} \tau = (1 - \alpha_0)(1 - \lambda\alpha_0)\tau$$

であり, また, 沈積スラジ界面の上昇高さは, (14), (23)式より,

$$\xi = \frac{\phi(\alpha_0)}{1 - \alpha_0} \tau = \alpha_0(1 - \lambda\alpha_0)\tau$$

となるから, 両界面の一致する時間を τ_1 とすると, $\xi =$

Fig. 10 3次の流束曲線, (23)式

$$\tau_1 = \frac{\alpha_0(1-\alpha_0)}{\phi(\alpha_0)} = \frac{1}{1-\lambda\alpha_0} \dots\dots(25)$$

沈降曲線の形は、**Fig. 9** 下と同様の I 類沈降であり、上方清澄界面の沈降速度は **Fig. 10** の直線 OC、下方界面の上昇速度は直線 JC のそれぞれ傾きの符号を変えたものになる。

α_0 が Fig. 10 の DA 間の E に対応する濃度 e の場合には、もっとも早い等濃度上昇層は、E 点より流束曲線に引いた接線 EH (接点 H) である。EH の傾きは、 $\alpha = 1$ の等濃度層 JD の傾きより大きいから、EH の傾きが下方界面の上昇速度となることが知られる。その濃度は、 $\alpha_1 = h$ であり、Fig. 10 の幾何学的関係から

$$\phi(\alpha_0) - \phi(\alpha_1) = (\alpha_0 - \alpha_1)\phi'(\alpha) \quad \dots\dots\dots(26)$$

Fig. 11 の界面ABの沈降距離は、(15)式と(23)式より、次式で表わされる。

$$\zeta = \frac{\phi(\alpha_0)}{\alpha_0} \tau = (1 - \alpha_0)(1 - \lambda \alpha_0) \tau$$

$$\xi = - \frac{\phi(\alpha_1) - \phi(\alpha_0)}{\alpha_1 - \alpha_0} \tau$$

ABとBCの一致するときの高さ ξ_0 、および時間 τ_0 は、 $1 - \xi_0 = \xi_0$ とし、さらに(24)式を入れて、つぎのように求められる。

$$\begin{aligned}\tau_c &= \frac{\alpha_0}{\phi(\alpha_0) - \alpha_0 \phi'(\alpha_1)} = \frac{\alpha_0(\alpha_1 - \alpha_0)}{\phi(\alpha_0)\alpha_1 - \phi(\alpha_1)\alpha_0} \\ \xi_c &= \frac{-\alpha_0 \phi'(\alpha_1)}{\phi(\alpha_0) - \alpha_0 \phi'(\alpha_1)} = \frac{\alpha_0 \{\phi(\alpha_0) - \phi(\alpha_1)\}}{\phi(\alpha_0)\alpha_1 - \phi(\alpha_1)\alpha_0}\end{aligned}\quad \dots\dots (27)$$

このような沈降の形を「Ⅱ類沈降」と分類する。Ⅱ類沈降では、 $\alpha = 0$ と α_0 との上方清澄界面 (Fig. 11 A B) が、底部よりの α_0 と α_1 との上昇界面と出会うまで定速沈降がみられる。この間には、上方に $\alpha = 0$ と α_0 との清澄界面、中間に α_0 と α_1 との上昇界面、および、下部の $\alpha = 1$ の上昇界面が認められる。定速沈降終了後の清澄界面直下の濃度は $\alpha_1 + 4\alpha$ で、時間とともに連続的に変化し、沈降曲線は Fig. 11 の AC のように湾曲する。AB から AC への変化は不連続である。

スラリー初濃度 α_0 が、Fig. 10 の流束曲線の変曲点 A に相当する濃度 α よりも大きい場合には、上方の下降澄清界面 AB は定速で沈降し、その沈降距離 ζ は、(15) 式と (23) 式より、次式で与えられる。

$$\zeta = \frac{\dot{\phi}(\alpha_0)}{\alpha_0} \tau = (1 - \alpha_0)(1 - \lambda \alpha_0) \tau \quad \dots\dots(28)$$

