研究報告

平底容器からの砂の二次元流出（そのⅠ）*

—— 回分流出のフローパタンについて ——

Two-dimensional Flow of Sand from a Flat-bottomed Container (Ⅰ)

五十嵐平太郎**

Heitarō Igarashi

緒言

容器内に充填された粉粒体が器壁の孔から排出する際の粒子の流れ機構については多数の研究がある^{2,3)}が、まだ十分解明されていない。

従来、透明壁を通して様様なフローパタンが観察されている。しかし、いずれも特定寸法の下での特殊なものであり、容器の幾何学的条件とフローパタンの一般的な関係は見い出されていない。

そこで、容器および孔寸法を種々変えて流出実験を行ない、容器寸法とフローパタンの関係を調べたので報告する。実験は乾燥砂の重力による二次元流出の場合について行なった。本報では流動領域の形状とその進行速度について報告する。

1. 実験

1.1 実験装置

実験に用いた容器は図1に示すように四つの鉛直壁に囲まれていて長方形の横断面をもつ。底面は水平で、その中央には側壁に平行なスリットが設けられている。前面および後面は透明なガラス板、左右側壁は表面を平らに削ったラワン板、底面は市販銅板でスリット部分は鋭縁に加工してある。

容器幅 B 、容器奥行 L 、スリット幅 S は種々変え得る構造にし、これらの寸法の組合せを表1に示す。

スリットはシャッター棒の上に乗せた木片によって閉じることができる。シャッター棒を水平方向に抜き去ると木片は自由落下してスリットは瞬間的に開口する。

連続流出実験においては実験容器直上に試料供給用容器を設置し、供給口の幅は実験容器の幅 B に等しくした。

1.2 実験試料

実験に用いた試料は乾燥した相馬標準砂である。その密度は 2.65g/cm^3 、粒径は表2に示すような分布をしており、重量平均径は 0.75mm である。トレーサーとして試料砂よりやや粒度の粗い着色砂を用いたが、その粒径は約 1.7mm 、密度は 2.64g/cm^3 である。

1.3 実験方法

容器への砂の充填は、回分流出実験においては充填むらを生じないように漏斗を用いて少量ずつバラバラ充填した。充填高さは回分流出の全実験を通じて 119cm とした。黒色の着色砂を高き方向に適当な間隔で水平縞状に入れた。

スリットを開いて砂を流出させ、着色砂の動きを時計と一緒に 35mm フィルムに撮影した。用いたカメラは毎秒最高4コマ撮影可能なモータードライブカメラである。

スリットから流出する砂を一定時間容器に受け、その重量を測定して流出速度を求めた。

1.4 実験結果

図1 容器の形状と寸法

表1 容器寸法

流出方式	L [cm]	B [cm]	S [cm]	実験番号
回分	2.00	10.0	0.53	1
			1.08	2
		20.0	0.53	3
			1.08	4
			2.17	5
			1.08	6
	15.0	10.0	1.08	7
		20.0	1.08	8
連続	2.00	20.0	1.08	9

表2 試料砂の粒径分布

粒径 [μ]	重量 百分率 [%]
500~590	2.6
590~710	33.8
710~840	45.9
840~1000	17.7

* 昭和44年2月8日受理

** 長岡工業高等専門学校（新潟県長岡市西片貝町888）

TEL 02582-2-6435

(a) $t=2.2''$ (b) $t=19.2''$ (c) $t=109''$

図 2 (実験 6)

(a) $t=9.5''$ (b) $t=50.1''$ (c) $t=82.2''$

図 3 (実験 4)

(a) $t=18.5''$ (b) $t=780''$

図 4 (実験 9)

(a) $t=1.9''$ (b) $t=4.5''$ (c) $t=14.1''$ (d) $t=22.0''$

図 5 (実験 8)

