研究報告

容器回転型粉体混合機の所要動力*

Power Requirement of Rotary Vessel Mixers

佐藤 宗武**

Munetake Sato

奥山 憲夫**

Norio Okuyama

吉川 公夫**

Kimio Yoshikawa

矢野 武夫**

Takeo Yano

1. 緒言

容器回転型混合機には水平円筒型、V型をはじめとして種々の形状や特徴を持ったものがあり、多様な目的にかなり広い分野で使用されている。そしてこれらの混合機の混合性能に関する研究も比較的多くなされており、特に水平円筒型混合機については混合のみならず粉碎や乾燥操作という見地から容器内粉体のフローパターンや混合過程、混合状態の検証などの実験的あるいは解析的な研究が多く報告されている。しかしながら実際の装置の設計や混合機の種類、操作条件の設定などに際して必要となってくる混合機の所要動力に関する研究は数少ない。既往の研究としては水平円筒容器内の粒子フローパターンを詳細に観測し、粒子を一定高さにまで持ち上げるに要する動力と粉体粒子に一定周速度を与えるのに要する動力の二つの要素からなる動力式を理論的に導びき実験的に検証した大山の報告¹⁾、ボールミル内の粒子の運動を静領域と剪断領域の二つに分けた単純化したモデルを用いてエネルギー収支から動力を検討した Hogg らの報告²⁾ および次元解析からフルード数と動力数を用いていくつかの実用混合機の動力データを整理した Fan らの報告³⁾ などがある。

本報では容器回転型混合機の所要動力の解析を目的として、水平円筒型、V型および二重円錐型混合機をとりあげ、これらの回転トルクを種々の操作条件（回転速度、粉体装入率）、粉体物性（見掛け密度、安息角）、混合機寸法などを変化させて実測した。得られたトルク変動曲線の特徴をいくつかの代表値を用いて表わし、個々の条件との関係を検討した。

つぎに、これらの混合機の回転トルクが i) 容器の転動運動による粉体層重心の位置移動、ii) 粉体の運動状態

の維持および iii) 遠心効果と容器壁での摩擦から生じるとしての力学的なモデルを考え、実験結果を考慮して半理論的な所要動力式を導出した。

2. 回転トルクの測定装置と方法

Fig. 1 に使用した混合機の形状と回転トルクの測定装置の概略を示した。混合機は無段変速モーターによって抵抗線型トルク変換器（最大 1 [Kg・m]）を介して駆

Fig. 1 混合容器および実験装置

Table 1 混合機代表寸法

水平円筒型	D(m)	R(m)	L(m)	全容積(l)
HC-1	0.27	0.135	0.36	20.6
HC-2	0.18	0.09	0.24	6.1
HC-3	0.130	0.068	0.24	3.4
HC-4	0.09	0.045	0.24	1.5

V 型	Rv(m)	Rmax(m)	L(m)	B(m)	a(deg)	全容積(l)
	0.096	0.191	0.452	0.45	80	13.0

二重円錐型	nRmax(m)	Rmax(m)	B(m)	a(deg)	全容積(l)
	0.025	0.17	0.29	90	9.7

昭和52年6月2日受理

* 粉体工学研究会秋期例会にて発表 (1975. 11 京都)

** 大阪府立大学工学部化学工学科 (〒591 堺市百舌鳥梅町4-804)

TEL 0722-52-1161

Table 2 粉体試料の物性値

粉体	物性	見掛け密度 ρ_a [kg/m ³]	安息角 ϕ [deg]	内部摩擦係数 μ_i [-]
豊浦砂		1,580	35.0	0.60
ジルコンサンド		2,980	33.0	0.59
豊浦・ジルコン混合砂		1,930	34.0	0.60
ホワイトアラングム		1,960	44.0	0.64
亜硫酸ナトリウム		1,520	38.0	0.58
ガラス球		1,520	22.8	0.28
ガラス粉末		1,340	39.3	0.88
粒状ショ糖		940	41.0	0.62
ポリ塩化ビニル		609	38.8	0.8~

動され回転トルクは歪測定アンプ、ペン書きあるいは電磁オシログラフによって連続記録した。

混合容器の代表寸法を Table 1 に示した。粉体試料には Table 2 に示した粒径範囲が 105~350 μ の 9 種類を用いた。

実験は粉体が容器の回転軸を越えない装入率範囲 $f = 0 \sim 0.5$ [-] で回転速度 N を変えて行なった。なお装入率 f は粉体装入量を W [kg]、見掛け密度を ρ_a [kg/m³] および混合機容積を V [m³] として次式から求めた。

$$f = (W/\rho_a)/V \quad \dots\dots(1)$$

3. 実験結果

3.1 回転トルク変動曲線 $T(\alpha)$

混合機の軸の取り付け位置による容器自身の偏心をあらかじめカウンターウェイトで除き、粉体を装入して混合機を回転すると Fig. 2 に示すようなトルク変動曲線 $T(\alpha)$ が得られた。水平円筒型混合機では回転角 α に無関係に一定のトルクを示し、V型と二重円錐型混合機の場合には容器 1 回転の間に最大トルク $T_{\max}$ と最小トルク $T_{\min}$ がそれぞれ 2 回現われる周期的変動をした。これらのトルク変動曲線 $T(\alpha)$ の特性をつぎのような代表値で表わした。

Fig. 2 回転トルクの測定結果

a) 最大トルク: $T_{\max I}, T_{\max II}$

b) 最小トルク: $T_{\min I}, T_{\min II}$

c) 算術平均トルク:

$$T_{av} = \frac{1}{4} \{ (T_{\max I} + T_{\max II}) + (T_{\min I} + T_{\min II}) \} \quad \dots\dots(2)$$

d) 回転平均トルク:

$$T_{rot} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\alpha) d\alpha \quad \dots\dots(3)$$