また、 $\xi = \tau = 0$ から、上方の下降清澄界面にいたる α_0 の等濃度層の上昇速度は、(16)式より $\phi'(\alpha_0)$ であるから、その上昇高さ ξ は、(24)式を考慮して次式のようになる。

$$\xi = -\phi'(\alpha_0)\tau = [-1 + 2(1 + \lambda)\alpha_0 - 3\lambda\alpha_0^2]\tau \quad \dots\dots(29)$$

両界面の一致するときの高さを ξ_c ，時間を τ_c とすると， $1-\xi_c=\xi_c$ より， ξ_c と τ_c はつぎのように求められる。

$$\tau_c = \frac{1}{\alpha_0(1+\lambda-2\lambda\alpha_0)} = \frac{3a-1}{\alpha_0(3a-2\alpha_0)} \quad \dots\dots(30)$$

$$\xi_c = \frac{-1+2(1+\lambda)\alpha_0-3\lambda\alpha_0}{\alpha_0(1+\lambda-2\lambda\alpha_0)} = \frac{1-3a+6a\alpha_0-3\lambda\alpha_0^2}{\alpha_0(3a-2\alpha_0)} \dots\dots(31)$$

この界面の下には、 $\alpha_0 \sim 1$ の等濃度層が原点から放射状に上昇し、清澄界面沈降速度は減少し、Fig. 11 の AC 部と同様に湾曲する沈降曲線となる。

最下部からは、 $\alpha = 1$ のスラジ層 (Fig. 11, CD 界面) が上昇していくが、その上昇高さとの関係は、(29) 式で $\alpha_0 = 1$ としたもので、次式で表わされる。

$$\xi = (1 - \lambda) \tau \quad \dots\dots (32)$$

この濃度層が下降清澄界面と一致する高さを ξ_∞ 、時間を τ_1 とすると、 $\tau_1 = \xi_\infty / (1 - \lambda)$ であり、 (ξ_0, τ_0) と (ξ_∞, τ_1) の間では、界面は直線的には沈降しないが、(28) 式に相当する次式を満足していなければならない。

$$\zeta = 1 - \xi = (1 - \alpha)(1 - \lambda\alpha)\tau$$

α : 等濃度層の濃度

また、上部の清澄界面の沈降速度は、上式より、つぎのように表わされる。

$$-\frac{d\xi}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{d\alpha} = (1 - \alpha)(1 - \lambda\alpha) \frac{d\tau}{d\alpha} \dots\dots (28')$$

濃度 α の等濃度層の上昇高さとの関係は、(29) 式で $\alpha_0 = \alpha$ とした次式で表わされる。

$$\xi = [-1 + 2(1 + \lambda)\alpha - 3\lambda\alpha^2]\tau$$

α を変数として上式を微分し、(28') 式と等置すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= -(1 - \alpha)(1 - \lambda\alpha) \frac{d\tau}{d\alpha} \\ &= -[1 - 2(1 + \lambda)\alpha + 3\lambda\alpha^2] \frac{d\tau}{d\alpha} + 2(1 + \lambda - 3\lambda\alpha)\tau \\ \therefore \frac{1}{2\tau} \frac{d\tau}{d\alpha} &= \frac{1 + \lambda - 3\lambda\alpha}{-\alpha(1 + \lambda - 2\lambda\alpha)} = \frac{3(\alpha - \alpha_0)}{\alpha(3\alpha - 2\alpha_0)} \end{aligned}$$

これを $\tau = \tau_c$ で $\alpha = \alpha_0$ として積分し、(30) 式の τ_c と、(22) 式を考慮して整理すると、次式を得る。

$$\tau = \alpha_0 \frac{3\alpha - 1}{(3\alpha - 2\alpha_0)\alpha^2} = \xi_\infty \frac{3\alpha - 1}{(3\alpha - 2\alpha_0)\alpha^2} \quad \dots\dots (33)$$