図 6 流動領域の区分

動している部分を流動領域，静止している部分を静止領域，その境界の曲線を流動境界線とよぶことにする。

流動境界線の方程式を求めるため，図 6 に示すようにスリット中心を原点とする直交座標 x ， y をとる。

流動境界線はスリットの縁 E を通るので横座標 x の代りに ξ ($\xi \equiv x - \sigma$ ，ここに $\sigma \equiv S/2$) を用い

$$y = \phi(\xi) \quad \dots\dots(1)$$

フローパタンの観察結果のうち典型的なもののみを図 2～図 5 に示す。 t は流出開始後の経過時間を表わす。

2. 流動領域の形状と進行速度

2.1 整理の方法

容器および流出孔は図 1 のような形状であるので砂の流れは二次元流れと考えられる。観察平面上で粒子が運

図7 流動境界線の時間的变化

図8 ξ_P^* と t の関係 (B の影響)

なる関数 ϕ を求めると異なる S に対する流動境界線を比較するのに都合がよい。

任意の高さ y における ξ の実測値は y 軸の左右に1個ずつ求められるが、左と右で必ずしも同じ値になっていない。そこで、左右の流動境界線間の水平距離 b を測定し

$$\xi = b/2 - \sigma \quad \dots\dots(2)$$

で計算される ξ を用いることにする。

2.2 指数曲線流動領域

ξ 対 y を両対数方眼紙にプロットした一例を図7(グラフ①～⑥は実験4, ⑦は実験9の測定結果による)に示す。

容器寸法がいずれの場合も、流出初期にはダ円形の流動領域が観察される(図2(a), 図5(a)参照)。図7では①～③がそのプロットである。その形は完全なダ円ではなく y の大きいところで扁平になっている。そこで、図

図9 ξ_P^* と t の関係 (S の影響)

図10 ξ_P^* と t の関係 (L の影響)

6のように流動領域を分割して扱うことにする。 $\log \xi$ 対 $\log y$ のグラフ(図7参照)において y の小さい範囲のプロットを直線で近似すれば、流動境界線の方程式は

$$\frac{y}{y_P} = \left(\frac{\xi}{\xi_P} \right)^{n_P} \quad \dots\dots(3)$$

と表わすことができる。ここに、 ξ_P , y_P , n_P は定数である。図7において(3)式で表わされる直線AB(図6の曲線ABに対応)を任意高さの横線QRで切り、その交点を $P(\xi_P, y_P)$; QRが安息角の傾斜線EFと交わる点を $R(\xi_R, y_P)$; (3)式で表わされる直線がEFと交わる点を $A(\xi_A, y_A)$ とする。点Pは時間とともに直線EFに近づいてゆくが、 ξ_P は ξ_R を越えることはない。そこで ξ_P を

$$\xi_P^* \equiv \xi_P / \xi_R \quad \dots\dots(4)$$

なる無次元距離 ξ_P^* で表わすことにする。 y_P を適当にとり、 ξ_P^* を t に対してプロットすると図8～図10に示すように片対数方眼紙上で直線(折れ線)で近似できるので

$$t = (t_{0.5})^w \quad \dots\dots(5)$$

表 3 n_P , $t_{0.5}$, ξ_{P1}^* の値 ($y_P=5\text{cm}$)

L [cm]	S [cm]	B [cm]	n_P [-]	$t_{0.5}$ [sec]	ξ_{P1}^* [-]	t の範囲 [sec]
2.00	0.53	20.0	1.5~1.7	56	0.23	$t < 56$
					0.36	$t > 56$
	1.08	10.0	1.3~1.5		0.30	$t < 32$
		20.0	1.5~1.7	32	0.40	$t > 32$
		30.0	1.4~1.6			
	2.17	20.0	1.5	20	0.39 0.41	$t < 20$ $t > 20$
15.0	1.08	10.0	1.4~1.8	6.2	0.30	$t < 32$
		20.0	1.4~1.8	8.8	0.32	$t < 80$

ただし

$$\omega = \frac{\xi_{P^*} - \xi_{P1}^*}{0.5 - \xi_{P1}^*} \quad \dots\dots(6)$$

が得られる。ここに、 ξ_{P1}^* は $t=1[\text{sec}]$ のときの ξ_{P^*} の値、 $t_{0.5}$ は $\xi_{P^*}=0.5$ のときの t の値を表わす。