3.2 回転トルク T と回転速度 N との関係

Fig. 3 に豊浦砂を各種混合機に $f = 0.3$ 装入した場合の T_{av} および T_{rot} と回転速度 N [rpm] の関係の測定例を示した。 T_{av}, T_{rot} は 30 [rpm] 付近までは一定値を示しその後 N の増加に従ってそれぞれの混合機の臨界回転速度 N_{cr} ($= 29.9/\sqrt{R_{\max}}$ [rpm]) 付近まで徐々に増加し $N/N_{cr} = 0.75 \sim 0.83$ で極大値に達した。なお、ここで用いた混合機の N_{cr} はそれぞれ、水平円筒型: 81 [rpm], V型: 68, 二重円錐型: 73 である。 N_{cr} を過ぎると粉体は容器とともに回転し始め、トルクは急激に減少した。 T_{av} と T_{rot} の値は二重円錐型混合機では N の全範囲ではば一致した値となるが V 型では高速域において T_{av} の方が T_{rot} の値より大きくなった。これは高速域では粉体の容器底部への衝突が激しく最大トルク $T_{\max}$ の値が大きくなるためと考えられる。

Fig. 4 には V 型および二重円錐型混合機の $T_{\max}$ と N の関係を示した。 $T_{\max}$ は平均トルク T_{av} に比較して V 型で約 50%, 二重円錐型では約 20% 大きな値を示し、V 型では 40 [rpm] 以上で $T_{\max}$ が急に増加し粉体の飛散落下の激しいことを示した。

3.3 回転トルク T と粉体装入率 f との関係

Fig. 5 に T_{rot} と粉体装入率 f との関係を示した。 N が 30 [rpm] 以下では T_{rot} は f の約 0.7 乗に比例して増加したが N が大きくなると f の大きいところでの T_{rot} の増加率は低下の傾向を示した。V 型ではこの傾向が顕著であった。

3.4 回転トルク T と粉体物性との関係

Fig. 6 (a) に粉体の見掛け密度 ρ_a とトルク T の関係を示した。いずれの混合機についても T_{av} または T_{rot} は ρ_a に比例して増大した。つぎに粉体の安息角 ϕ の T に及ぼす影響を調べるために Fig. 6 (b) に T_{av}/ρ_a 対 ϕ の関係を示した。ここで用いた粉体は ϕ だけでなく ρ_a も異なっ

Fig. 3 平均トルク T_{av} , T_{rot} 対回転速度 N の関係

Fig. 4 最大トルク T_{max} 対 N の関係

Fig. 5 平均トルク T_{av} 対粉体装入率 f の関係

Fig. 6(a) 平均トルク T_{av} 対見掛け密度 ρ_a の関係

Fig. 6(b) T_{av}/ρ_a 対安息角 ϕ の関係

ているために T_{av}/ρ_a と T の関係を求めた。図に見るように ϕ の増加すなわち混合機内の粉体層表面の傾斜角の増加に従ってトルクはわずかに増加した。

3.5 回転トルク T と混合機寸法との関係

混合機の寸法の影響を内径の異なる4種類の水平円筒を用いて調べた。Fig. 7 には $f=0.3$ および回転速度と臨界回転速度との比 N/N_{cr} が一定の条件で測定した T_{av} 対 D の関係を示した。これより T_{av} は D の3乗に比例して増加していることがわかった。

4. 混合機所要動力

混合機の動力 P [Kg・m/sec] は容器内の粉体の転動によって消費される動力 P_s , 容器本体の回転によって消費される動力 P_v および容器軸受けや動力伝達の際の摩

Fig. 7 T_{av} 対円筒直径 D の関係

擦などによる機械的な消費動力 P_M の和と考えられる。

$$P = P_S + P_V + P_M \quad \dots\dots(4)$$

混合容器の動的バランスを完全にとり回転体の軸受部の潤滑が良好であるとき P_V , P_M は P_S に比較して十分に小さく、動力 P は粉体の転動による動力 P_S にほとんど支配されるような条件下では回転速度を N_S [rps] とすると

$$P_S = 2\pi N_S T \quad \dots\dots(5)$$

回転トルク T は混合機形状、粉体装入率、容器の傾斜角などによって決まる容器の回転に伴う粉体層の重心に働く重力によるトルク T_g と粉体の運動によって生ずるトルクの増分すなわち、粉体に一定速度の円運動を与えるのに必要なトルク T_k と粉体層の回転運動によって生ずる容器壁面との摩擦によるトルク T_f の総和と考えられる。

$$T = T_g + T_k + T_f \quad \dots\dots(6)$$

4.1 水平円筒型混合機の場合

4.1.1 重力によるトルク T_g

回転半径 R , 長さ L の円筒に W の粉体を装入して回転させ、粉体が安息角 ϕ で層表面を流下する状態のときの粉体層重心 G によるトルク T_g は Fig. 8 の関係から次式のようになる。

$$T_g = W \left(\frac{g}{g_c} \right) l \sin \phi \quad \dots\dots(7)$$

ここで、 l は回転中心 O から重心 G までの距離であり角

Fig. 8 円筒断面における力関係

度 $(1/2) \angle AOB = \theta$ がわかれば次式で与えられる。

$$l = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin^3 \theta}{(\pi/90)\theta - \sin 2\theta} \cdot R \quad \dots\dots(8)$$

θ は粉体装入率 $f (= W/\pi R^2 L \rho_a)$ との間に次の関係がある。

$$2\pi f = \frac{\pi}{90} \theta - \sin 2\theta \quad \dots\dots(9)$$

したがって l は (8), (9) 式より求まるが θ, f, R などが複雑な関係になっているので f の実用範囲内 ($0 \leq f \leq 0.5$) で l/R と f を次の 3 次式で近似して計算の便宜を計った。

$$l/R = G(f) = 1.0 - 2.0f + 3.4f^2 - 3.3f^3 \quad \dots\dots(10)$$

以上の結果から T_g は次式で求められる。

$$T_g = \pi \cdot R^3 \cdot L \cdot \rho_a \left(\frac{g}{g_c} \right) \cdot f \cdot G(f) \cdot \sin \phi \quad \dots\dots(11)$$

