Soft Ground 上を転動する車輪が受ける抵抗の基礎研究

(電気式自動測定法による実験結果と高橋の理論式)

Basic Studies on the Resistance Received by a Wheel Rolling on Soft Ground (The Results of Experiments made by Means of the Electrical, Automatic Measuring Method and the Takahashi's Theoretical Equation)

高橋 清*
Kiyoshi Takahashi

1. はじめに

本研究報告では、まず電気式真島-高橋の車輪の転動抵抗自動測定装置を用いて得られた実験結果を考察する。次にその考察によって Soft Ground (S.G.) 上を転動する車輪が受ける合成抵抗の大きさ R 、その水平成分 H および鉛直成分 V 、 $\vec{R}$ の方向 θ 、着力点 $Q(\bar{X}, \bar{Y})$ の座標 $\bar{X}$ および $\bar{Y}$ 、また転動車輪の駆動トルク M などと車輪の幅 b 、直径 $2r$ 、最下端の沈降の深さ y_0 、また S.G. 試料の特性定数 k, n 、摩擦係数 μ などとの関係を示す高橋の理論式を導き、それらについて述べる。また、この理論式をベクトル的に表示すると実際の応用に便利なことを説明する。さらにこれらの式から、車輪が牽引される場合と、駆動によって転動する場合とでは $R, H, V, Q(\bar{X}, \bar{Y})$ などが異なることがわかった。またこの単車輪についての理論式をもとに、S.G. 上を走行する車両の受ける転動合成抵抗の理論式の誘導や、この研究の応用面についても述べる。

2. 車輪の転動抵抗に関する実験結果の考察と高橋の理論式

車輪が S.G. 上を転動運動するとき、それが牽引される場合と駆動する場合とでは、車輪が S.G. から受ける合成抵抗の大きさ、方向、着力点などは、一般に異なる。その相違は、Fig. 1 に示すように、車輪と S.G. との間の摩擦力 f の大小によって生ずる。これに関する研究はいまだ明らかにされていないので、この研究に関する前報の実験結果を用いて、以下に述べるような車輪の転動合成抵抗に関する考察をする。

Fig. 1 S.G. 上における車輪の転動抵抗

2.1 車輪の転動合成抵抗に関する高橋の理論式

車輪の転動合成抵抗を実際の応用に対して、より理解しやすくするためには、その抵抗をベクトル的に表示するとよいことがわかる。そのためには、車輪の転動状態、形状などによって変化する転動合成抵抗の大きさ R 、その水平成分 H 、鉛直成分 V 、 $\vec{R}$ の方向 θ 、着力点 $Q(\bar{X}, \bar{Y})$ などの軌跡を求めなければならない。このために著者はこれらに関する基礎研究を実験および理論の両面から行ない、上記のものをそれぞれ示す (1), (2), (9), (11), (12), (13), (14), (15), (16) 式などの理論式を実験をもとに導いた (これらの車輪の転動合成抵抗に関する各式は、今後この種の研究を押し進める場合、その解析にしばしば用いられるものと思われる。そこでこれらの式を、特に高橋の理論式と明記することにした。)。本報告においては、これらの式の誘導に関しての複雑な計算過程を省き、その導かれた結果の式のみを示し、特にこの車輪の転動合成抵抗の各式の意味

昭和50年2月26日受理

* 芝浦工業大学電子工学科計測制御研究室 (〒108 港区芝浦 3-9-14)
TEL 03-452-3201

をそれぞれの表示されたグラフで説明するとともに、応用において車輪の転動合成抵抗に関するこの理論式の理解を容易にすることを本研究報告の主な目的とした。ただし、この理論式は転動車輪の側面の S. G. および車輪の前面に盛り上がる S. G. などによって生ずる抵抗などの影響を考慮していない車輪の転動合成抵抗の近似式である。したがって、この式の実際の応用においては適当な補正を必要とする。

2.1.1 車輪の転動合成抵抗の水平成分 H 、鉛直成分 V 、大きさ R 、方向 θ 、着力点 $Q(\bar{X}, \bar{Y})$ および駆動トルク M

車輪の半径 r に比して、S. G. 面から車輪最下端までの沈降の深さ y_0 が小さい場合、車輪の転動合成抵抗の水平成分 H 、鉛直成分 V 、大きさ R 、方向 θ 、着力点 $Q(\bar{X}, \bar{Y})$ および駆動トルク M などの一般式を導く（実験の結果、この場合の車輪の側面の抵抗は円周面の抵抗に比して充分小さいことが確かめられたのでこれを無視する。）。Fig. 1 に示すように、S. G. に接触する円周面の単位面積当り S. G. より受ける圧力 p 、その作用線と車輪の中心を通る鉛直線とのなす角を α 、車輪の半径を r 、幅を b とすれば、合成抵抗 $\bar{R}$ の水平成分 H 、鉛直成分 V は次の積分で与えられる。

$$H = \int_0^{\alpha_0} (p \sin \alpha - f \cos \alpha) b r d\alpha \quad \dots\dots(1)$$

$$V = \int_0^{\alpha_0} (p \cos \alpha + f \sin \alpha) b r d\alpha \quad \dots\dots(2)$$