(3)式の指数 n_P の値を表3に示す。一般に n_P は容器寸法および時間によって異なる値を示すが、流出初期および末期を除くと n_P はほぼ一定である。そのような t の範囲に対しては(5)式は y_P の値には無関係に成立つ。しかし、定数 ξ_{P1}^* と $t_{0.5}$ は y_P の値に関係しているので、 y_P の値を指定する必要がある。図8～図10はいずれも $y_P=5\text{cm}$ のグラフで、これから定数 ξ_{P1}^* , $t_{0.5}$ を求め、表3に示した。

図8～図10および表3から次のことがいえる。

i) S , L の同一の容器においては流動境界線の進行速度は B によって変わらない (図8)。

ii) B , L の同一の容器においては流動境界線の形状は S によって変わらないが、その進行速度は S 大なる程大である (図9)。

iii) 流動境界線の形状および進行速度におよぼす L の影響は著しい(図10, 表3)。 t が十分大きくなると ξ_{P^*} は一定の限界値 ξ_{Pu}^* に近づいてゆく。図10または図4と図5とを比較すれば明かなように $L=15.0\text{cm}$ の ξ_{Pu}^* (実測されていないがその推定値) は $L=2.00\text{cm}$

のそれ ($\xi_{Pu}^*=0.60$) よりかなり大きいことがわかる。

Gardner¹⁾ は流動境界線の極限形状を流動領域が塑性平衡にあるものと仮定して理論的に求めているが、 L によってその形状が変わることに注意する必要がある。

同一の ξ_{P^*} たとえば $\xi_{P^*}=0.5$ にいたる時間は同一の S に対して L 大なるとき小である(図10)。すなわち、流動境界線の進行速度は L 大のとき大となる。この理由は次のように考えられる。

容器内の粒子は粒子相互の摩擦力ならびに粒子-壁間の摩擦力によってブリッジ(架橋)を形成しようとする。 L 小のときはこのブリッジ作用は L 大のときに比べて強いと考えられる。そのため L 小なる程、前後面壁が粒子運動を妨げる効果は大きく、したがって流動境界線の進行も妨げられる。

2.3 鉛直流動領域

図6の領域Ⅲにおいては流動境界線 BC は側壁 LM に平行となり、粒子は鉛直に下降する。この領域の ξ を t に対して両対数方眼紙にプロットすると図11に示すように上に凹の曲線となる。

図11から明かなようにこの領域においても領域Ⅱの場合と同じく流動境界線の進行速度は B によって変わらない。また、 $L=15.0\text{cm}$ の場合の流動境界線の進行速度は $L=2.00\text{cm}$ の場合に比べてきわめて大きく、 $\xi-t$ グラフは求められなかった (図5参照)。

$L=2.00\text{cm}$ の場合、図11の横軸 t の代りに適当な定数 τ を加えた $t+\tau$ を用いて、 ξ 対 $t+\tau$ のグラフを描くと図12に示すように直線となる。したがって、次の実験式が得られる。

$$\xi = k_V (t + \tau)^{n_V} \quad \dots\dots(7)$$

流動境界線の進行速度を $\dot{\xi}$ とすると(7)式から

図11 鉛直流動領域の流動境界線の進行

図12 ξ と $t+\tau$ の関係

表 4 $\tau, \xi_{v1}, \dot{\xi}_{v1}$ の値
($L=2.00\text{cm}$)

S [cm]	τ [sec]	ξ_{v1} [cm]	$\dot{\xi}_{v1}$ [cm/sec]
0.53	2.0	1.40	0.213
1.08	1.0	1.84	0.499
2.17	1.0	2.70	0.839

$$\dot{\xi} = k_v n_v (t + \tau)^{n_v - 1} \quad \dots\dots(8)$$

ここに、 k_v および n_v は S によって定まる定数である。
 $t=1[\text{sec}]$ のときの ξ および $\dot{\xi}$ をそれぞれ ξ_{v1} 、 $\dot{\xi}_{v1}$ と表わせば、定数 n_v および k_v はそれぞれ