4.1.2 粉体に円運動を与えるためのトルク T_k

回転速度を増してゆくと粉体は壁面を上昇し所定の高さで円運動を離れて放物線を描いて自由落下に移る。このような運動によるトルクを以下の仮定のもとに粉体層回転運動半径 r での微小部分 dr に働くモーメントの総和として求めた。

- ① 粉体は B 点から A 点まで同心円状に一定の層厚みで輸送される (Fig. 8)。
- ② 粉体の周速度は BAC と移動するに従って減少する。大山¹⁾ の測定によれば運動している粉体層の頂点 C では B 点の約 1/2 の周速度になることが確かめられている。そこで、ここでは半径 r における平均速度を次式で仮定した。

$$\text{平均周速度} = \frac{1}{2} \left(\omega r + \frac{1}{2} \omega r \right) = \frac{3}{4} \omega r$$

③ 円運動を離れた粉体および表層を流下する粉体はトルクに影響を及ぼさない。

回転運動半径 r の単位長さあたり単位時間に持ち上げる粉体の重さは $(3/4) \rho_a \omega r$ であるから、長さ L の円筒の dr に作用する力によるトルク dT_k は次式となる。

$$dT_k = \left(\frac{3}{4} \right)^2 \cdot \frac{\rho_a}{g_c} \cdot L \cdot (\omega r)^2 r dr \quad \dots\dots(12)$$

仮定①より(12)式を粉体層表面 S から円筒面 R まで積分する。ここで中心 O から S までの距離は $R \cos \theta$ であるから T_k は次式となる。

$$T_k = \left(\frac{3}{4} \pi \right)^2 \cdot \frac{\rho_a}{g_c} \cdot L \cdot R^4 \cdot N_s^2 (1 - \cos^4 \theta) \quad \dots\dots(13)$$

4.1.3 粉体と混合容器壁面との摩擦によるトルク T_f

混合容器の回転に伴い粉体は半径方向に遠心力を受け容器壁を圧しながら壁面に沿って移動する。このとき粉体と壁面の間に摩擦力が働き粉体層は壁面から抵抗力を受ける。この抵抗力によって生じるトルクは粒子に作用する遠心力と壁面との摩擦係数 μ_w から求められる。

Fig. 9 に示した粉体装入時の円筒断面で鉛直方向と η の角をなす壁面上の点 P に働く垂直応力 (半径方向) σ_c は $\overline{NP}$ 間の各粒子に働く遠心力の和であり次式で示され

る。

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \int_{r_c}^R \left(\frac{\rho_a}{g_c} \right) \left(\frac{3}{4} \omega \right)^2 r dr \\ &= \left(\frac{3}{4} \pi \right)^2 \frac{\rho_a}{g_c} N_s^2 \left[1 - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 (\eta - \phi)} \right] R^2 \quad \dots\dots(14) \end{aligned}$$

したがって P 点近傍の微小部分 dl に働く摩擦力 dF_f は

$$dF_f = k \mu_w \sigma_c dl \quad \dots\dots(15)$$

となる。ここで、 k は粉体の流動時における壁面の動的摩擦係数 μ_w' が静的な μ_w より小さくなることを考慮した係数であり、本実験で使用した容器および粉体の組合せでは $\mu_w' \doteq (1/2) \mu_w$ であることが実験的に推定されている。

粉体が容器壁に $\eta_a \sim \eta_b$ 間で接することによって生ずるトルク T_f は次式となる。

$$\begin{aligned} T_f &= k \cdot \mu_w \cdot R \cdot L \int_{\eta_a}^{\eta_b} \sigma_c R d\eta \\ &= \left(\frac{3}{4} \pi \right)^2 \cdot \frac{\rho_a}{g_c} \cdot \mu_w \cdot R^4 \cdot L \cdot N_s^2 \left[\frac{\pi}{90} \theta - \cos^2 \theta \right. \\ &\quad \times \{ \tan(\eta_b - \phi) - \tan(\eta_a - \phi) \} \quad \dots\dots(16) \end{aligned}$$

ここで、 η_a, η_b は f, ϕ が決まれば求まり、**Fig. 9** には本実験で使用した粉体の安息角をパラメータにして計算した結果を示した。

4.1.4 総回転トルク

回転トルク T は(11)、(13)および(16)式の和として次のように求められる。

$$\begin{aligned} T &= \pi R^3 \cdot L \cdot \rho_a \left(\frac{g}{g_c} \right) \cdot f \cdot G(f) \sin \phi \\ &\quad + \left(\frac{3}{4} \pi \right)^2 \cdot C \cdot \frac{\rho_a}{g_c} R^4 \cdot L \cdot N_s^2 \quad \dots\dots(17) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} C &= (1 - \cos^4 \theta) + \mu_w \left[\frac{\pi}{90} \theta - \cos^2 \theta \right. \\ &\quad \times \{ \tan(\eta_b - \phi) - \tan(\eta_a - \phi) \} \quad \dots\dots(17') \end{aligned}$$

なお C は f, ϕ, μ_w を含む複雑な式となっているが C に対する ϕ, μ_w の影響が小さいことから近似的に C が f のみの関数とすると次式を得る。

$$C \doteq 2.73 f^{0.43} \quad \dots\dots(18)$$

(18)式を用いて(17)式を簡略化すると実際計算上便利な次式が得られる。

Fig. 9 η_a, η_b 対 f の関係

Fig.10 T の計算結果

Fig.11 $T_{cal.}$ 対 $T_{exp.}$ の関係

$$T = \pi R^3 \cdot L \cdot \rho_a \left(\frac{g}{g_c} \right) \cdot f \cdot G(f) \sin \phi + 2.73 \left(\frac{3}{4} \pi \right)^2 \frac{\rho_a}{g_c} R^4 \cdot L \cdot N_s^2 \cdot f^{0.43} \quad \dots\dots(19)$$