ここで圧力 p は一般に与えられていない。そのため車輪の転動合成抵抗に関する理論式を導く過程においてこれを積分することはできないが、 p について適当な仮定をおくことにより、理論式 (1) および (2) より得た結果を前報の実験式 (3) および (4) と比較することができる。このように理論式を実験式と比較することは、導かれた理論式、また間接的に p についての仮定などの信ぴょう性を確かめるためである。ここで、車輪の荷重 V と車輪最下端の沈降の深さ y_0 との間に成立する前報で報告した実験式

$$V = k_2 y_0^{n_2}$$

より次元的に類推して、沈降した車輪の任意面において S. G. から受ける面圧 p とその面の沈降の深さ y との間に

$$p = k y^{n_1} \quad \dots\dots(3)$$

の関係が成立するものと仮定すれば、牽引される車輪の場合には、(1) および (2) 式をそれぞれ前報の実験式 (3) および (4) と同形に導けることが次の説明からわかる。

i) 合成抵抗の水平成分および鉛直成分

(1) 式および (2) 式を積分すると (4) 式および (5) 式が得られる。

$$H = k b \left\{ \frac{y_0^{n_1+1}}{n_1+1} - \mu \frac{(3-n_1)\sqrt{2r}}{3} y_0^{n_1+1/2} \right\} \quad \dots(4)$$

$$V = k b \left\{ \frac{(3-n_1)\sqrt{2r}}{3} y_0^{n_1+1/2} + \mu \frac{y_0^{n_1+1}}{n_1+1} \right\} \quad \dots\dots(5)$$

ただし、 $f = \mu p$ 。 μ は車輪面と S. G. 面との間のすべりによる動摩擦係数である。また牽引されて転動する車輪の合成抵抗式を求める前報の「牽引される車輪のすべり」に関する実験結果より、車輪と S. G. 面との間のすべりの摩擦係数 f は、合成抵抗の大きさ R に対して無視してもよいほど小さいので、 R の成分 H および V の (4) 式および (5) 式の μ を含む第 2 項を無視して表わすと、

$$H = k b \frac{y_0^{n_1+1}}{n_1+1} \quad \dots\dots(6)$$

$$V = k b \frac{(3-n_1)\sqrt{2r}}{3} y_0^{n_1+1/2} \quad \dots\dots(7)$$

となる。これらの式は前報の実験式 (3) および (4) と同形となるから、(3) 式における $p = k y^{n_1}$ という仮定は無理ではなかった。そこで (6)、(7) 式を、これと同形の実験式 (3)、(4) と比較することによって、次に示す (8) 式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= k b \frac{1}{n_1+1} \\ k_2 &= k b \frac{(3-n_1)\sqrt{2r}}{3} \\ n_1 &= n+1 \\ n_2 &= n + \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(8)$$

また (6) と (7) 式から y_0 を消去することによって (9) 式が得られる。

$$H = \frac{3^{2n+2/2n+1}}{(n+1)(k b)^{1/2n+1}(2r)^{n+1/2n+1}(3-n)^{2n+2/2n+1}} V^{2n+2/2n+1} \quad \dots\dots(9)$$

Fig. 2 牽引される車輪の転動合成抵抗の成分 H と V との関係

この面圧 p の式を用いて導かれた車輪の転動合成抵抗に関する高橋の理論式の信ぴょう性を (8) 式を用いて以下のように説明できる。この式の信ぴょう性を裏付けるものとしてまずあげられることは、合成抵抗の水平成分 H と鉛直成分 V との関係を示す理論式 (9) の計算値が測定値にほぼ一致することで、これは Fig. 2 のグラフから明らかである。またこの式の信ぴょう性をさらに高めるものとして考えられることは、パラメータ b , $2r$, k , n などの関数として示されている H , V の理論式などが実験結果によって裏付けされていることである。このことは、(8) 式を用いて次のように説明できる。ただし、(8) 式における左辺の k_1 , k_2 , n_1 , n_2 などは、車輪の幅 b , 直径 $2r$, 走行速度 v , S.G. 試料の乾湿の程度や粒径 m などをパラメータとした前報の Fig. 12 から Fig. 23 までに示されている実験定数である。これら前報に示されている各図の実験グラフから、 k_1 は Fig. 12 から車輪の幅 b のみに、 k_2 は Fig. 13, Fig. 15 などから車輪の幅 b , 直径 $2r$ などに依存することがわかる。なお、 k_1 , k_2 などは実測値を示す前報の Fig. 16, Fig. 17, Fig. 18, Fig. 19 などから車輪の速度 v , また前報の Fig. 22, Fig. 23 などから S.G. 試料の粒径などには依存しないことが認められる。さらに n_1 , n_2 などは b , $2r$, v , m などにはほとんど無関係な定数であることが、前報の実測値を示す Fig. 12 から Fig. 23 までのグラフから認められる。ただし、S.G. の試料が自然乾燥状態の場合と、水でぬれた状態の場合とでは、車輪の形状が同一でも k_1 , k_2 などの値はわずかに変化することが前報の実験結果の Fig.

Fig. 3 牽引される車輪の y_0 と V との関係

20, Fig. 21 からわかる。以上述べた実測値 k_1 , k_2 , n_1 , n_2 などの特性を、(8) 式の右辺と対比させて考えると、実験式および理論式の両者は同じ特性であることがわかる。以上に述べたように測定値との比較のほかには実験のパラメータによる影響の解析をも考慮することによって高橋の理論式の信ぴょう性はより確かなものであることがわかった。そこで、理論式に含まれている実験定数 k , n などの求め方を、(7) 式や Fig. 3 を用いて次に述べる。

(3) 式 $p = ky^*$ の k および n の値を実験結果から求めるには、次の2通りの方法が考えられる。その第1の方法は、 H と y_0 との測定値と (6) 式を用いて求める方法であり、第2の方法は、 V と y_0 との測定値と (7) 式を用いて求める方法である。しかし、(6) 式は車輪が S.G. から受ける合成抵抗の水平成分を表わしているが、測定値はこのほかに車輪の前方に多少盛り上がる S.G. による抵抗も含んでいるので、 H と y_0 の測定値と (6) 式より k , n の値を求めることは適当ではない。それに対し、荷重 V による車輪の沈降の深さ y_0 の測定値は、車輪の前面に盛り上がる S.G. にはほとんど影響されていないので、 V と y_0 の広範囲な測定値と (7) 式により k および n の値を求めた。そこで最小自乗法により求めたこの S.G. 試料の k , n の値は次のようになった。

$$\left. \begin{array}{l} k=0.1 \\ n=1/3 \end{array} \right\} \dots\dots (10)$$

Fig. 3 はこの関係を示す。

ii) 合成抵抗の大きさ、方向

駆動する車輪の合成抵抗の大きさ R は、(6), (7) 式より次のように示される。

$$R = kb(1+\mu^2)^{1/2} \sqrt{\left(\frac{y_0^{n+1}}{n+1}\right)^2 + \left[\frac{(3-n)\sqrt{2r}}{3} y_0^{n+1/2}\right]^2} \quad \dots\dots (11)$$

