Carr の流動性指数の統計的検討

Statistical Analysis of the Carr's Flowability Index

増田 弘昭* 吉田 英人*
Hiroaki Masuda Hideto Yoshida
井伊谷鋼一*
Koichi Iinoya

1. はじめに

粉体工学の分野で取り扱われている粉体の種類は非常に多く、しかも同一名の粉体であっても粒度や水分によって物理的特性が大きく変化する。このため、ホッパーやフィーダーのような粉体装置は、多くの場合、対象とする粉体によって適当な形や機構のものを選択する必要が生じる。しかし粉体の特性を把握することはむずかしい問題であり、多くは技術者の経験と勘によって処理されてきた。

これに対し、R. L. Carr は圧縮度、安息角、スパチュラ角、凝集度**（または均一度）の4種の測定値から粉体の流動性を表わす一つの指数を求める方法を提案した^{1,2,3)}。この方法は、その後、種々の角度から検討され^{4~8)}、測定機械化も行なわれた⁹⁾。これらの研究からも粉体の流動特性を簡単に表わそうとする要求は非常に大きく、また重要であることがわかる。しかし、鈴木ら⁶⁾も指摘しているように、Carrの流動性指数には理論的裏づけが欠けている。

本文では、上記4種の測定値から、統計的に意味のある一つの指数が得られるかどうかを成分分析によって検討する。データーとして用いている上記4種の測定値の名称と測定法には問題があるように思うが、この点についてはふれない。しかし、測定法が規定されているので、統計的には何らかの評価がえられるはずである。

2. 成分分析¹⁰⁾ (Appendix 参照)

成分分析は相互に関連したいくつかの変量から、互い

に独立な、すなわち互いに相関のない新しい変量を求める方法である¹⁰⁾。この方法によって圧縮度 P 、安息角 φ 、スパチュラ角 ϕ 、凝集度（あるいは均一度） S の4変量から、互いに独立な新しい4変量を導出する。得られた新しい4変量のうち一つが流動性を表現し得るかも知れない。ただし、流動性とは何かはむずかしい問題であり、ここでは Carr の流動性指数に相当するものを考える。解析に用いたデーターを表1に示す。これらのデーターは文献^{4,5,6,9,11)} から引用した。全データーの圧縮度、安息角、スパチュラ角、凝集度（あるいは均一度）の平均および標準偏差はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{平均; } \bar{P} &= 22.63 [\%] & \text{標準偏差; } \sigma_P &= 16.43 \\ \bar{\varphi} &= 41.63 [^\circ] & \sigma_\varphi &= 8.19 \\ \bar{\phi} &= 52.43 [^\circ] & \sigma_\phi &= 18.61 \\ \bar{S} &= 12.40 [-] & \sigma_S &= 21.73 \end{aligned} \quad \dots\dots(1)$$

求めた平均および標準偏差を用いて、表1のデーターを次式によって平均0、分散1に標準化する。

$$\begin{aligned} x_{1j} &= \frac{P_j - \bar{P}}{\sigma_P} \\ x_{2j} &= \frac{\varphi_j - \bar{\varphi}}{\sigma_\varphi} \\ x_{3j} &= \frac{\phi_j - \bar{\phi}}{\sigma_\phi} \\ x_{4j} &= \frac{S_j - \bar{S}}{\sigma_S} \end{aligned} \quad \dots\dots(2)$$

ここで、 $x_{\alpha j}$ は α 番目の変量 $\alpha (\alpha=1, 2, 3, 4)$ はそれぞれ圧縮度、安息角、スパチュラ角、凝集度あるいは均一度に相当) の j 番目の粉体についてのデーターである。これらのデーターの相関行列は次式によって求められる。