これが、 $\alpha_0 > a$ の場合の Fig. 11 AC 部を表わす式で

ある。

$\alpha = 1$ に達し、沈降を終了する時間 τ_1 は、(33) 式で $\alpha = 1$ として、つぎのように求められる。

$$\tau_1 = \alpha_0 \frac{3\alpha - 1}{3\alpha - 2} = \frac{\alpha_0}{1 - \lambda} = \frac{\xi_\infty}{1 - \lambda} \quad \dots\dots (34)$$

$\alpha_0 > a$ の場合の沈降曲線は、 $\alpha = 0$ と $\alpha = \alpha_0$ との下降清澄界面が、下方からの α_0 の上昇等濃度層と出会うまで定速沈降し、その以降は、清澄界面直下の濃度は $\alpha + \Delta\alpha$ となり、 $\alpha = 1$ まで連続的に変化するので、清澄界面のほかに明瞭な界面は認められず、定速沈降から圧密沈降 (Fig. 11 の AB, AC 部) へ連続的に移行する。このような沈降の形を「Ⅲ類沈降」と分類することにする。

さきに述べたⅡ類沈降では、沈降初期において、 α_0 の層の直下に $\alpha_1 (\alpha_1 > \alpha_0)$ の不連続濃度層があって、上昇不連続面を形成し、下降清澄界面 ($\alpha = 0$ と α_0) が、 α_0 と α_1 との不連続面と出会うまで定速沈降し、その以降は、清澄界面直下の濃度は $\alpha_1 + \Delta\alpha$ となり、定速沈降から圧密沈降へ不連続に移行していることが、Ⅲ類沈降と異なっている。

Ⅱ, Ⅲ類沈降において、沈降曲線の一部が Fig. 11 の AC 部のように湾曲している場合の時間と濃度の関係を一般的な形で求めてみよう。

Fig. 11 の曲線 AC 部において、濃度 α の等濃度層の上昇高さは、(10) 式より、 $\xi = -\phi'(\alpha)\tau$ であり、 α が連続的に変化していれば、微分した次式が得られる。

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\phi''(\alpha)\tau - \phi'(\alpha) \frac{d\tau}{d\alpha}$$

また、濃度 α と $\alpha = 0$ との清澄界面の下降速度は、 α が連続的に変化している場合には、(10) 式より

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\frac{\phi(\alpha)}{\alpha}$$

であるから、上の 2 式より $d\xi$ を消去すると

$$\frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{d\alpha} = \frac{\alpha\phi''(\alpha)}{\phi(\alpha) - \alpha\phi'(\alpha)}$$

が得られる。これを $\tau = \tau_c$ で $\alpha = \alpha_0$ として積分すると、次式が得られる。

$$\frac{\tau}{\tau_c} = \frac{\phi(\alpha_0) - \alpha_0\phi'(\alpha_0)}{\phi(\alpha) - \alpha\phi'(\alpha)}$$

τ_c は(24)式で与えられているから、代入すると、つぎのように、 τ と α の関係の一般解が得られる。

$$\tau = \frac{\alpha_0}{\phi(\alpha) - \alpha\phi'(\alpha)} = \frac{\xi_\infty}{\phi(\alpha) - \alpha\phi'(\alpha)}$$

$\alpha=1$, $\tau=\tau_1$ で沈降を終了するから、

$$\tau_1 = \frac{-\alpha_0}{\phi'(1)} = \frac{-\xi_\infty}{\phi'(1)}$$

となる。これが τ_1 の一般解である。3次の流束曲線の場合には、(24)式の $\phi'(1)=1-\lambda$ を代入すれば、上式は(24)式に一致することが知られるであろう。

4.3 4次の流束曲線

(18)式で表わされる4次の流束曲線は、Fig. 12 に示されているように、2個の変曲点A, Bを有し、対応する濃度は、それぞれ a , b である。直線CFJは、J($\alpha=1$)からの曲線への接線で、これと曲線との交点C、接点Fの重要な点がきめられる。