また合成抵抗の向きを示す角度 θ は、車輪の転動合成抵抗の着力点を原点とし、車輪の走行方向の水平軸に対して反対向きの水平軸と $\vec{R}$ との狭角とする。

$$\theta = \tan^{-1} \frac{V}{H} = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{(3-n)\sqrt{2r}}{3} + \mu \frac{y_0^{1/2}}{n+1}}{\frac{y_0^{1/2}}{n+1} - \mu \frac{(3-n)\sqrt{2r}}{3}} \right) \quad \dots\dots (12)$$

$$\bar{X} = \frac{kb y_0^{n+1} \left\{ \left[\frac{r}{n+1} - \frac{y_0}{(n+1)(n+2)} \right] + \mu \cdot 2\sqrt{2r} \left(\frac{1}{3} - \frac{n}{5} \right) y_0^{1/2} \right\}}{kb y_0^{n+1/2} \left[\frac{(3-n)\sqrt{2r}}{3} + \mu \frac{y_0^{1/2}}{n+1} \right]} \quad \dots\dots (13)$$

$$\bar{Y} = \frac{kb y_0^{n+1/2} \left\{ \left[\frac{r}{n+1} - \frac{y_0}{(n+1)(n+2)} \right] y_0^{1/2} - \mu \sqrt{2r} \left[\frac{(3-n)r - y_0}{3} \right] \right\}}{kb y_0^{n+1/2} \left[\frac{y_0^{1/2}}{n+1} - \mu \frac{(3-n)\sqrt{2r}}{3} \right]} \quad \dots\dots (14)$$

しかし、この合成抵抗の着力点 $Q(\bar{X}, \bar{Y})$ の理論式の適正さを直接実験によって確かめる方法はない。しかし、後述するように i) で述べた H, V の理論式と、ここで述べている合成抵抗の着力点 $Q(\bar{X}, \bar{Y})$ の座標 $\bar{X}, \bar{Y}$ などの理論式を用いて、それから導かれた車輪が駆動によって転動走行する場合の駆動トルク M を示す理論式 (15) の計算値を実測値と比較することができる。このように両者のトルク M を比較検討することによって、iii) の場合の車輪の転動合成抵抗の着力点の理論式をはじめとして、駆動によって転動走行する車輪の転動合成抵抗などの理論式の信ぴょう性は確かめられる。

iv) 転動車輪の駆動トルク

車輪が S.G. 上を駆動走行するときは、車輪が接触する S.G. 面から面圧を受けると同時に、すべりによる摩擦力の影響を受ける。そのため合成抵抗の方向は、車輪に向わない。(4), (5), (13), (14) などの各式から、駆動トルク M は次式のように与えられる。ただし、 $n=1/3$ とする。

$$M = \bar{X} \cdot V - \bar{Y} \cdot H = kb\sqrt{2r} \mu \left(\frac{8}{9}r + \frac{1}{5}y_0 \right) y_0^{5/6} \quad \dots\dots (15)$$

動摩擦係数 μ の決定：転動車輪が駆動により走行する場合、 μ の値は k, n の値が一定であるから、車輪の直径 $2r$ 、幅 b が与えられるとき次式により求めることが

R, θ は (11), (12) 式からわかるように、車輪の直径 $2r$ 、沈降の深さ y_0 、動摩擦係数 μ などによって変る。

iii) 合成抵抗の着力点

実験結果の考察によって信ぴょう性が裏付けされている i) で述べた H, V の理論式を基礎として導かれた合成抵抗の着力点 $Q(\bar{X}, \bar{Y})$ の座標 $\bar{X}, \bar{Y}$ に関する理論式 (13), (14) は、 H, V の理論式の場合と同様に、信ぴょう性が得られるはずである。

できる。

$$\mu = \frac{M}{kb\sqrt{2r} \left(\frac{8}{9}r + \frac{1}{5}y_0 \right) y_0^{5/6}} \quad \dots\dots (16)$$

M と y_0 の実測値から、平均粒径 0.026 cm の自然乾燥状態の川砂を S.G. の試料とした場合、S.G. 面との間における μ の値を求めてみると、ラワン製円柱形車輪の場合 0.4、磨かれた鋼鉄製円柱形車輪の場合 0.32 が得られた。

2.1.2 転動合成抵抗の着力点と車輪の幅、直径、沈降の深さなどとの関係

理論式 (13), (14) から、牽引される場合の車輪の転動合成抵抗の着力点 $Q(\bar{X}, \bar{Y})$ は、車輪が駆動する場合の着力点 Q' と異なり、さらに両者の場合とも着力点の座標 $\bar{X}, \bar{Y}$ は車輪の幅 b 、直径 $2r$ 、車輪の沈降の深さ y_0 、荷重 V などによって変化することがわかる。これらのことを次に示す Fig. 4 から Fig. 9 を用いて説明する。

まず車輪が駆動する場合は、着力点の座標 $\bar{X}, \bar{Y}$ と車輪の幅、直径、沈降の深さ、荷重などの関係は、それぞれ Fig. 4, Fig. 5, Fig. 6-a, Fig. 6-b など示される。