昭和49年9月27日受理

* 京都大学工学部化学工学教室
(〒606 京都市左京区吉田本町)
TEL 075-751-2111

** 凝集度 (cohesion) は粘着度、付着率などとも呼ばれているが、凝集度ということが多いようであり、ここでもこの言葉を用いる。

表1 データーおよび解析結果

No.	物 質 名	圧 縮 度	安 息 角	スパチュ ラ角	凝 集 度 (均一度)	主 成 分	第二成分	Carr指数
		P[%]	ϕ [°]	ϕ [°]	S[-]	ζ_1	ζ_2	
1	ポリエチレンA スミカセン	25.8	46.0	67.5	(2.54)	0.600	-0.878	66.5
2	ポリエチレンB スミカセン ブレンド品	14.3	41.0	54.5	(2.68)	-0.448	-0.443	77.0
3	ポリエチレンフローセン MG 801-S	29.7	40.0	65.5	(1.32)	0.286	-0.508	71.0
4	ポリエチレンフローセン MG 201-S	10.0	38.0	57.5	(1.61)	-0.709	-0.419	82.5
5	ポリエチレン PS 3000	30.6	48.0	75.0	(2.92)	1.098	-1.081	58.0
6	ポリエチレン PK 3100	24.6	36.0	63.0	(3.62)	-0.151	-0.202	78.0
7	ポリエチレン (ペトロセン)	19.5	40.5	56.5	(1.54)	-0.271	-0.445	75.5
8	白色ポリエチレン	23.1	40.0	63.5	(1.85)	0.021	-0.514	75.0
9	ナイロン11 (リルサン)	19.4	36.0	51.5	(2.57)	-0.667	-0.056	79.5
10	ナイロン11 (リルサン)	22.0	43.0	52.0	(1.21)	-0.170	-0.479	72.0
11	ベントン (塩素化ポリエーテル)	28.4	42.0	65.0	(1.76)	0.358	-0.606	68.0
12	PVC HE-250	26.4	43.0	74.0	(6.25)	0.694	-0.704	66.0
13	PVC HF-400	17.3	41.0	70.0	(4.00)	0.114	-0.683	75.0
14	フッ化ビニリデン KF-1100	11.2	41.0	36.0	(1.43)	-1.095	-0.140	90.0
15	フッ化ビニリデン KF-1000	18.4	31.0	41.0	(1.52)	-1.319	0.389	82.0
16	粉末エポキシ (黒)	20.8	42.0	65.5	(2.64)	0.137	-0.660	72.0
17	Flo-Moll (ウレタンゴム)	17.4	42.5	69.5	(1.47)	0.144	-0.846	74.0
18	ペトロセン 339	25.7	52.0	58.5	(2.38)	0.703	-1.034	71.5
19	ジルコンサンド	7.80	31.0	38.0	(1.57)	-1.754	0.347	88.0
20	フライアッシュ	46.4	46.0	82.0	(1.41)	1.670	-1.011	46.5
21	殿 粉	18.3	57.0	80.0	(2.00)	1.357	-1.841	55.0
22	ポリエチレンベレット	9.62	32.0	40.0	(1.00)	-1.588	0.248	86.5
23	アセテート フレークス粗粉	22.6	48.0	62.5	(4.80)	0.518	-0.837	63.0
24	アセテート フレークス微粉	29.6	54.0	68.5	(4.58)	1.278	-1.232	59.0
25	ポリエチレン G201	8.7	41.0	52.0	(2.00)	-0.717	-0.472	79.0
26	炭酸カルシウム	26.9	46.0	70.0	(1.78)	0.692	-0.946	61.5
27	PVC ペーストレンジン	31.2	54.0	70.5	(3.02)	1.357	-1.313	57.0
28	PVC ペーストレンジン	19.2	48.0	69.0	(5.35)	0.599	-0.984	64.5
29	PVC ペーストレンジン	17.3	42.0	56.0	(5.55)	-0.189	-0.395	72.5
30	PVC ペーストレンジン	13.0	41.0	69.0	(6.20)	-0.014	-0.625	72.0
31	PVC ペーストレンジン	16.0	40.0	63.5	(2.40)	-0.204	-0.565	72.0
32	高圧ポリエチレン	27.0	45.0	60.0	(2.44)	0.366	-0.660	65.0
33	高圧ポリエチレン	23.0	45.0	53.5	(2.44)	0.051	-0.567	70.0
34	ABS レジン #4300	28.3	47.0	69.7	(1.87)	0.792	-0.978	60.0
35	ABS レジン #2500	25.9	45.5	67.0	(1.40)	0.536	-0.880	66.0
36	塩化ビニール	30.4	35.5	42.5	(1.20)	-0.612	0.216	75.0
37	炭化ケイ素 (SiC) #16	13.1	41.0	41.5	(1.32)	-0.880	-0.237	80.0
38	炭化ケイ素 (SiC) #20	11.3	43.0	35.0	(1.48)	-0.998	-0.228	83.0
39	炭化ケイ素 (SiC) #30	14.5	40.0	34.0	(1.53)	-1.100	-0.007	84.0
40	炭化ケイ素 (SiC) #46	1.1	42.0	35.0	(1.46)	-1.398	-0.274	86.0
41	炭化ケイ素 (SiC) #60	2.76	41.0	36.5	(1.49)	-1.360	-0.232	87.0
42	炭化ケイ素 (SiC) #70	1.33	42.0	35.5	(1.41)	-1.377	-0.284	86.0
43	炭化ケイ素 (SiC) #90	7.2	38.0	34.8	(1.41)	-1.444	0.011	87.0
44	炭化ケイ素 (SiC) #100	15.4	39.0	36.0	(1.37)	-1.078	0.011	83.0
45	ケイ砂 GG 58下	9.26	41.5	55.6	(4.18)	-0.524	-0.489	78.0