Fig.10に豊浦砂について $f=0.3$ の場合の T_g , T_k , T_f のそれぞれの計算結果とそれらの和である $T(cal.)$ および実験結果の $T(exp.)$ を示した。 $T(cal.)$ と $T(exp.)$ は回転速度 $N=70$ [rpm] 付近まで一致した。(17)式と簡略化した(19)式の差は図に示したように最大±8%程度であり実用上良好な精度といえる。

Fig.11には種々の粉体および操作条件下で得られた全測定結果の相関を示した。これより(17)式は精度約20%以内で回転トルクを推算できることがわかった。

4.2 V型混合機の場合

V型混合機のトルク変動曲線 $T(\alpha)$ は Fig. 2 に見るように容器の回転に伴う粉体層の移動によって周期的に変動し、 $\alpha = 0^\circ, 180^\circ$ で最小トルク T_{min} を、 $\alpha = 90^\circ, 270^\circ$ で最大トルク T_{max} を示した。この変動曲線を周期 180° の正弦波とみなし次式で表わした。

$$T(\alpha) = \frac{T_{max} - T_{min}}{2} \sin 2(\alpha - 45) + \frac{T_{max} + T_{min}}{2} \quad \dots\dots(20)$$

したがって容器の回転角 $\alpha = 0^\circ, 180^\circ$ の位置での T_g , T_k , T_f を求めれば T_{min} が算出でき、同様に $\alpha = 90^\circ, 270^\circ$ の位置での T_g , T_k , T_f から T_{max} が算出できて $T(\alpha)$ が求まる。

4.2.1 重力によるトルク T_g

V型混合機の回転中心Oから粉体層の重心Gまでの距離 l 、および l が鉛直方向となす角度 β は容器の回転角 α とともに変化する。そこで重心の移動を調べるために Fig.12 (a) に示したような混合機の中心部を通るZ面の二次元の模型を作り回転角 α とともに変化する粉体層の形状を観測して重心の位置をプロットした。図から明らかに重心の位置は常に回転軸に対して正のトルクを示す側に存在し、 $\alpha = 90^\circ$ で T_{gmax} を、また $\alpha = 0^\circ$ で T_{gmin} を与えた。この二次元模型の重心の位置を幾何学的に求めるためにZ断面を最大回転半径 R_{max} を基準にして Fig.12 (b) のような多角形で近似した。粉体層表面と容器壁とで囲まれた部分の多角形をいくつかの三角形で区切り各三角形についての重心の合成から全体の重心を求める方法をとった。

① $\alpha = 0^\circ$ の場合 (T_{gmin})

中心Oから重心までの距離 l_1 は次式で示される。

$$l_1 = K \left\{ \left(\frac{1}{12} \right)^2 + \left(\frac{5}{18} + \frac{7}{48} \tan \phi + \frac{5}{8} H_1 \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot R_{max} = A_1 \cdot R_{max} \quad \dots\dots(21)$$

ここで、 K は二次元模型の重心を三次元の粉体層に適用するための補正係数であり、V型容器の先端を頂角 a の円錐体と仮定したときの重心までの距離 l と二次元の場合の重心までの距離 l' との比である。

$$K = \frac{\text{三次元の粉体層の重心までの距離 } l}{\text{二次元の粉体層の重心までの距離 } l'} = \frac{3}{4} \frac{1 + 3H_1}{1 + 2H_1} \quad \dots\dots(22)$$

また、 $H_1 = h_1/R_{max}$ であり h_1 は容器の中心Oと頂部Pを結ぶ線分 $\overline{OP}$ と粉体面 $\overline{AB}$ の交点をSとしたときの距

Fig12 V型混合機内の粉体層重心および力学的関係

離OSである。

OGと鉛直線のなす角度 β_1 は

$$\beta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{12}{40 + 21 \tan \phi + 90 H_1} \right) \quad \dots\dots(23)$$

となる。したがって T_{gmin} は次式で示される。

$$T_{gmin} = \frac{\pi}{4} A_1 \cdot R_{max}^3 \cdot L \cdot \rho_a \left(\frac{g}{g_c} \right) \cdot f \cdot \sin \beta_1 \quad \dots\dots(24)$$

② $\alpha=90^\circ$ の場合 (T_{gmax})

最大トルクを与える場合の重心までの距離 l_2 および重心の鉛直方向となす角 β_2 は①のときと同様につぎのように求められる。

$$l_2 = \frac{K}{6} \left[\left\{ \frac{(18H_2+16)\tan^2\phi + (18H_2+27)\tan\phi - 9}{3\tan\phi(2\tan\phi+3)} \right\}^2 + \left\{ \frac{6H_2\tan\phi+9}{4\tan\phi+6} \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot R_{max} \\ = A_2 R_{max} \quad \dots\dots(25)$$

$$\beta_2 = \tan^{-1} \left\{ \frac{4(9H_2+8)\tan^2\phi + (36H_2+54)\tan\phi - 18}{3\tan\phi(6H_2\tan\phi+9)} \right\} \quad \dots\dots(26)$$

ここで、 $H_2=h_2/R_{max}$, h_2 は中心Oから粉体面上のSまでの距離である。(25), (26)式より T_{gmax} は次式で示される。

$$T_{gmax} = \frac{\pi}{4} A_2 \cdot R_{max}^3 \cdot L \cdot \rho_a \cdot \left(\frac{g}{g_c} \right) \cdot f \cdot \sin \beta_2 \quad \dots\dots(27)$$