次に、車輪が牽引される場合は、着力点の座標 $\bar{X}, \bar{Y}$ と車輪の幅、直径、沈降の深さなどの関係は、それぞれ

Fig. 7, Fig. 8, Fig. 9 などで示される。これらのグラフから、着力点 $Q(\bar{X}, \bar{Y})$ は車輪の幅、直径、沈降の深さ、荷重などの変化によって連続した軌跡を描くことがわかる。さらにその軌跡は、車輪が牽引される場合と、駆動によって走行する場合とは異なることが、2.1.6 の Fig. 18 の例からも示される。

2.1.3 転動合成抵抗のベクトル的な表示における水平成分 H と鉛直成分 V との関係

車輪または車両などの動力用最小消費エネルギーに対する最適な車輪および車両などの構造設計を考慮することは、工学上重要なことである。特に最近の世界的なエネルギー源の制約と相まって、硬い路面に比べてエネルギーの消費量が著しく大きい S.G. 上を、転動する車輪

Fig. 4 駆動する車輪の b と $\bar{X}, \bar{Y}$ との関係

Fig. 5 駆動する車輪の $2r$ と $\bar{X}, \bar{Y}$ との関係

を用いなければならない交通機関においては、このことはとりわけ注目すべき課題である。この目的のために、高橋の理論式を拡張し、車輪の転動状態、直径、幅などをパラメータとしてベクトル的に表示した。

車輪が駆動される場合、 H の絶対値 $|H|$ を H_D とする。また、牽引される車輪において動力用消費エネルギーを小さくするためには、 H の値が小さいほどよいことが次の説明からわかるが、この H の値を H_P としておく。すなわち、車輪が駆動によって走行する場合、その向きと車輪の駆動に対しその反作用として生ずる車輪の転動合成抵抗の水平成分 H の向きが同一となること、車輪の牽引出力を得るために必要な条件である。このとき、転動合成抵抗の向きを示す角度 θ は、2.1.1 の ii) 項で定義されている。また、牽引される車輪の場合は、牽引力に対し転動合成抵抗の水平成分 H は反作用

Fig. 6-a 駆動する車輪の b_0 と $\bar{X}, \bar{Y}$ との関係

Fig. 6-b 駆動する車輪の V と $\bar{X}, \bar{Y}$ との関係

Fig. 7 牽引される車輪の b と $\bar{X}, \bar{Y}$ との関係

Fig. 9 牽引される車輪の y_0 と $\bar{X}, \bar{Y}$ との関係

Fig. 8 牽引される車輪の $2r$ と $\bar{X}, \bar{Y}$ との関係

であり、牽引力の大きさと H の大きさは等しい、ただし θ の規約は駆動の場合と同じである。さて、車輪の転動抵抗のベクトル的な表示から、最適な車輪の構造設計に関する検討をする場合には、一般に条件によって変化する転動抵抗の着力点 $Q(\bar{X}, \bar{Y})$ を一点に重ねて、車輪の条件や S.G. などの状態によって変化する H の大きさを比較検討すると、より容易に理解できるものと思われる。ここで駆動および牽引される異なる形状の車輪の転動合成抵抗の着力点 $Q(\bar{X}, \bar{Y})$ を転動合成抵抗の水平成分 H と鉛直成分 V の直角座標軸の原点に重ねて、ベクトル的に表示すると車輪の幅 b をパラメータとした場合が Fig. 10 であり、また車輪の直径 $2r$ をパラメータとした場合が Fig. 11 で示される。

i) 車輪の幅 b をパラメータにした場合の転動合成抵抗の水平成分 H と鉛直成分 V との関係

Fig. 10 車輪の転動合成抵抗の成分 V と H との関係 (パラメータ: b)

Fig. 10 からわかることは、同一荷重 V において車の幅 b を増すほど、駆動する車輪の H すなわち H_0 が大きくなり、かつ牽引される車輪の牽引抵抗は小さくなることである。この Fig. 10 で示されるように車輪の転動合成抵抗をベクトル的に表示する利点は、所要の荷重 V が与えられた場合、 V 軸上にその大きさをとって、その点を通り H 軸に平行な直線を引き、各パラメータによる曲線との交点 a, b, c などに対し原点から向うベクトルを示せば、それが交点の条件の車輪の転動合成抵抗を示すことがただちにわかることである。さらにパラメータに依存する各交点における H の大きさを比較することによって、一定荷重のもとにおける駆動される場合の H_0 、また牽引される場合の消費エネルギーに比例する抵抗などの大小が図からただちに知れることである。

ii) 車輪の直径 $2r$ をパラメータとした場合の転動合

Fig. 11 車輪の転動合成抵抗の成分 V と H との関係 (パラメータ: $2r$)

成抵抗の水平成分 H と鉛直成分 V との関係

Fig. 11 からわかることは i) の場合と同様に、同一荷重 V において車輪の直径を増すほど駆動する車輪の H_D が大きくなり、かつ牽引される車輪の牽引抵抗は小さくなることである。さらにある所要の荷重の大きさが与えられたとき、 V 軸上にその値をとって、その点を通して H 軸に平行な直線を引き、各パラメータによる曲線との交点 a, b, c などを求め、そして原点からその交点に向うベクトルで駆動される場合および牽引される車輪の場合の H の大小を比較検討することが、i) の場合と同じくできる。

iii) 最適な車軸の支えホークの傾きについて

車軸のまわりに自由に回転できる車輪において、その車軸を保持するホークの転動合成抵抗に対する最適な角について以下に述べる。

S.G. 上における車輪が受ける転動合成抵抗の方向 (Fig. 1 θ) のとその車輪を車体に固定するためのホークの傾き角が一致しない場合は、一般にホークは車体と接点のまわりにモーメントを受ける。したがってホークはたわみ、著しい場合には破損する。ホークの方向と転動合成抵抗の方向が一致する場合には、モーメントは生じない。この状態が事実上望ましい。転動合成抵抗は、車輪の形状および速度、S.G. の状態、荷重によって変化するため、最適な支えホークの傾き角について以下に述べる。

a) 車輪の半径と転動合成抵抗との関係

車輪の半径 r の増加とともに、転動合成抵抗 $\vec{R}$ の傾き角は、実験の結果 exp. 的に増加することが知れた。このことは Fig. 11 にも示されている。これより車輪の半径を増すとともに、支えホークの角度も増加させた方が良