表1 データーおよび解析結果(つづき)

No.	物 質 名	圧 縮 度	安 息 角	スバチ ュ ラ 角	凝 集 度 (均一度)	主 成 分	第二成分	Carr指数
		P[%]	ϕ [°]	ϕ [°]	S[-]	ζ_1	ζ_2	I_c
46	ケイ砂 GG 1140~1410 μ	9.90	42.0	40.0	(1.09)	-0.972	-0.303	82.0
47	ケイ砂 GG 710~840 μ	12.3	37.0	40.0	(1.09)	-1.195	-0.000	82.0
48	ケイ砂 GG 590 μ 下	15.4	41.0	39.0	(1.80)	-0.864	-0.146	80.0
49	ケイ砂 5号	16.5	38.0	39.0	(1.32)	-1.018	0.015	79.0
50	ケイ砂 6号	16.4	34.0	40.0	(1.62)	-1.230	0.227	80.0
51	ケイ砂 7号	17.8	36.0	40.0	(1.67)	-1.061	0.131	81.0
52	ポリスチレンビーズ 1190~1410 μ	4.6	25.5	11.5	(1.09)	-2.947	1.147	99.0
53	ポリスチレンビーズ 1000~1190 μ	8.05	25.0	6.40	(1.1)	-3.006	1.314	98.0
54	ポリスチレンビーズ 840~1000 μ	4.68	26.0	8.0	(1.09)	-3.013	1.192	99.0
55	ポリエチレンビーズ	2.45	18.5	7.75	(1.78)	-3.534	1.617	99.0
56	ガラスビーズ 201M	3.66	28.5	11.0	(1.26)	-2.808	0.987	99.0
57	ガラスビーズ 705K (105~297 μ)	2.57	27.8	22.0	(1.29)	-2.577	0.791	99.0
58	ガラスビーズ 703K (53 ~210 μ)	6.04	31.0	43.6	(1.44)	-1.658	0.210	88.0
59	ガラスビーズ 733K (44 ~ 88 μ)	9.58	39.5	43.4	(1.66)	-1.027	-0.216	81.0
60	粒状尿素	8.63	29.0	29.5	(1.25)	-2.093	0.629	95.0
61	塩化ビニール粉	18.4	39.0	37.5	(1.53)	-0.933	0.016	81.0
62	トウモロコシ粉	42.5	48.0	92.5	(2.96)	1.986	-1.320	39.0
63	マイロ	29.1	52.0	61.0	(7.5)	0.987	-0.866	59.0
64	大豆カス	12.3	49.0	56.0	(3.72)	0.033	-0.901	72.0
65	アルファルファ	22.1	42.0	64.5	(3.50)	0.169	-0.596	67.0
66	ケイ石粉	30.2	49.0	67.5	(2.11)	0.919	-1.017	59.0
67	フェライト	36.2	49.0	63.3	(1.68)	0.992	-0.886	55.0
68	陶石粉	37.8	51.5	58.5	(1.58)	1.060	-0.915	56.0
69	小 豆	6.36	34.5	25.0	(1.15)	-1.964	0.389	93.0
70	炭酸ソーダ (-42/+150 メッシュ)	1.89	37.5	33.8	(1.83)	-1.670	0.022	88.0
71	豊浦標準砂	0.0	32.0	29.5	(1.40)	-2.195	0.382	94.0
72	重合塩化ビニール	6.3	36.4	31.1	(1.40)	-1.675	0.167	89.0
73	ホワイトアランダム	2.78	39.0	37.1	(1.34)	-1.467	-0.138	88.0
74	ガラス粉	4.18	34.3	31.0	(1.36)	-1.876	0.263	92.5
75	鉄 粉	8.28	38.5	49.6	(1.34)	-0.963	0.312	81.0
76	窯業砂	2.67	36.0	30.4	(1.68)	-1.834	0.177	92.0
77	炭酸ソーダ	3.27	39.6	40.3	(1.97)	-1.312	-0.209	85.0
78	重合塩化ビニール	11.3	40.2	39.5	(5.61)	-0.960	-0.015	80.5
79	ガラス粉	10.5	41.3	38.2	(6.50)	-0.939	-0.025	81.5
80	鉄 粉	10.7	42.5	41.0	(5.30)	-0.804	-0.190	79.0
81	炭酸ソーダ (-14/+20メッシュ)	7.14	34.4	37.1	(2.24)	-1.583	0.194	88.0
82	炭酸ソーダ (-20/+24メッシュ)	1.55	35.6	24.6	(1.81)	-2.055	0.312	93.5
83	炭酸ソーダ (-35/+42メッシュ)	1.34	34.1	22.9	(1.31)	-2.211	0.410	95.0
84	炭酸ソーダ (-42/+48メッシュ)	3.42	34.9	29.2	(1.61)	-1.910	0.268	93.0
85	炭酸ソーダ (-48/+60メッシュ)	2.52	35.3	34.0	(1.32)	-1.787	0.128	90.0
86	炭酸ソーダ (-60/+65メッシュ)	7.36	38.2	46.2	(1.18)	-1.110	-0.240	82.0
87	炭酸ソーダ (-65/+80メッシュ)	12.15	39.4	51.8	(1.18)	-0.721	-0.374	79.0
88	炭酸ソーダ (-80/+100メッシュ)	11.24	36.0	51.6	(1.19)	-0.963	-0.189	81.5
89	窯業砂 (-35/+42)	0.88	35.9	28.2	(1.18)	-1.971	0.192	92.5
90	窯業砂 (-80/+100)	5.56	33.7	28.3	(1.78)	-1.934	0.381	92.0