4.2.2 粉体に円運動を与えるためのトルク T_k

前節の仮定②③に加えてさらにつぎの仮定を行った。

① Fig.12に示したように粉体は $S_2 R_2$ の層厚さで同心円状に点Bから点Aまで輸送される。

② 混合機の代表長さとして重心Gを通る回転軸方向の長さ L_G を用いる。

回転角 $\alpha=0^\circ$ でのトルク T_{kmin} は粉体層中の微小部分 dr に作用する力を粉体表面 S_1 から容器壁 R_1 まで積分して次のように得られる。

$$T_{kmin} = \left(\frac{3}{4} \pi \right)^2 \frac{\rho_a}{g_c} (R_1^4 - r_1^4) \cdot L_{G1} \cdot N_S^2 \quad \dots\dots(28)$$

ここで代表長さ L_{G1} は幾何学的に次式のように求まる。

$$L_{G1} = 2 (1 - A_1 \cos \beta_1) \tan \frac{a}{2} \cdot R_{max} \quad \dots\dots(29)$$

また R_1 , r_1 は R_{max} および h_1 と次の関係にある。

$\triangle OBR_1$ に正弦定理を用いると

$$R_1 = \frac{\sin \delta}{\sin(\beta_1 + \delta)} \cdot R_{max} \quad \dots\dots(30)$$

$\triangle OSS_1$ について r_1 は

$$r_1 = \frac{\cos \phi}{\cos(\phi - \beta_1)} \cdot h_1 = \frac{\cos \phi}{\cos(\phi - \beta_1)} \cdot H_1 \cdot R_{\max} \quad \dots\dots(30')$$

となる。

そこで (30) および (30') 式を用いて (28) 式を整理すると次式のように書ける。

$$T_{k\min} = \left(\frac{3}{4}\pi\right)^2 \cdot B_1 \cdot \frac{\rho_a}{g_c} \cdot R_{\max}^4 \cdot L_{G1} \cdot N_s^2 \quad \dots\dots(31)$$

ここで係数 B_1 は R_1, r_1 を $R_{\max}$ でまとめた結果として次式の内容を含んでいる。

$$B_1 = \left[\frac{\sin \delta}{\sin(\beta_1 + \delta)} \right]^4 - \left[\frac{\cos \phi}{\cos(\phi - \beta_1)} \cdot H_1 \right]^4 \quad \dots\dots(32)$$

同様にして回転角 90° のときの $T_{k\max}$ は次のように得られる。

$$T_{k\max} = \left(\frac{3}{4}\pi\right)^2 \cdot B_2 \cdot \frac{\rho_a}{g_c} \cdot R_{\max}^4 \cdot L_{G2} \cdot N_s^2 \quad \dots\dots(33)$$

ただし

$$L_{G2} = 2(1 - A_2 \sin \beta_2) \tan \frac{a}{2} \cdot R_{\max} \quad \dots\dots(34)$$

$$B_2 = \left[\frac{\cos \delta}{\cos(\beta_2 - \delta)} \right]^4 - \left[\frac{\sin \phi}{\cos(\beta_2 - \phi)} \cdot H_2 \right]^4 \quad \dots\dots(35)$$

4.2.3 粉体と壁面の摩擦によるトルク T_f

Fig.12において中心Oを通る鉛直線から容器回転方向に η 度のところにある壁面上の点 R_c の微小部分 dl に働く粉体層の遠心力による垂直応力を考える。この応力は水平円筒型の場合に考えた σ_c (14式) と同様に粉体層表面 S_c から R_c までの粒子に働く遠心力の和とし、さらにこのときの粉体の平均周速度を $(3/4)\omega r$ と仮定すると水平方向に δ だけ傾斜した壁面上の単位幅あたり dl に働く力 dF は次のように書ける。

$$dF_f = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 \cdot k\mu_w \cdot \frac{\rho_a}{g_c} N_s^2 (R_c^2 - r_c^2) \cos(\eta - \delta) dl \quad \dots\dots(36)$$

ここで k は壁面の静摩擦係数の値 μ_w を動的な状態における摩擦係数に適用するための補正係数である。中心からの距離 $R_c (=OR_c)$, $r_c (=OS_c)$ および壁面上の微小部分の長さ dl を最大回転半径 $R_{\max}$ を基準にして回転角 η の関数を用いて次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} R_c &= f_1(\eta) \cdot R_{\max} \\ r_c &= f_2(\eta) \cdot R_{\max} \\ dl &= f_3(\eta) \cdot R_{\max} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(37)$$

39式に37式を代入し、容器壁全面(曲面)に働く力が代表寸法 L_G の幅の円筒面に作用すると仮定して角度 η_a から η_b まで積分するとトルク T_f は次のようになる。

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 \cdot k\mu_w \cdot \frac{\rho_a}{g_c} N_s^2 \cdot R_{\max}^4 \cdot L_G \\ &\quad \times \int_{\eta_a}^{\eta_b} f_1(\eta) \cdot \{f_1^2(\eta) - f_2^2(\eta)\} \\ &\quad \times \cos(\eta - \delta) \cdot f_3(\eta) d\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 \\ &\quad \cdot k\mu_w \cdot \frac{\rho_a}{g_c} N_s^2 \cdot R_{\max}^4 \cdot L_G \cdot C \quad \dots\dots(38) \end{aligned}$$

係数 C は f_1, f_2, f_3 などを含む積分項をまとめたものである。

$$C = \int_{\eta_a}^{\eta_b} f_1(\eta) \{f_1^2(\eta) - f_2^2(\eta)\} \times \cos(\eta - \delta) \cdot f_3(\eta) d\eta \quad \dots\dots(39)$$

$f_1(\eta)$, $f_2(\eta)$ および $f_3(\eta)$ は η の領域によって変化するが、ここでは容器の回転角が 90° ($T_{\max}$ を与えるときの傾斜角) で η が η_a と η_c の間にあるときすなわち R_c が壁面DC上にあるときの R_c, r_c, dl を求めてみる。

$$\left. \begin{aligned} R_c &= \frac{1}{2 \cos \eta} \cdot R_{\max} \\ r_c &= \frac{\sin \phi}{\cos(\eta - \phi)} h_2 = \frac{\sin \phi \cdot H_2}{\cos(\eta - \phi)} \cdot R_{\max} \\ dl &= \frac{1}{2 \cos^2 \eta} \cdot R_{\max} d\eta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(40)$$