い。

b) 車輪の幅と転動合成抵抗との関係

Fig. 10, Fig. 12 の曲線 I に示されるごとく、車輪の幅の増加にともなって、 $\vec{R}$ の水平成分 H は exp. 的に減少している。すなわち転動合成抵抗の大きさ R の値も、荷重が一定であるため、同様な傾向で減少する。これより、車輪の幅を増加させた場合においても、支えホークの保持角度は増加させた方がよい。

c) 荷重と転動合成抵抗との関係

同一の車輪において荷重を増大させた増合、Fig. 10 および Fig. 11 より支えホークの傾き角は減少させる必要がある。

また、車輪の幅 b および $2r$ と転動合成抵抗の水平成分 H 、方向 θ 、大きさ R などの関係を、合成抵抗に關する高橋の理論式より導き下記に詳述する。

2.1.4 車輪の幅と転動合成抵抗の水平成分、方向、大きさなどの関係

i) 車輪の幅と合成抵抗の水平成分

車輪の幅 b の変化に対する H の値は、Fig. 12 のグラフで示される。この b - H 曲線から、車輪が牽引される場合は、車輪の幅 b を増すと車輪の走行抵抗となる H の値は小さくなる。このことから走行用消費エネルギーが、 b の増加につれて節約できることがわかる。また車輪が駆動によって転動走行する場合、牽引の場合とほぼ同様の傾向が Fig. 12 のグラフからわかる。他方、駆動される車輪の場合、 b の増加にしたがって駆動トルク M の値が減少することが後述する Fig. 19 のグラフからわかるので、S.G. 上を駆動により走行する車輪の消費エネルギーをできるだけ小さくし、かつその車輪の

Fig. 12 転動車輪の b と H との関係

H_D をできるだけ大きくするための車輪の構造設計には、車輪の幅 b を増すとよいことが容易にわかる（ただし、車輪の幅 b の増加によって、車輪の重量は変化しないものと仮定する。）。

ii) 車輪の幅と合成抵抗の方向

車輪の転動合成抵抗の方向 θ は、 $\theta = \tan^{-1}(V/H)$ で示されるので、 b の変化に対する θ の値を図示すると、**Fig. 13** のようなグラフで示される。すなわち、駆動、牽引いずれの場合でも車輪の幅 b の増加にしたがって、ベクトル R の角度 θ は漸次増大することがわかる。

Fig. 13 転動車輪の b と θ との関係

iii) 車輪の幅と合成抵抗の大きさ

Fig. 12 からわかるように、一定荷重の大きさ V に対し、 b の増加とともに H の値が変化するので、車輪が駆動される場合および牽引される場合の b の変化に対

Fig. 14 転動車輪の b と R との関係

する転動合成抵抗の関係は、**Fig. 14** のようなグラフで示される。

2.1.5 車輪の直径と転動合成抵抗の水平成分、方向、大きさなどの関係

S. G. 上で車輪が駆動によって転動する場合、直径 $2r$ の増加にしたがって牽引出力、また牽引される車輪の場合は走行抵抗がどのように変化するかを調べることは、動力用消費エネルギーの問題から工学上重要なことである。

i) 車輪の直径と合成抵抗の水平成分

Fig. 15 のグラフは、牽引および駆動する場合の車輪の直径 $2r$ と、転動合成抵抗の水平成分 H との関係を示すものである。図からわかるように、車輪の直径の増加に対し、車輪が駆動走行する場合は牽引出力が増大する。また牽引される場合には、動力用消費エネルギーに比例する牽引抵抗が減少することが認められる。また牽引される場合、車輪の転動合成抵抗に関する高橋の理論式の計算値が測定値にほぼ等しいことが **Fig. 15** から認められる。しかし、車輪が駆動走行する場合、その転動合成抵抗の水平成分 H の値を実測する適当な方法が得られないので、この場合の高橋の式の計算値を実測値と比較検討することはできなかった。

ii) 車輪の直径と合成抵抗の方向

一定荷重の大きさ V に対し、車輪の直径 $2r$ の増加とともに H の大きさが駆動、牽引いずれの場合も **Fig. 15** のように変化することから、車輪の直径 $2r$ の変化に対する転動合成抵抗の方向 θ は、**Fig. 16** のグラフのように示される。

iii) 車輪の直径と合成抵抗の大きさ

Fig. 15 転動車輪の $2r$ と H との関係

Fig. 16 転動車輪の $2r$ と θ との関係

Fig. 17 転動車輪の $2r$ と R との関係

Fig. 15 から、合成抵抗の大きさ $R(\sqrt{H^2 + V^2})$ は、車輪の直径 $2r$ の増加とともに変化することがわかる。この $2r$ と R の関係を牽引、駆動の両者の場合について示したものが Fig. 17 に示されているグラフである。

2.1.6 転動車輪の合成抵抗のベクトル表示

車輪が S.G. 上を転動するとき、荷重 V の大きさを漸次変化させることによって転動合成抵抗の大きさ R 、方向 θ 、着力点 $Q(\bar{X}, \bar{Y})$ などがどのように変わるかを転動合成抵抗に関する高橋の式を用いてベクトルの表示したものが Fig. 18 のカーブ I および II である。カーブ I は車輪が牽引される場合、荷重を 35kg から 15kg に漸次減少させるとき転動合成抵抗の着力点 Q がカーブ上を矢印の方向へ移動するその軌跡である。このときに摩擦力 f は荷重とは無関係にほとんど作用しないので、転動合成抵抗は S.G. からの面圧 p のみに依存する。それゆえ、転動合成抵抗の方向は車軸の中心に向っている。またカーブ II は、車輪が駆動によって転動する