表1 データーおよび解析結果(つづき)

No.	物 質 名	圧 縮 度	安 息 角	スバチ ュ ラ 角	凝 集 度 (均一度)	主 成 分		Carr指数
		P [%]	φ [°]	ϕ [°]	S [-]	ζ_1	ζ_2	
91	窯業砂 (-150)	7.93	34.7	46.1	(1.67)	-1.296	-0.020	84.0
92	タルク	22.6	37.0	49.0	(8.00)	-0.464	0.168	70.0
93	けい砂	16.0	38.0	46.0	(1.60)	-0.833	-0.124	79.5
94	炭酸カルシウム	0.239	39.0	33.0	(1.77)	-1.658	-0.064	87.0
95	砂	2.26	38.0	31.0	(1.58)	-1.711	0.046	89.5
96	ジルコンサンド	4.72	36.0	30.5	(1.40)	-1.768	0.186	92.0
97	ジルコンサンド	3.50	32.0	29.5	(1.40)	-2.079	0.417	95.0
98	ポリスチレンビーズ	0.0	4.0	12.5	(1.58)	-4.364	2.295	99.0
99	ジルコンサンド	53.0	51.0	79.0	68.8	3.432	1.280	21.0
100	炭酸カルシウム	46.6	44.0	80.0	33.0	2.120	0.288	30.0
101	タルク	45.8	47.0	68.0	68.5	2.636	1.645	38.5
102	亜鉛華	58.4	50.0	70.5	17.2	2.298	-0.306	36.0
103	アタバルガイド	42.8	48.0	85.0	54.6	2.801	0.708	26.0
104	クレー (ハードトップクレー)	45.4	49.0	86.0	33.9	2.569	-0.092	26.0
105	PVC ベーストレジン	30.6	55.0	72.5	19.5	1.778	-0.819	46.0
106	酸化マグネシウム	46.1	44.0	70.5	29.2	1.762	0.340	40.0
107	No.1 ベーストレジン	47.6	66.0	80.5	48.6	3.805	-0.371	18.5
108	No.2 ベーストレジン	50.0	57.0	82.0	25.6	2.930	-0.711	26.0
109	No.3 ベーストレジン	49.3	54.0	79.0	56.8	3.255	0.641	21.0
110	馬鈴しょでんぶん	20.1	40.0	75.5	0.0	0.222	-0.857	60.0
111	ニッカリコ(シリコンコーティングデンプン)	23.0	29.0	43.5	2.0	-1.207	0.513	73.0
112	重質炭酸カルシウム	50.0	48.0	58.0	93.5	3.046	2.742	28.0
113	関電フライアッシュ	34.0	47.0	61.0	12.5	0.946	-0.358	46.0
114	WA 微粉	29.9	52.0	59.0	23.0	1.262	-0.255	52.0
115	石こう	43.3	49.0	69.0	72.6	2.782	1.637	28.0
116	塩化ビニールペーストレジン	40.8	30.0	62.5	59.0	1.099	2.310	39.0
117	消石灰	38.5	49.0	70.0	5.73	1.336	-0.854	41.0
118	(上田石灰フルイ上堆積粉)	44.5	52.0	72.3	17.6	2.015	-0.578	38.0
119	(1次サイクロン)	39.5	54.0	63.0	4.5	1.451	-1.023	41.0
120	(2次サイクロン)	48.1	49.0	60.0	19.5	1.645	-0.054	39.0
121	石松子	24.4	39.0	44.0	0.0	-0.581	-0.113	70.0
122	亜鉛華	43.7	55.0	63.0	63.5	2.811	1.100	26.0
123	タルク	50.0	48.0	65.0	56.0	2.506	1.240	29.0
124	けいそう土	64.0	51.0	80.0	90.9	4.260	2.170	19.0
125	けい石	51.0	55.0	67.0	57.8	3.054	0.885	24.0
126	炭酸カルシウム	46.0	50.0	66.5	59.6	2.607	1.189	28.0
127	石 綿	56.4	43.0	63.0	99.0	3.205	3.181	28.0
128	炭酸カルシウム	54.5	45.0	72.0	77.0	3.083	2.069	29.0
129	炭酸カルシウム	38.0	49.0	63.0	34.5	1.689	0.327	35.5
130	タルク	47.2	50.0	72.0	21.0	2.042	-0.311	36.0
131	けい砂	39.9	48.0	62.0	16.5	1.309	-0.230	38.0
132	けい石	39.2	45.0	67.0	16.5	1.245	-0.173	41.0
133	タルク	53.7	40.0	66.5	25.8	1.593	0.597	41.5
134	炭酸カルシウム	34.0	49.0	54.0	47.3	1.554	0.935	42.0
135	酸化チタン	46.9	43.0	56.5	11.5	0.986	0.049	45.0