これより、 $f_1(\eta)$, $f_2(\eta)$, $f_3(\eta)$ は次式となる。

$$\begin{aligned} f_1(\eta) &= \frac{1}{2 \cos \eta}, \quad f_2(\eta) = \frac{\sin \phi \cdot H_2}{\cos(\eta - \phi)}, \\ f_3(\eta) &= \frac{1}{2 \cos^2 \eta} \quad \dots\dots(41) \end{aligned}$$

したがって39式をまとめると

$$\begin{aligned} C &= \int_{\eta_a}^{\eta_c} \frac{1}{4 \cos^2 \eta} \left\{ \frac{1}{4 \cos^2 \eta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \phi \cdot H_2}{\cos(\eta - \phi)} \right\} d\eta \quad \dots\dots(42) \\ &\quad (\eta_a < \eta < \eta_c) \end{aligned}$$

を得る。 η が η_c と 90° の間にある場合 (R_c がCB上のとき) および 90° と η_b の間にある場合 (R_c がBA上にあるとき) にもそれぞれ C の値が次のように得られる。

$$C = \int_{\eta_c}^{\eta_0} \frac{5}{6} \cdot \frac{\sin \delta}{\cos(\delta - \eta)} \left\{ \left(\frac{\sin \delta}{\cos(\eta - \delta)} \right)^2 - \left(\frac{\sin \phi \cdot H_2}{\cos(\eta - \phi)} \right)^2 \right\} \{ \cos(\eta - \eta_c) - \sin(\eta - \eta_c) \cdot \tan(\delta - \eta) \} d\eta \quad \dots\dots(43)$$

($\eta_c < \eta < 90$)

$$C = \int_{90}^{\eta_b} \frac{\sin \delta}{\sin(\eta + \delta)} \left\{ \left(\frac{\sin \delta}{\sin(\eta + \delta)} \right)^2 - \left(\frac{\sin \phi \cdot H_2}{\sin(\phi - \eta)} \right)^2 \right\} \{ \cos \eta - \sin \eta \times \tan(\delta - \eta) \} d\eta \quad \dots\dots(44)$$

($90 < \eta < \eta_b$)

η の全領域に対する係数 C は (41)~(43) 式の和として求められる。 C は容器形状から決まる角度 δ 、粉体物性 ϕ および粉体装入率 f と ϕ の関係から求まる $H_2 (= h_2/R_{\max})$ の複雑な関係となっているのでこれらの三式を図積分によってそれぞれの値を求めて加算し装入率に対してプロットした例を Fig.13 に示した。

容器回転角 0° ($T_{\min}$ を与える場合) のときの係数も同様の手順で (43) 式のように求められ Fig.13 中に C_1 として示した。

4.2.4 トルク変動曲線 $T(\alpha)$

最小回転トルク $T_{\min}$ は (24), (31) および (33) 式の和として、また、最大トルク $T_{\max}$ は (27), (33) および (35) 式の和として得られる。したがって (20) 式に基づくトルク変動曲線 $T(\alpha)$ は次式で示される。

$$T(\alpha) = \frac{1}{2} [\chi (A_2 \sin \beta_2 - A_1 \sin \beta_1) + \phi \{ L_{G_2} (B_2 + C_2 \mu_w) - L_{G_1} (B_1 + C_1 \mu_w) \}] \cdot \sin 2(\alpha - 45) + \frac{1}{2} [\chi (A_2 \sin \beta_2 + A_1 \sin \beta_1) + \phi \{ L_{G_2} (B_2 + C_2 \mu_w) + L_{G_1} (B_1 + C_1 \mu_w) \}] \quad \dots\dots(45)$$

Fig. 13 C_1, C_2 対 f の関係

$$\chi = \frac{\pi}{4} R_{\max}^3 \cdot L \cdot \rho_a \left(\frac{g}{g_c} \right) f,$$

$$\phi = \left(\frac{3}{4} \pi \right)^2 \frac{\rho_a}{g_c} \cdot R_{\max}^4 \cdot N_s^2$$

4.3 二重円錐型混合機の場合

二重円錐型混合機のトルクは V 型の場合のトルクと同様に容器の回転角によって変動し正弦波で近似した (20) 式では記述できるものとみなした。そこで混合容器の形状を最大回転半径 $R_{\max}$ を基準にして単純な多角形で近似し (Fig.14), 前節の V 型混合機の場合と同じ手法を用いて粉体層の重心を幾何学的に求めて T_g を算出し、また T_k, T_f を算出した。容器の回転角 $\alpha = 0^\circ$ と 90° のときのこれらのトルクの和を求めると $T_{\min}$ および $T_{\max}$ は次式のようにになる。

$$T_{\min} = \frac{2}{3} A_1 \pi (1-n)^2 (1+2n) R_{\max}^4 \cdot \rho_a \left(\frac{g}{g_c} \right) \cdot f \cdot \sin \beta_1 + \left(\frac{3}{4} \pi \right)^2 \frac{\rho_a}{g_c} \cdot R_{\max}^4 \cdot L_{G_1} \cdot N_s^2 (B_1 + C_1 \mu_w) \quad \dots\dots(46)$$

$$T_{\max} = \frac{2}{3} A_2 \pi (1-n)^2 (1+2n) R_{\max}^4 \cdot \rho_a \left(\frac{g}{g_a} \right) \cdot f \cdot \sin \beta_2 + \left(\frac{3}{4} \pi \right)^2 \left(\frac{\rho_a}{g_c} \right) \cdot R_{\max}^4 \cdot L_{G_2} \cdot N_s^2 (B_2 + C_2 \mu_w) \quad \dots\dots(47)$$

ここで、回転軸から重心までの距離 l および鉛直線¹となす角度 β は安息角 ϕ 、粉体表面までの距離 h ($H = h/R_{\max}$) から次のように求まる。