$$n_v = (1 + \tau) (\dot{\xi}_{v1} / \xi_{v1}) \quad \dots\dots(9)$$

$$k_v = \xi_{v1} / (1 + \tau)^{n_v} \quad \dots\dots(10)$$

によって物理的に意味のある定数 ξ_{v1} 、 $\dot{\xi}_{v1}$ でおきかえることができる。図12から ξ_{v1} 、 $\dot{\xi}_{v1}$ を求めた結果を表4に示す。当然予想されることであるが、 ξ_{v1} および $\dot{\xi}_{v1}$ は S 大なる程大となっている。

図13 (両対数) および図14 (片対数) のグラフから次の実験式が得られる。

$$\xi_{v1} = k_1 S^{n_1} \quad \dots\dots(11)$$

$$\dot{\xi}_{v1} = \log k_2 S^{n_2} \quad \dots\dots(12)$$

C G S 単位で定数の値を求めると $k_1=1.85$ 、 $n_1=0.468$ 、 $k_2=3.06$ 、 $n_2=1.04$ が得られる。これらの定数は L によって異なることが予想される。

流動境界線BCが側壁LMに到達するまでに要する時間 t_w は(7)式を用いて次式で与えられる。

$$t_w = \left(\frac{\lambda - \sigma}{k_v} \right)^{1/n_v} - \tau \quad \dots\dots(13)$$

ここに、 $\lambda \equiv B/2$ である。

2. 4 アーチ形流動領域

流出初期のダ円形流動領域の上層部における幅 b は y とともに減少し、アーチ形の流動境界線となっている。図6の領域Ⅳの流動境界線の曲率は小さく、直線で近似

図13 ξ_{v1} と S の関係

図14 $\dot{\xi}_{v1}$ と S の関係

図15 y_T と t の関係

できる。この領域では横座標として x をとるのが適当と考えられるので直線CDの方程式は

$$y = -k_A x + C_A \quad \dots\dots(14)$$

で与えられる。勾配 k_A は t とともに次第に大きくなる。 k_A の実測値は10~20の範囲にあった。

図6の領域Ⅴにおける破線DTは粒子の速度勾配の大きいと思われるところを想定して描いたもので、流動境界線は不明りょうである。粒子の運動はDT'の範囲まで伝わっているのが観察される。

アーチ形流動領域の先端Tは明確には定め難いが、点D近傍の流動境界線より外そうし、その高さ y_T を時間 t に対してプロットすると図15のようになる。 $L=15.0$ cm の場合はダ円形流動領域が大きく成長しないうちにマスフローを生ずる(図5参照)ので y_T-t のプロットは得られなかった。

図15において、同一の S に対しては B が異なってもほぼ同一の y_T-t 曲線が得られる。すなわち頂点Tの上昇速度も流動境界線ABおよびBCの進行速度と同様 B の影響を受けないことがわかる。ただし、図15において $B=10.0\text{cm}$ のプロットが y_T の大きいところで $B=20.0\text{cm}$ および 30.0cm の場合に比べて下っているのは頂点Tが自由表面に達しないうちに流動境界線BCが側壁に

表 5 粒子運動伝ば速度の比較 ($L=2.00\text{cm}$)

S [cm]	0.53		1.08		2.17	
t [sec]	1	10	1	10	1	10
$\dot{\xi}$ [cm/sec]	0.21	0.10	0.50	0.23	0.84	0.44
y_T [cm/sec]	5.5		24		90	

達しマスフローが起こっているためである。マスフローを生じてから後もしばらくはダ円形流動領域は成長する。

図15において、 $t < t_c$ なる範囲を除けばいずれの S に対しても次式が成立つ。

$$y_T = \dot{y}_T + C_T \quad \dots\dots(15)$$

図16 y_T と S の関係

定数 $\dot{y}_T$, C_T を図15中の表に示した。 $\dot{y}_T$ は頂点Tの上昇速度を表わしている。これを S に対して両対数方眼紙にプロットすると図16に示すように直線となるので

$$\dot{y}_T = k_3 S^{n_3} \quad \dots\dots(16)$$

なる実験式が得られる。係数 k_3 および指数 n_3 は L によって異なることが予想されるが、 $L=2.00\text{cm}$ の場合には $k_3=20.0$, $n_3=2.05$ (CGS単位使用)であった。