スラリー初濃度 α_0 が $0 < \alpha_0 \leq c$ の場合の沈降曲線の形は、Fig. 9 下のようになり、I類沈降である。また、 $b \leq \alpha_0 < 1$ では、この間の固体流束曲線が上方に凸であるから、やはりI類沈降である。

$c \leq \alpha_0 = d \leq a$ の間の初濃度を有するスラリーでは、D点に対応する濃度 d と、D点からの曲線への接線の接点Eに対応する濃度 e との間の濃度不連続界面の上昇速

Fig. 12 4次の流束曲線, (18)式

度、すなわち、DEの傾きがもっとも大きく、その下に、弧EFに対応して連続的に変化している濃度の等濃度層が上昇してきており、 $\alpha=1$ と $\alpha=f$ との濃度不連続界面はFJの傾きに相当する速度で上昇している。この沈降曲線の形は、Fig. 11 のII類沈降となる。

$a \leq \alpha_0 < f$ の初濃度のスラリーでは、 $\alpha=0$ と α_0 との下降清澄界面と、 α_0 の等濃度上昇層が一致するまで定速沈降区間が続き、その以後は、濃度 $\alpha_0 \sim f$ の等濃度層が底から連続的に上昇してくる。 f より大きい濃度層は存在せず、その直下には $\alpha=1$ の濃度層が上昇し、 f と $\alpha=1$ との濃度不連続界面を形成し、その上昇速度は直線FJの傾きである。このような沈降は、さきに示したIII類沈降である。

以上の結果をまとめて Table 1 に示す²⁾。

Table 1

流束曲線	類別	B 層	ξ_c	τ_c	界面BC 直下C層	C 層	界面CD 直上C層	τ_1
2 次	I	α_0	$\alpha_0 = \xi_\infty$	τ_1	α_0	—	—	1
3 次	I	α_0	$\alpha_0 = \xi_\infty$	τ_1	α_0	—	1	$\alpha_0(1-\alpha_0)/\phi_0$
	II	α_0	$\frac{\alpha_0(\phi_0 - \phi_1)}{\alpha_1\phi_0 - \alpha_0\phi_1}$	$\frac{\alpha_0(\alpha_1 - \alpha_0)}{\alpha_1\phi_0 - \alpha_0\phi_1}$	α_1	$\alpha_1 \sim 1$	1	$-\alpha_0/\phi'(1)$
	III	α_0	$-\phi'(\alpha_0)\alpha_0/\chi(\alpha_0)$	$\alpha_0/\chi(\alpha_0)$	α_0	$\alpha_0 \sim 1$	1	$-\alpha_0/\phi'(1)$
4 次	I	α_0	$\alpha_0 = \xi_\infty$	τ_1	α_0	—	1	$\alpha_0(1-\alpha_0)/\phi_0$
	II	α_0	$\frac{\alpha_0(\phi_0 - \phi_1)}{\alpha_1\phi_0 - \alpha_0\phi_1}$	$\frac{\alpha_0(\alpha_1 - \alpha_0)}{\alpha_1\phi_0 - \alpha_0\phi_1}$	α_1	$\alpha_1 \sim \alpha^*$	α^*	$-\alpha_0/\phi'(1)$
	III	α_0	$-\phi'(\alpha_0)\alpha_0/\chi(\alpha_0)$	$\alpha_0/\chi(\alpha_0)$	α_0	$\alpha_0 \sim \alpha^*$	α^*	$-\alpha_0/\phi'(1)$

註 1. B, C, BC, CD, ξ_c , τ_c , τ_1 : Fig. 1, 11 参照

2. α^* : Fig. 12 のF点に相当する濃度

3. $\phi(\alpha_0) \equiv \phi_0$, $\phi(\alpha_1) \equiv \phi_1$

4. $\chi(\alpha) \equiv \phi(\alpha) - \alpha\phi'(\alpha)$