Fig.14(a)(b) A_1, A_2 および B_1, B_2 対 f の関係

Fig. 14(c) C_1, C_2 対 f の関係

$$I_1 = \frac{1}{12(1+\tan\phi)} \left[\{5(1-n)\tan\phi + (5H_1+2-5n)\}^2 + \{(5+n)\tan\phi + (5H_1+2+n)\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot R_{\max} \\ = A_1 R_{\max} \quad \dots\dots(48)$$

$$\beta_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{5(1-n)\tan\phi + (5H_1+2-5n)}{(5+n)\tan\phi + (5H_1+2+n)} \right\} \quad \dots\dots(49)$$

$$I_2 = \frac{1}{12(1+\tan\phi)} \left[\{(2+n+5H_2)\tan\phi + (5+n)\}^2 + \{(5n-2-5H_2)\tan\phi - 5(1-n)\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot R_{\max} = A_2 R_{\max} \quad \dots\dots(50)$$

$$\beta_2 = \tan^{-1} \left\{ \frac{(n+2+5H_2)\tan\phi + 5(1-n)}{(5n-2+5H_2)\tan\phi - 5(1-n)} \right\} \quad \dots\dots(51)$$

混合機の代表長さである L_{G1}, L_{G2} は粉体層の重心 G を通る回転軸方向の距離であり次式で与えられる。

$$L_{G1} = 2(1-A_1 \cos\beta_1) R_{\max} \quad \dots\dots(52)$$

$$L_{G2} = 2(1-A_2 \sin\beta_2) R_{\max} \quad \dots\dots(53)$$

したがってトルク変動曲線 $T(\alpha)$ は(50)式から次式で示される。

$$T(\alpha) = \frac{1}{2} [\chi \{A_2 \sin\beta_2 - A_1 \sin\beta_1\} + \phi \{L_{G2}(B_2 + C_2 \mu_w) - L_{G1}(B_1 + C_1 \mu_w)\}] \\ \cdot \sin 2(\alpha - 45) + \frac{1}{2} [\chi \{A_2 \sin\beta_2 + A_1 \sin\beta_1\} + \phi \{L_{G2}(B_2 + C_2 \mu_w) + L_{G1}(B_1 + C_1 \mu_w)\}] \quad \dots\dots(54)$$

Fig. 15 $T_{cal.}$ 対 $T_{exp.}$ の関係

$$\chi = \frac{2}{3} \pi (1-n)^2 (1+2n) R_{\max}^4 \cdot \rho_a \left(\frac{g}{g_c} \right) \cdot f$$

$$\phi = \left(\frac{3}{4} \pi \right)^2 \frac{\rho_a}{g_c} R_{\max}^4 \cdot N_S^2$$

係数 B_1, B_2 および C_1, C_2 はV型の場合と同様に求められる。ここでは装入率 f と粉体の安息角 ϕ がわかればこれらの係数を容易に求められるように Fig. 14 (a) (b) (c) に f を変数とし、 ϕ をパラメータとした計算結果を線図で示した。

4.4 実験結果と計算値との比較

Fig. 15(a) に(49)式から算出されるV型混合機のトルクの計算値 $T(cal.)$ と種々の粉体および操作条件下で得られた実験値 $T(exp.)$ の関係を、また、同図(b) には(54)式による二重円錐型混合機の $T(cal.)$ と実験値 $T(exp.)$ を示した。これらの結果より(49)式では $\pm 30\%$ 、(54)式では $\pm 20\%$ の精度で各混合機の回転トルクを推算できることがわかった。

5. 所要動力

粉体の運動による動力 P は(5)式で与えられる。この式の中でトルク T の値はすでに述べたように容器の回転角により変動する場合があります、動力の評価に際して T の代表値の選び方が重要になる。

最大トルク $T_{\max}$ より求まる動力を $P_{\max}$ とすると(5)式は $P_{\max} = 2\pi N_S T_{\max} \quad \dots\dots(55)$

Fig.16 P_{max}, P_{av}, P_{rot} 対 N の関係

同様に算術平均トルク T_{av} を用いたときの動力 P_{av} は

$$P_{av} = 2\pi N_s T_{av} = \frac{\pi}{2} N_s (T_{maxI} + T_{maxII} + T_{minI} + T_{minII}) \quad \cdots \cdots (56)$$

また、回転平均トルク T_{rot} を用いたときの動力 P_{rot} は

$$P_{rot} = 2\pi N_s \cdot T_{rot} = N_s \int_0^{2\pi} T(\alpha) d\alpha \quad \cdots \cdots (57)$$

となる。ここで水平円筒型混合機の場合はトルクに周期変動成分を含まないので $P_{av} = P_{rot}$ である。Fig.16にはV型および二重円錐型混合機の P_{max} , P_{av} , P_{rot} を回転速度 N に対して示した。 P_{max} はもっとも大きい値をとり、 P_{av} と P_{rot} はV型では50rpm付近すなわち $N/N_{cr} \approx 0.7$ までほぼ一致した。一方、二重円錐型では70rpmすなわちほぼ N_{cr} まで P_{av} と P_{rot} は一致した。高速度

では P_{max} の増加に従い P_{av} の値が増加した。最終混合度まで到達するのに消費される動力を考慮する場合にはトルク変動曲線 $T(\alpha)$ を積分して得られる T_{rot} に基づく動力 P_{rot} が必要である。しかし混合機の実用操作範囲内では算術平均トルク T_{av} を用いた平均動力 P_{av} で十分動力を代表することができる。すなわち、各混合機の容器回転角 $\alpha = 0^\circ$ および 90° における T_{min} と T_{max} を算出しておく、簡便に平均動力 P_{av} を評価できることがわかった。