ここで、(8)式および(16)式によって水平および鉛直方向への粒子運動の伝ば速度を比較してみよう。計算例を表5に示す。表5から明かなように鉛直方向の粒子運動の伝ば速度は水平方向のそれに比べてきわめて大きい。また、その傾向は S 大なる程著しい。

頂点Tが自由表面まで達するに要する時間 t_s は初めの粒子層高を y_0 とすると(15)式を用いて

$$t_s = (y_0 - C_T) / \dot{y}_T \quad \dots\dots(17)$$

によって計算することができる。

2.5 自由表面流動領域

図7のグラフ④および⑤は流動領域が自由表面に達した後の流動境界線の例である。容器中心部の粒子速度は大きいいため、表面中央は凹んでV字形の傾斜面を形成する。そのため側壁部の粒子はV字形斜面に沿って中央に

向って滑り込む。V字形斜面の形成初期ではその傾斜角は小さいが、流れが発達するにしたがって排出角 ϕ_R に近い値となる(図2(b), 図3(a)参照)。

図7のグラフ⑥のように流動境界線ABが側壁に接触するようになると接触点から上はマスフローとなるので粒子は側壁に沿って下降運動をする。そのために自由表面は図3(b)のように三角堰の堰板の形状を呈する。 B 大なる場合は図2(c)に示すように流動境界線ABが側壁に達しないうちに流出が完了するため図3(b)のフローパターンは観察されない。図3(c)に示すように層高が小さくなると流動境界線ABは極限状態に近づいてその進行は止まっているので、(b)のように側壁に沿っての粒子の下降運動は起こらなくなる。そのため再びV字形の傾斜面が形成される。

流出完了際には粒子は傾斜面に沿って間欠的ななだれ運動を起こす。

流出が完了すると図6の領域FEM内の粒子は永久に容器内に残留し、排出角と呼ばれる安息角 ϕ_R を形成する。 ϕ_R の値は容器および排出口の影響を受けて変るが、本実験においては $39\sim 41^\circ$ であった。

図5に示すような L 大なる場合は流出開始後短時間でマスフローを生じ、自由表面は平らである。流出末期にV字形の傾斜面ができるのは L 小の場合と同様である。

2.6 総括

流動境界線の形状を表わす実験式をまとめると次のようになる。

i) L 小, B 大でダ円形流動領域の頂点が自由表面に達する場合:

a) $t \leq t_s$ のとき

$$0 \leq y \leq y_A; y = \xi \tan \phi_R$$

$$y_A \leq y \leq y_B; y = y_P \left(\frac{\xi}{\xi_P} \right)^{n_P}$$

$$y_B \leq y \leq y_C; \xi = k_V(t + \tau)^{n_V}$$

$$y_C \leq y \leq y_D; y = -k_A x + C_A$$

b) $t_s \leq t \leq t_W$ のとき

$$0 \leq y \leq y_A; y = \xi \tan \phi_R$$

$$y_A \leq y \leq y_B; y = y_P \left(\frac{\xi}{\xi_P} \right)^{n_P}$$

$$y_B \leq y \leq y_S ; \xi = k_V(t + \tau)^{n_V}$$

c) $t_W \leq t$ のとき

$$0 \leq y \leq y_A ; y = \xi \tan \phi_R$$

$$y_A \leq y \leq y_U ; y = y_P \left(-\frac{\xi}{\xi_P} \right)^{n_P}$$

$$y_U \leq y \leq y_S ; \xi = \lambda - \sigma$$

ii) L 小, B 小でダ円形流動領域の頂点が自由表面に達しない場合:

a) $t \leq t_W$

i) の(a)と同じ

b) $t_W \leq t$

i) の(c)と同じ

iii) L 大, B 小でダ円形流動領域が極く短時間で消滅する場合: i) の(c)と同じ

結 言

容器内の砂の二次元流出のフローパタンの観察結果, 次の知見を得た。

1) 粒子運動は容器幅 B による影響を受けない。

2) 粒子運動は容器奥行 L により著しく影響される。

L 小のとき前後面壁によるブリッジ作用が強いため粒子運動は妨げられ, フローパタンはプラグフローとなる。 L 大なときはマスフローとなる。

3) スリット幅 S は流動境界線の形状に影響しない。

4) 流動境界線の形状を表わす実験式を提出した (2. 6節参照)。

〔付記〕 実験に協力された高橋治道, 温井 満, 土田興作, 荒川純一, 星野清一の諸氏に謝意を表する。

記 号

B : 容器幅	[cm]	y_P : (3)式における定数	[cm]
b : 流動領域の幅	[cm]	y_S : 任意の t における自由表面の高さ	[cm]
C_A : (14)式における定数	[cm]	y_T : ダ円形流動領域の頂点の高さ	[cm]
C_T : (15)式	[cm]	$\dot{y}_T$: (15)式における定数	[cm/sec]
k_A : (14)式	[-]	y_U : 側壁における静止領域の高さ	[cm]
k_V : (7)式	[-]	y_0 : $t=0$ における自由表面の高さ	[cm]
k_1 : (11)式	[-]	λ : $B/2$	[cm]
k_2 : (12)式	[-]	ξ : $x - \sigma$	[cm]
k_3 : (16)式	[-]	$\dot{\xi}$: $d\xi/dt$	[cm/sec]
L : 容器奥行	[cm]	ξ_P : 図7の点 P の ξ	[cm]
n_P : (3)式における指数	[-]	ξ_P^* : ξ_P/ξ_R	[-]
n_V : (7)式	[-]	ξ_{P1}^* : $t=1$ [sec] における ξ_P^*	[-]
n_1, n_2, n_3 : (11), (12), (16)式における指数	[-]	$\xi_{P\infty}^*$: ξ_P^* の極限值	[-]
S : スリット幅	[cm]	ξ_R : $y_P \cot \phi_R$	[cm]
t : 流出開始後の経過時間	[sec]	ξ_{V1} : 図6領域Ⅲの ξ の $t=1$ [sec] における値	[sec]
t_c : 図15における定数	[sec]	ξ_{V1} : 図6領域Ⅲの $\dot{\xi}$ の $t=1$ [sec] における値	[cm/sec]
t_S : ダ円形流動領域が自由表面に達するまでの時間	[sec]	σ : $S/2$	[cm]
t_W : 流動境界線BCが側壁に達するまでの時間	[sec]	τ : (7)式における定数	[sec]
$t_{0.5}$: (5)式における定数	[sec]	ϕ_R : 排出角	[degree]
x : 流動境界線の横座標	[cm]	ω : $(\xi_P^* - \xi_{P1}^*) / (0.5 - \xi_{P1}^*)$	[-]
y : 流動境界線の縦座標	[cm]		
y_A, y_B, y_C, y_D : 図6における点A, B, C, Dの y の値	[cm]		

引 用 文 献

- 1) Gardner, G. C.: *Chem. Eng. Sci.*, **21**, 261 (1966)
- 2) 五十嵐平太郎, 青木隆一: *化学工学*, **28**, 698 (1964)

- 3) 篠原邦夫: *化学工学*, **32**, 752 (1968)

Abstract

Two-dimensional Flow of Sand from a Flat-bottomed Container (I)

By Heitarō Igarashi
(Nagaoka Tech. Coll.)

Experiments on the two-dimensional flow of sand were carried out to investigate the flow behavior of granular materials in a container.

Following results were obtained from the observation of the non-steady flow boundary.

(1) Container width B does not affect the shape and development-rate of the flow boundary (Figs.

8, 11, 15).

(2) Container depth L produces the remarkable effect upon the flow region (Fig. 10).

(3) Slit width S has no effect upon the shape of the flow boundary.

(4) An expression giving the shape of the flow boundary is presented in Section 2.6.