表1 データおよび解析結果(つづき)

No.	物質名	圧縮度 $P[\%]$	安息角 $\varphi[^\circ]$	スパチュラ角 $\phi[^\circ]$	凝集度 (均一度) $S[-]$	主成分 ζ_1	第二成分 ζ_2	Carr指数 I_c
136	酸化亜鉛	39.9	43.0	58.5	27.5	1.125	0.518	47.0
137	でんぷん	27.8	46.0	75.0	2.74	0.881	-1.004	51.5
138	炭酸カルシウム	19.0	47.0	57.0	38.9	0.854	0.531	53.0
139	PVA	28.2	40.0	61.0	0.6	0.095	-0.457	59.0
140	ポリエチレン	29.6	43.0	56.5	3.67	0.258	-0.407	59.0

$$r_{\alpha\beta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{\alpha k} x_{\beta k} \quad \dots\dots(3)$$

表1の140×4個のデーターを用いて計算すると次のようになる。

$$[r_{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} 1 & 0.6717 & 0.7896 & 0.7086 \\ & 1 & 0.7810 & 0.4148 \\ & & 1 & 0.4355 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(4)$$

ただし、対称行列であるから対角要素の下半分を省略した。行列(4)からわかるように、圧縮度、安息角、スパチュラ角、凝集度(あるいは均一度)の間には互いに相関がある。この相関行列 r の特性方程式

$$|r - \lambda I| = 0 \quad \dots\dots(5)$$

を解いて、4個の固有値 λ_α を求めると、そのうち最大の固有値から、 n 個の点(4次元空間において表わしたデーターの点)からの垂線の長さの2乗和が最小になるような直線がえられる。数値計算によって、固有値 λ_α と固有ベクトル l_α を求めると次のようになる。

$$\lambda_1 = 2.92 \quad l_1 = (0.546, 0.496, 0.523, 0.427)$$

$$\lambda_2 = 0.696 \quad l_2 = (0.164, -0.456, -0.381, 0.787)$$

$$\lambda_3 = 0.259 \quad l_3 = (-0.444, 0.717, -0.453, 0.289)$$

$$\lambda_4 = 0.125 \quad l_4 = (0.691, 0.177, -0.613, -0.338)$$

$$\dots\dots(6)$$

これらの固有ベクトル l_α が互いに直交していることは容易に確かめられる。すなわち、 l_1, l_2, l_3, l_4 によって4次元の新しい座標系が作られたわけである。(6)式を用いると、主成分 ζ_1 は次のようになる。

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \sum_{\alpha=1}^4 l_{1\alpha} x_\alpha \\ &= 0.546x_1 + 0.496x_2 + 0.523x_3 + 0.427x_4 \quad \dots\dots(7) \end{aligned}$$