Fig. 18 転動車輪の荷重 V と $Q(\bar{X}, \bar{Y})$, $Q'(\bar{X}, \bar{Y})$, R などの関係

Fig. 19 駆動する車輪の b と M/R_0 との関係

場合、荷重の変化に対する転動合成抵抗の着力点 Q' の軌跡である。この駆動の場合、車輪面は S.G. から面圧 p のほかに摩擦力 f も同時に受けるので、転動合成抵抗の方向はいずれの荷重においても車軸の中心には向わない。またカーブ I と II とを比べると、同一荷重においても R, θ, Q などが異なることが認められる。

2.1.7 車輪の駆動トルクと車輪の幅、直径、荷重、沈降の深さなどとの関係

$V = \text{const.}$ の条件下で、車輪の幅 b および直径 $2r$ による y_0 の変化を実測し、S.G. 上を転動する車輪の駆動トルクを示す (15) 式に代入して図示したものが Fig. 19, Fig. 20 などである。プロットした点は実測によって得たものである。また同一形状の車輪のもとで、 V および y_0 による M の変化を調べ図示したものが Fig. 21

Fig. 20 駆動する車輪の $2r$ と M/R_o との関係

Fig. 21 駆動する車輪の V と M/R_o との関係

Fig. 22 駆動する車輪の y_o と M/R_o との関係

Fig. 22 などである。プロットした点は実測値で、カーブはそれぞれ理論式から得たものである。これらの図からわかることは、実測値と計算値が比較的良好に一致していることである。このことから、転動合成抵抗の着力点

Fig. 23 試料木製車輪の表面の粗さ

Fig. 24 試料金属製車輪の表面の粗さ

や、駆動する場合の転動合成抵抗の大きさ、方向などは直接測定できない場合でも、導かれた諸式から上述のように間接的に検討することができる。なお以上の研究において μ の値は車輪面の状態によって異なることが知られたので、上記の研究に用いたラワン製車輪面 ($\mu=0.4$) と鋼鉄製車輪面 ($\mu=0.32$) の凹凸の状態を大越式表面あらさ検査機(触針法)で調べた。この測定結果を Fig. 23, Fig. 24 で示す。

2.2 車両の牽引抵抗

幅の同じ前、後車輪をもつ車両の牽引抵抗の式を求めてみる。

2.2.1 前車輪の沈降の深さ

処女状態の S. G. 上を単車輪が牽引されて転動する場合には、(7) 式の関係があるので前車輪の沈降の深さ、荷重および半径に添え字を付して表わすと、沈降の深さ y_{0r} は次式のようにになる。

$$y_{0r} = \left\{ \frac{3}{kb\sqrt{2r_f}(3-n)} \right\}^{2/2n+1} \cdot V_f^{2/2n+1} \quad (17)$$

2.2.2 後車輪の沈降の深さ

前報の Fig. 6 に示されているような前車輪が通過した同一わだちの S. G. 面よりさらに後車輪が沈降した深さ y_{0r} は、次式(18)のように表わされる。ただし、添え字 r を付して後車輪の場合とする。

$$V_r = \sqrt{2} kb\sqrt{r_r} y_{0r}^{1/3} y_{0r}^{1/2} \quad \dots\dots (18)$$

よって

$$y_{0r} = \frac{V_r^2}{2k^2 b^2 r_r y_{0r}^{2/3}} \quad \dots\dots (19)$$

Table 1 同一沈降の深さにおける単車輪と車両の牽引抵抗

Wheel	Dry Sand Apparent specific gravity: 1.27~1.47 Mean diameter of particle: 0.026 cm			
	Single wheel Diameter $2r=27.8$ cm Thickness $b=5$ cm		Tandem wheels Diameter $2r=27.8$ cm Thickness $b=5$ cm	
Depth y_0 (cm)	Weight V_s (kg)	Resistance H_s (kg)	Weight V_t (kg)	Resistance H_t (kg)
2.4	5.0	2.0	8.98	2.40
3.5	7.5	3.3	11.48	3.60
4.8	10.0	5.2	15.48	5.85

ただし,

$$y_{0t} = y_{0f} + y_{0r} \quad \dots\dots (20)$$

2.2.3 単車輪と車両との牽引抵抗の関係

前に述べた前, 後車輪を有する車両の牽引抵抗は, 単車輪についての転動合成抵抗から調べることができる。車両の前車輪が処女状態の S.G. 面より y_{0f} まで沈降した同一わだち上を後車輪がさらにその S.G. 面より y_{0r} だけ沈降して通過したとき, 車両の牽引力 H_t が S.G. に対してなした仕事 W_t は, その後車輪と同一形状の単車輪が処女状態の S.G. 面より $y_{0f} + y_{0r}$ 沈降して進行するときの牽引力 H_s が S.G. に対してなした仕事 W_s にはほぼ等しい。このことは, ほぼ同様な両者のわだちを観察することからも認められる。これを確認するために同一形状の前後左右 4 車輪からなる車両の牽引抵抗を実測した。その結果, その牽引抵抗の 1/2 の値 H_t は Table 1 に示されるように単車輪の牽引抵抗 H_s とほとんど等しいことが認められた。以上の関係から, 車両の牽引抵抗 H_t を求めるには単車輪の牽引抵抗を表わす (6) 式の y_0 に $y_{0t} = y_{0f} + y_{0r}$ の値を代入すればよい。