6. 結 言

(1) 容器回転型混合機の所要動力を検討するために水平円筒型、V型および二重円錐型混合機を用いて種々の条件下でトルク変動曲線を求め、これらのトルク曲線から次の結果を得た。

i) 回転トルクは主として容器の回転傾斜角による粉体の転動によって生じ、水平円筒型では角転角によらず一定のトルクを示し、V、二重円錐型では容器1回転の間にトルクは2周期の正弦波状の変動を示した。

ii) 低回転速度では最大および平均トルクは回転速度の影響を受けなかった。しかし N/N_{cr} が0.4を越える付近からトルクは N の増加とともに増加し臨界速度の約80%の点で極大値を示す傾向があった。

iii) 平均トルクは粉体装入率の0.6~0.7乗に、見掛密度の1乗に、また最大回転半径の3乗に比例してそれぞれ増大した。

(2) 容器回転型混合機のトルクは粉体層の重心に働く重力と粉体の円運動を持続させる力および遠心力によって生ずる容器壁での摩擦力の和としたモデルを考えて解析した。そして水平円筒型、V型および二重円錐型混合機の回転トルクを半理論的に導出した。これより混合容器の代表寸法 (R_{max} , L)、粉体物性 (ρ_a , ϕ , μ_w) および操作条件 (f , N) が既知ならば (47), (48), (54) 式からトルクが算出でき (5) 式の関係を用いて所要動力の評価が可能となった。

使 用 記 号

a : V型混合機の底部頂角 $[^\circ]$
 D : 水平円筒型混合機の内径 $[m]$
 F : 力 $[Kg]$
 f : 粉体装入率 $[-]$
 g : 重力加速度 $[m/sec^2]$
 g_c : 重力換算係数 $[mkg/sec^2 Kg]$
 H : $=h/R_{max}$ $[-]$
 h : 回転中心から粉体層表面までの距離 $[m]$

K : 補正係数 ($=l/l'$) $[-]$
 k : 壁面摩擦係数の補正係数 $[-]$
 L : 混合機長さ $[m]$
 L_g : 粉体層重心を通る軸方向距離 (代表長さ) $[m]$
 l : 回転軸から重心までの距離 (三次元) $[m]$
 l' : 回転軸から重心までの距離 (二次元) $[m]$
 N, N_s : 回転速度 $[rpm], [rps]$

N_{cr} : 臨界回転速度	[rpm]	V : 混合機容積	[m ³]
n : 二重円錐容器の円筒部の長さ比	[-]	W : 粉体装入量	[kg]
P : 動力	[Kgm/sec]	α : 容器回転角度	[°]
P_{av}, P_{rot} : 平均動力	[Kgm/sec]	β : 重心と鉛直方向のなす角度	[°]
P_{max} : 最大動力	[Kgm/sec]	η : 容器壁上の点と鉛直方向のなす角	[°]
R : 円筒半径	[m]	θ : (1/2) 中心角	[°]
R_{max} : 最大回転半径	[m]	μ_i : 内部摩擦係数	[-]
R_v : V型容器円筒部半径	[m]	μ_w : 壁面摩擦係数	[-]
r : 半径方向距離	[m]	ρ_a : 粉体見掛密度	[kg/m ³]
T : トルク	[Kgm]	σ_c : 半径方向の応力	[Kg/m ²]
T_{av}, T_{rot} : 平均トルク	[Kgm]	ϕ : 安息角	[°]
T_{max}, T_{min} : 最大, 最小トルク	[Kgm]	ω : 回転角速度	[rad/sec]

引用文献

- 1) 大山義年：理研彙報，19，1088 (1940)
- 2) Hogg, R. and D. W. Fuerstenau : *Trans. of SME*, 252, 1 (1972)
- 3) Fan, L. T. and R. H. Wang : *Chem. Eng.*, May 27, 88 (1974)

Authors' Abstract

Power Requirement of Rotary Vessel Mixers

by

Munetake SATO, Kimio YOSHIKAWA, Norio OKUYAMA and Takeo YANO

(Department of Chemical Engineering, University of Osaka Pref.)

Power requirement for mixing powders in a rotary vessel type mixer has been analyzed by introducing a simplified model, which regards the vessel shape of the three dimension as that of two dimension. The total force exerted on the mixer's shaft by the charged powders is assumed to be the sum of ; (i) the gravitational force by the powders bed, (ii) the inertia force for accelerating the powders mass, and (iii) the frictional force acting between the powders bed and the inside wall of the mixer.

Horizontal drum, twin shell (V) and double cones type mixer are used in this work.

Power equations were obtained as the function of the operating conditions, the properties of the powders and the dimension of the mixers. An agreement within an accuracy of $\pm 20\%$ was obtained between the measured power and the one calculated by these equations.

List of Figures and Tables

- Fig. 1** Mixer vessel and experimental apparatus
- Fig. 2** Experimental result of rotating torque
- Fig. 3** Average torque T_{av} , T_{rot} vs. rotating speed N
- Fig. 4** Maximum torque T_{max} vs. N
- Fig. 5** Average torque T_{av} vs. charge ratio f
- Fig. 6(a)** T_{av} vs. bulk density ρ_a
- Fig. 6(b)** T_{av}/ρ_a vs. angle of repose ϕ
- Fig. 7** T_{av} vs. diameter D
- Fig. 8** Relationship of the force in the cross

section of the cylinder

- Fig. 9** η_a, η_b vs. f
- Fig. 10** Calculated value of T from eqs. (17) (19)
- Fig. 11** $T_{cal.}$ vs. $T_{exp.}$
- Fig. 12** Center of gravity in the V type mixer
- Fig. 13** C_1, C_2 vs. f
- Fig. 14(a), (b)** A_1, A_2 and B_1, B_2 vs. f
- Fig. 14(c)** C_1, C_2 vs. f
- Fig. 15** $T_{cal.}$ vs. $T_{exp.}$
- Fig. 16** P_{max}, P_{av}, P_{rot} vs. N
- Table 1** Dimensions of mixer vessel
- Table 2** Physical properties of powders