この新しい変数 ζ_1 の平均がゼロであることは、各 x_α の平均がゼロであることから明らかである。また、その分散は固有値 λ_1 に等しいことも知られている。データー x_α の全分散は4であるから*、主成分 ζ_1 は全分散の73%(=2.92/4×100%)を説明している。したがって、残り

図1 主成分 ζ_1 とCarrの流動性指数 I_c の関係(ζ_1 の分散は2.92であるが、 $\sqrt{2.92}$ でわれば分散1に標準化できる)

* 4変数 x_α はそれぞれ分散1に標準化しているので、 x_α 全体としての分散(全分散)は4×1=4である。

の3変量 $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ は無視しても、粉体のある特性（仮りに Carr の流動性に相当するものとする）はほとんど表わされることになる。さらに ζ_1 と ζ_2 を用いれば全分散の90%が表現できる。

もちろん、変量 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ は互いに無相関である。

なお、主成分 ζ_1 と変量 x_α の相関係数 $r(\zeta_1, x_\alpha)$ は次式で計算できる。

$$r(\zeta_1, x_\alpha) = 1/\sqrt{\lambda_1} I_{1\alpha} \quad \dots\dots(8)$$

(6) 式を(8)式に代入すると次のように相関係数 $r(\zeta_1, x_\alpha)$ がえられる。

$$\begin{aligned} r(\zeta_1, x_1) &= 0.933 \\ r(\zeta_1, x_2) &= 0.847 \\ r(\zeta_1, x_3) &= 0.894 \\ r(\zeta_1, x_4) &= 0.730 \end{aligned} \quad \dots\dots(9)$$

また(9)式から、主成分 ζ_1 は圧縮度、安息角、スパチュラ角、凝集度あるいは均一度のいずれともある程度相関があることがわかる。特に圧縮度と相関が強いようである。

このことは、圧縮度と Carr の流動性指数の相関が良いという坂下の報告¹²⁾と類似しており、興味深い。以上の解析で得られた主成分 ζ_1 と第二成分 ζ_2 を表1の第7, 8欄に示す。第9欄は文献より取った Carr の流動性指数である。

3. 考 察

前節で圧縮度、安息角、スパチュラ角、凝集度または均一度を互いに相関のない新しい変量 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ に変換することができた。このうち主成分 ζ_1 が全分散の大部分を説明しており、ほかの成分は無視できるようである。ただし主成分 ζ_1 が粉体のどのような特性を示しているのかは、考察しなければならないことである。これに関し(9)式のように主成分と圧縮度などがいずれも正の相関を示したことは重要である。ふつう圧縮度、安息角、スパチュラ角、凝集度あるいは均一度は、それらが大きくなるほど流動性が悪いと考えられるものであり、主成分 ζ_1 は正の大きい値になるほど流動性が悪い粉体であることを示すと考えて良いであろう。したがって、Carrの測定法によるデーターを統計的に検討すれば、(7)式で採点(Carrの方法における採点に相当)するのが妥当であるということになる。図1は主成分 ζ_1 に対し Carr の流動性指数 I_c をプロットしたものである。データーは全体として単調に変化しており、 ζ_1 を決めれば

Carr の流動性指数が決まるようであるから、Carr の採点もそれほど悪くないといえる。しかし、前にも述べたように主成分 ζ_1 は平均がゼロであるから、 $\zeta_1=0$ で $I_c=50\%$ になるような採点の方が好ましいであろう。さらに、 $\zeta_1=0$ に対し、対称な方が望ましいので、同図実線のように正規分布を用いた採点法などが考えられる。なお、参考までに Carr の流動性の判定に対応させて ζ_1 による判定条件を書く次のようになる。

$\zeta_1 < -1.6$	: excellent ($I_c \geq 90$ に対し)
$-1.6 \leq \zeta_1 < -0.6$	: very good ($80 \leq I_c < 90$)
$-0.6 \leq \zeta_1 < 0.1$	: good ($70 \leq I_c < 80$)
$0.1 \leq \zeta_1 < 0.8$	: passable ($60 \leq I_c < 70$)
$0.8 \leq \zeta_1 < 1.8$	: poor ($40 \leq I_c < 60$)
$1.8 \leq \zeta_1 < 3.8$	: very poor ($20 \leq I_c < 40$)
$3.8 \leq \zeta_1$	: very very poor ($0 \leq I_c < 20$)

次に Carr の測定法は凝集度と均一度では少し異なっているの、凝集度を測定されている粉体と均一度を測定されている粉体を区別して成分分析を行なった結果を述べる。均一度が測定されているのは表1のNo.1~No.98の粉体である。これらの粉体について前節と同様の計算を行なった結果は次のとおりである。