$n=1/3$, $k=0.1$ を用いると, y_{0t} の値が次式によって表わされる。

$$y_{0t} = y_{0f} + y_{0r} = \left\{ \frac{V_f}{0.89kb\sqrt{2r_f}} \right\}^{6/5} + \frac{V_r^2}{2k^2b^2r_y y_{0t}^{2/3}} \quad \dots\dots (21)$$

$$y_{0t}^{2/3}(y_{0t} - A) = B \quad \dots\dots (22)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} A &= \left\{ \frac{V_f}{0.89kb\sqrt{2r_f}} \right\}^{6/5} \\ B &= \frac{V_r^2}{2k^2b^2r_y} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (23)$$

Fig. 25 牽引される車両の X と H_t との関係

この (22) 式より, 車両の沈降の深さ y_{0t} が求まる。したがって, (6) 式から車両の牽引抵抗 H_t を示す式は, 次式によって与えられる。

$$H_t = H_s = \frac{kb}{n+1} y_{0t}^{n+1} \quad \dots\dots (24)$$

Fig. 25 は上式の計算値と実測値を図示したものである。計算値に対して実測値がわずかに大きく示されているのは, 前車輪の通過したわだちに試料の S.G. がくずれたため, その S.G. による抵抗と車輪の前方にもり上がる S.G. による抵抗などが実測値にのみ含まれているためである。

3. 工学への応用

以上に述べた実験および理論の両面からの研究によって, S.G. 上を転動する車輪が受ける抵抗に関する基礎的な知識を得た。そこでこれらの研究結果を実際の工学へ応用するために行なった 2, 3 の基礎的な実験およびそのほかの応用について記す。

3.1 タイヤの牽引抵抗とタイヤ内の圧力との関係

単一硬質車輪を用いた場合, S.G. 上においては比較的硬い面上における場合に対し逆の現象が生じ, 車輪の幅を増すにしたがって牽引抵抗, 駆動する車輪のトルクなどの値がより小さくなることが認められた。この関係を空気入りのタイヤに応用し, 内圧を減じて接地面積を変え, タイヤの牽引抵抗の変化を調べた。タイヤの接地面積を大きくするため, タイヤ内の空気の圧力を小さくすると牽引抵抗 H の値が小さくなり, Fig. 26 のようになった。これは車輪の幅が増すにつれて牽引抵抗が減少する S.G. 上の転動硬車輪についての基礎研究と比較すれば理解できる。

Fig. 26 タイヤの内圧 q と H との関係

3.2 駆動する車輪の形状と進行速度 v , トルク M , 牽引出力 H_D などとの関係

駆動する車輪の進行速度を大きくするためには, S.G. 面と車輪面との間のすべりをできるだけ小さくすればよい。このためには, 車輪の周囲の形状が S.G. との接地面積ができるだけ大きくなるように設計することが望ましい。この目的のために, Table 2 に示されたような鋼材を用いた長方形の板状のものと, 丸棒状のものとを車輪の周面に等間隔に付した場合, どちらの形状が駆動トルク, 駆動される車輪の牽引出力および車輪の進行速度などからみて適しているのか実験によって調べてみた。その結果, 丸棒状よりも板状のものの方が一定荷重のもとで進行速度が大きく, 駆動トルクの値は小さい。しかも駆動する車輪の牽引出力の値が大きいたことが認め

られた。このことから, いずれも板状のものの方がよいことがわかった。

3.3 一般の S.G. 面上における車輪の転動合成抵抗

以上に述べた車輪の転動合成抵抗および駆動トルクなどに関する研究を行ってきた実験装置および理論は, S.G. 面が水平に保たれた状態においてのみ適用されるものである。しかし一般の農地をはじめとして雪路面, 砂漠地帯, 月面, 海底などはいずれも任意面である。それゆえ, 先に述べた実験結果および一般式はこのような実際の S.G. 面においてはそのまま適用されない。そこでこのような S.G. 面においても車輪の転動合成抵抗を求める測定装置および理論を確立する必要がある。そこで本研究室で, 任意の S.G. 面は周波数の異なる正弦波面の和で近似できるとして, Fig. 27 のような単一正弦波面を S.G. 上に作る実験法を考案した。そしてそのような面上を転動する車輪の抵抗をジャイロスコープによ

Fig. 27 S.G. の形成された Sine 面

Table 2 車輪の周辺の形状と M , v_0 および v との関係

Shape (width 10 cm)	Weight V (kg)	Traction Force H_D (kg)	Torque/ R_0 M/R_0 (kg) ※ $R_0=4.38$ cm (kg)	Depth y_0 (cm)	Time t (sec)	Rolling distance l (cm)	Velocity v (cm/sec)
	22.0	0	29.5	4.0	138	38.4	0.27
		1	35.5	4.8	141	31.8	0.22
		2	41.5	5.7	146	26.1	0.17
		3	45.5	6.7	150	19.4	0.13
	22.0	0	27.7	3.0	137	51.4	0.38
		2	36.0	3.2	140	49.0	0.35
		3	40.7	3.6	143	45.5	0.31
		4	45.2	4.0	147	43.6	0.29
		6	52.4	4.5	160	34.3	0.21

って姿勢制御しながら自動的に測定する方法をも考察したので、次回にこれらについて報告する予定である。

3.4 動力用最小エネルギーに対する車両の最適重心位置の自動選定

前述した Fig. 25 から知れるように荷重分布に依存する車両の重心位置を前後に移動させることによって、車両の走行用エネルギーが大きく異なることが本研究で明らかにされた。このことは現在世界的なエネルギー源の節約を受けているため、今後の車両の構造設計に関して重要な課題となるものと思われる。そこで本研究室では、電気信号によって車両の動力用最小エネルギーに対する最適重心位置の自動選定に関する研究を、2つの方法によって進めているのでこれらについても引き続き本誌に報告する。

4. おわりに

S. G. 上における車輪の転動抵抗の研究に関し、著者が研究を始めたのは、第二次世界大戦が終ってまもなくの1949年であった。したがって敗戦当時の日本において、このような車輪の転動抵抗を実測によって定量的に把握しようとしても、必要な研究費に窮し少ない月給もこれに使用せねばならなかったような状況であった。それゆえ、これらの考案した測定装置はほとんどが中古材料を集めてきて著者の手製によって作り上げたものであ