平均 ; $\bar{P}=14.4[\%]$ 標準偏差 ; $\sigma_P=10.5$

$\bar{\varphi}=39.1[^\circ]$ $\sigma_\varphi=7.54$

$\bar{\phi}=46.2[^\circ]$ $\sigma_\phi=18.0$

$\bar{S}=2.24[^\circ]$ $\sigma_S=1.51$

相関行列 ;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.6317 & 0.8023 & 0.2912 \\ & 1 & 0.7714 & 0.3515 \\ & & 1 & 0.3938 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

固有値 ; $\lambda_1=2.69$

$\lambda_2=0.793$

$\lambda_3=0.366$

$\lambda_4=0.155$

固有ベクトル ; $I_1=(0.529, 0.530, 0.572, 0.335)$

$I_2=(-0.284, -0.140, -0.156, 0.936)$

$$l_3 = (-0.639, 0.761, -0.061, -0.0903)$$

$$l_4 = (-0.481, -0.347, 0.803, -0.0642)$$

主成分 ; $\zeta_1 = 0.529 x_1 + 0.53 x_2 + 0.572 x_3 + 0.335 x_4$

相関係数 ; $r(\zeta_1, x_1) = 0.866$

$$r(\zeta_1, x_2) = 0.868$$

$$r(\zeta_1, x_3) = 0.938$$

$$r(\zeta_1, x_4) = 0.550$$

主成分は全分散の67.2%を説明している。次に凝集度が測定されている粉体は表1の No.99~No.140 まで、これらについて同様の計算を行なうと次のようになる。

平均 ; $\bar{P} = 41.9[\%]$ 標準偏差 ; $\sigma_P = 10.5$

$$\bar{\varphi} = 47.5[^\circ] \quad \sigma_\varphi = 6.54$$

$$\bar{\phi} = 67.1[^\circ] \quad \sigma_\phi = 9.79$$

$$\bar{S} = 36.1[-] \quad \sigma_S = 27.7$$

相関行列 ;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.3492 & 0.4642 & 0.6195 \\ & 1 & 0.4920 & 0.2191 \\ & & 1 & 0.2473 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

固有値 ; $\lambda_1 = 2.21$

$$\lambda_2 = 0.945$$

$$\lambda_3 = 0.517$$

$$\lambda_4 = 0.330$$

固有ベクトル ; $l_1 = (0.566, 0.453, 0.499, 0.475)$

$$l_2 = (0.321, -0.565, -0.440, 0.620)$$

$$l_3 = (-0.163, 0.688, -0.666, 0.238)$$

$$l_4 = (0.742, 0.0450, -0.337, -0.578)$$

主成分 ; $\zeta_1 = 0.566 x_1 + 0.453 x_2 + 0.499 x_3 + 0.475 x_4$

相関係数 ; $r(\zeta_1, x_1) = 0.841$

$$r(\zeta_1, x_2) = 0.673$$

$$r(\zeta_1, x_3) = 0.742$$

$$r(\zeta_1, x_4) = 0.705$$

主成分は全分散の55.2%を説明している。以上の結果から、凝集度と均一度は同じ種類のデーターとして扱った方がよいようである。ただし、すべてのデーターは(2)式

で行なったように標準化しておかねばならない。

4. おわりに

成分分析によると、4種のデーターからただ一つの指数(流動性指数)を与えた Carr の方法が統計的にはある程度意味を持っているといえる。すなわち、文献より引用したデーターの全分散のうち73%は主成分のみで表わされ、主成分と Carr の指数にはほぼ1対1の関係が成り立っている。もちろん、ここで扱った流動性とは Carr の意味においてであり、流動性とは何か、流動性を表わすにはどのような測定法を用いればよいかは、別に検討しなければならないことである。しかし、そのような検討を進める過程においても、成分分析は有効な方法であると思われる。なお、変量は150次元(京大大型計算機による)まで扱うことができる。

〔付記〕筆者の一人(増田)に成分分析への興味を与えて頂いた京大工学部数理工学教室池田峰夫教授に謝意を表します。

Appendix 主成分分析

本文(2)式のように標準化した p 次元変量 x を考える。これらは p 次元空間内の点として表わされる。座標軸を x として、その中に次式で与えられる直線を引く。

$$\frac{x_1 - m_1}{l_1} = \frac{x_2 - m_2}{l_2} = \dots = \frac{x_p - m_p}{l_p} \quad \dots (A.1)$$