る。ところで著者がこのような研究に対し、当時日本における草分けとして取り組んだが、その当時参考文献およびこの種の研究について討論し互いに励ます仲間もなかった。そのような状態で研究を進めてゆくうちに、この種の研究をまとめるためには車輪そのものの研究を深めてゆくべきなのか、それとも S. G. そのものの性質をさらに研究していくべきなのかという問題におつかった。そのようなとき、いつも研究においてはもちろんのこと、精神的にも御指導して下さいなのが、恩師故真島正市先生（日本学士院会員、文化功労者、初代応用物理学会会長）であった。『工学に関する研究者は、お釈迦様のように考えてばかりいてはだめだ。とにかく手をつけてみることだ。するとその結果は初めの目的が幹であっても小枝のようなところから新たなアイデアが生まれる。できるだけ金のかからないアイデア的な研究を手製でやりなさい。』という励まして下さいました。もしこれらに関する研究について開拓の道しるべとしてわだちのような跡があったとすれば、それは恩師からの励ましを学ぶ者の心持ちとして実践したことによるものと信じています。しかし、先に述べたようにこの種の研究をさらに深めてゆくために、S. G. と車輪との間の相互的に作用する力学関係を解析するためには、さらに進んだ計測自動制御の手法にまたなければならぬことを著者は痛感致しております。

引用文献

高橋清：“Soft Ground 上を転動する車輪が受ける抵抗の基礎研究（電気式自動測定法と実験結果）” 粉体工

学研究会誌, 12, No. 7 (1975) の引用文献に同じ

Author's Abstract

Basic studies on the resistance received by a wheel rolling on a soft ground
(the results of experiments made by means of the electrical, automatic
measuring method and the Takahashi's theoretical equation)

by

Kiyoshi TAKAHASHI

(Department of Electronics Engineering, Shibaura Institute of Technology)

In this report, description is first made from the results of experiments made by the electrical, automatic M-T (Mashima-Takahashi) wheel rolling resistance measuring device. The Takahashi's theoretical equation, based on the experimental results, are then derived which show the relations among the resultant rolling resistance $\vec{R}$ received by the wheel from soft ground (S. G.), its horizontal component H and vertical component V , the direction θ , the coordinates $(\bar{X}, \bar{Y})$ of the point Q where the force is applied, the driving torque of wheel M , etc., on one hand and the breadth of wheel b , the wheel diameter $2r$, the sinking depth at the lowermost end of wheel y_0 , the characteristic constants of S. G. sample k and n , coe-

efficient of friction μ , etc., on the other hand. It is explained that these formulas represented in vector are convenient for practical purposes. From the formulas, it is also found that the values of R , H , V , θ , Q ($\bar{X}$, $\bar{Y}$), etc. differ between the two cases, *i. e.* when the wheel is pulled and the wheel rotates under axial driving. Finally, the theoretical formulas on the rolling resistance of a vehicle running on S. G. are obtained from the formulas for a single wheel. Applications of the studies for practical purposes are also described.

List of figures and tables

- Fig. 1** Rolling resistance of a wheel running on S.G.
- Fig. 2** Relation between H and V , the components of the resultant rolling resistance, of a pulled wheel.
- Fig. 3** Relation between γ_0 and V of a pulled wheel.
- Fig. 4** Relation between b and $\bar{X}$, $\bar{Y}$ of a driving wheel.
- Fig. 5** Relation between $2r$ and $\bar{X}$, $\bar{Y}$ of a driving wheel.
- Fig. 6-a** Relation between γ_0 and $\bar{X}$, $\bar{Y}$ of a driving wheel.
- Fig. 6-b** Relation between V and $\bar{X}$, $\bar{Y}$ of a driving wheel.
- Fig. 7** Relation between b and $\bar{X}$, $\bar{Y}$ of a pulled wheel.
- Fig. 8** Relation between $2r$ and $\bar{X}$, $\bar{Y}$ of a pulled wheel.
- Fig. 9** Relation between γ_0 and $\bar{X}$, $\bar{Y}$ of a pulled wheel.
- Fig. 10** Relation between V and H , the components of the resultant rolling resistance, of a wheel (parameter: b).
- Fig. 11** Relation between V and H , the components of the resultant rolling resistance, of a wheel (parameter: $2r$).
- Fig. 12** Relation between b and H of a rolling wheel.
- Fig. 13** Relation between b and θ of a rolling wheel.
- Fig. 14** Relation between b and R of a rolling wheel.
- Fig. 15** Relation between $2r$ and H of a rolling wheel.
- Fig. 16** Relation between $2r$ and θ of a rolling wheel.
- Fig. 17** Relation between $2r$ and R of a rolling wheel.
- Fig. 18** Relation between the V and Q ($\bar{X}$, $\bar{Y}$), Q' ($\bar{X}$, $\bar{Y}$), R etc. of a rolling wheel.
- Fig. 19** Relation between b and M/R_0 of a driving wheel.
- Fig. 20** Relation between $2r$ and M/R_0 of a driving wheel.
- Fig. 21** Relation between V and M/R_0 of a driving wheel.
- Fig. 22** Relation between γ_0 and M/R_0 of a driving wheel.
- Fig. 23** Surface roughness of the experimental wooden wheel.
- Fig. 24** Surface roughness of the experimental metal wheel.
- Fig. 25** Relation between X and H_t of a pulled vehicle.
- Fig. 26** Relation between tire internal pressure q and H .
- Fig. 27** Sine surface of S.G. formed.
- Table 1** Traction resistances of a single wheel and a vehicle for the same sinking depth.
- Table 2** Relation between the peripheral form of the tire and M , γ_0 and v .