ここで、 l は方向余弦であり、次式を満足する。

$$\sum_{i=1}^p l_i^2 = 1 \quad \dots (A.2)$$

n 個の点からこの直線に下した垂線の長さの2乗和を nT とすると、次式がえられる。

$$nT = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^p (x_{ij} - m_i)^2 - \left\{ \sum_{i=1}^p l_i (x_{ij} - m_i) \right\}^2 \right) \quad \dots (A.3)$$

nT の最小値は、 m に関する偏微分が0となるときにえられる。すなわち、

$$-\sum_{j=1}^n (x_{ij} - m_i) + \sum_{j=1}^n l_i \sum_{i=1}^p l_i (x_{ij} - m_i) = 0 \quad i=1, 2, \dots, p \quad \dots (A.4)$$

x は標準化されているので $\sum_j x_{ij} = 0$ であり、(A.4)式は次のようになる。

$$\frac{m_i}{l_i} = \sum_{i=1}^p l_i m_i = \text{一定} \quad \dots (A.5)$$

したがって、直線 (A・1) は原点をとおり、すべての m を 0 と考えることができる。 $\sum_j x_{ij}^2 = n$ であるから、

(A・3) 式は次のようになる。

$$nT = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^p x_{ij}^2 - \left(\sum_{i=1}^p l_i x_{ij} \right)^2 \right) \\ = np - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^p l_i x_{ij} \right)^2 \quad \cdots \cdots (A \cdot 6)$$

さて、拘束条件 (A・2) のもとで、 T を最小にするような l を求めよう。 λ をラグランジュの未定乗数とすると、次式がえられる。

$$-\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{kj} \left(\sum_{i=1}^p l_i x_{ij} \right) + \lambda_k = 0 \\ k=1, 2, \cdots, p \quad \cdots \cdots (A \cdot 7)$$

この式から相関行列 r の特性方程式が次のようにえられる。

$$|r - \lambda I| = 0 \quad \cdots \cdots (A \cdot 8)$$

ここで、 I は単位行列である。すなわち相関行列 r が与えられると、一般に p 個の固有値 λ がえられ、その各々に対応して固有ベクトル l が決まる。この固有ベクトルにおいて T は極値を取り、しかも (A・7) 式および (A・6) 式より次の関係がえられる。

$$T = p - \lambda \quad \cdots \cdots (A \cdot 9)$$

すなわち、最大の固有値に対して、各点からの距離の 2 乗和が最小になるような直線がえられる。

引用文献

- 1) Carr, R. L.: *Chem. Eng.*, **72**, 69 (Feb 1, 1965)
- 2) Carr, R. L.: *Chem. Eng.*, **72**, 163 (Jan 18, 1965)
- 3) Carr, R. L.: *Chem. Eng.*, **76**, 7 (Oct 13, 1969)
- 4) 矢野ら: 粉碎, **16**, 96 (1971)
- 5) 三輪, 竹内: 粉碎, **15**, 8 (1970)
- 6) 鈴木, 丸子: 粉碎, **18**, 80 (1973)
- 7) 佐藤ら: 粉体工学研究会誌, **9**, 90 (1972)
- 8) Orr, C. Jr. and K. Iinoya: 粉体工学研究会誌, **11**, 英文臨時号, 15 (1974)
- 9) 横山: 粉碎, **14**, 102 (1969)
- 10) Kendall, M. G.: "A Course in Multivariate Analysis", Charles Griffin & Co. Ltd, London (1968)
- 邦訳: 浦, 竹並: "多変量解析の基礎", サイエンス社 (1972)
- 11) 矢野ら: 粉体工学研究会誌, **9**, 83 (1972)
- 12) 坂下: 化学工学, **32**, 1046 (1968)

Authors' abstract

Statistical Analysis of Carr's Flowability Index

by

Hiroaki MASUDA, Hideto YOSHIDA and Koichi IINOYA
(Dept. of Chem. Eng., Kyoto Univ.)

Among many reports about Carr's flowability index, very few statistical studies have been found. This paper analyses Carr's flowability index by use of principal component analysis. Carr's flowability index has been related to a principal component. It is found that the greater the principal component the lower the flowability index of powders. Therefore, Carr's flowability index has some statistical meaning. The principal component accounts for the greater part of the total variation, and it has some correlation with the compressibility, angle of repose, angle of spatula, and the cohesion or uniformity of powder.

List of figures and table

Table 1 Data and their analyzed results

Fig. 1 The Relationship between Carr's Flowability, Index I_c and the principal component c_1