参 考 資 料

開回路ボールミル内粒子の流量動特性について*

Dynamic Characteristics of Rate of Flow of Powders in an Open-circuit
Ball Mill

山 崎 昌 男**

Masao Yamazaki

1. 緒 言

化学装置において、あるプロセス変量に着目しその時間変化を論ずる場合に、その装置の伝達関数を決定しなければならない。

理論的に伝達関数を導ける場合でも得られる結果は複雑な形になるのが通常で、これをむだ時間と一次おくれ要素一個で近似できる場合が多いことはよく知られている¹⁾。

筆者はボールミルのプロセス変量として流量（粒子排出速度）を選び、流量動特性を表現する伝達関数としてむだ時間と一次おくれ要素二個を採用し、これがよい近似を示すことを見出し、むだ時間と時定数（26%変化）両パラメータの決定方法について報告を行なった^{2,4)}。

ここではミル入力（ミルへの粒子供給速度）として通常の連続信号系を加えた場合のほか、不連続信号系を加えた場合の応答をも、さきの伝達関数から求め、各結果について比較検討を行なった。

2. 連続信号系に対する応答

入出力の間には周知のつぎの関係がある。

$$y(s) = G(s)x(s) \quad \cdots \cdots (1)$$

$$y(t) = L^{-1} [G(s)x(s)] \quad \cdots \cdots (2)$$

ここで、 s ：ラプラス変換のパラメータ、 t ：時間[min]、 $x(t)$ ：入力（供給速度）[g/min]、 $y(t)$ ：出力（排出速度）[g/min]、 $G(s)$ ：ミル伝達関数である。

$G(s)$ としては、むだ時間 t_d と時定数 T (63%変化) を用い

$$\frac{e^{-st_d}}{1+sT}$$

を仮定するのが普通である¹⁾。しかしこの伝達関数の過渡応答は立上り部分がかかなり急峻である（高周波特性がよい）。一方、ミルをはじめその他の装置ではその過渡応答の立上りは一般にゆるやかであって、いわゆるS字型の経過をたどる場合が多い（高周波特性が悪い）。

したがって伝達関数の高周波特性を低下させ実際の応答に適合させるため、つぎの伝達関数を考えてみる。

$$\frac{e^{-st_d}}{(1+s\tau)^n} \quad (n=2, 3, \cdots \cdots)$$

ここで $n=2, 3, \cdots \cdots$ と増すにつれての応答の立上りは悪くなり、目的を達するが実用的には、 $n=2$ の場合がもっとも簡単である。またミルの場合、これで十分な場合が多く、以後、次式を採用することにする。

$$G(s) = \frac{e^{-st_d}}{(1+s\tau)^2} \quad \cdots \cdots (3)$$

ここで、 t_d ：むだ時間[min]、 τ ：時定数（26%変化）である。

また、ミルのデルタ応答 $g(t)$ は(3)式を逆変換し、次式で与えられる。

$$g(t) = \frac{t-t_d}{\tau^2} e^{-\frac{t-t_d}{\tau}} \quad \cdots \cdots (4)$$

任意の入力 $x(t)$ に対する応答 $y(t)$ は(1)、(2)式から求められるが、(4)式ならびに次式からも求められる。

$$y(t) = \int_0^t g(\xi) x(t-\xi) d\xi \quad \cdots \cdots (5)$$

* 昭和44年2月18日受理

** 名古屋大学工学部化学工学科（名古屋市千種区不老町）
TEL 052 781 5111

図1 ステップ入力に対するミルの応答 (過渡応答)

図2 定速度入力に対するミルの応答

図3 おくれ \$t_d\$ をもつパルス・ステップ入

図4 パルス・ステップ入力に対するミルの応答

図5 閉回路粉碎において戻粉をサンプル動作する場合

[i] ステップ入力

この入力に対するミルの応答がいわゆる過渡応答であり、 K_1 : 供給速度 [g/min], $u(t)$: 単位関数 [-] とするとき

$$x_1(t) = K_1 u(t) \quad \dots\dots (6)$$

$$x_1(s) = K_1/s \quad \dots\dots (7)$$

であり、この応答は(2), (3), (7)式または(4), (5), (6)式から

$$y_1(t) = K_1 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{t-t_d}{\tau} \right) e^{-\frac{t-t_d}{\tau}} \right\} \quad \dots\dots (8)$$

で与えられる。これらの関係を図1に示した。

[ii] 定速度入力

供給速度の増加率を K_2 [g/min²] とするとき入力

$$x_2(t) = K_2 t \quad \dots\dots (9)$$

$$x_2(s) = K_2/s^2 \quad \dots\dots (10)$$

と表わされ、この応答は[i]と同様に求めて次式を得るが、これを図2に示した。

$$y_2(t) = K_2 \{ (t-t_d-2\tau) + (t-t_d+2\tau) e^{-\frac{t-t_d}{\tau}} \} \quad \dots\dots (11)$$

3. 不連続信号系に対する応答

電磁フィーダを少量の供給速度 (たとえば 100 [g/min]) に認定しても、 ± 10 [%] の精度で長時間連続供給することは一般に困難であり、場合によっては 100 [g] の粒子を 1 分ごとに、または 50 [g] を 30 [sec] ごとに投入する方法も有効である。すなわち図3のように

周期 T [min] の間歇的な供給方法をとった場合、 $y(t)$ は波を打ちながら次第に増加し、定常値に達するものと思われる。一周期の間に排出された量を、時刻 nT に対してプロットすると図4のごとなるが、この計算例については後に示す。

また実験室用小型ミルを閉回路粉碎系にすると粒子の連続循環は意外にむづかしく、たとえば図5のように分級器 (ふるい網) 戻粉出口にダンパを設け、手動で開閉するサンプル動作の方が容易な場合もあり、これらには Z 変換の扱いが適用できる⁴⁾。また Z 変換の定義にもとづきミル単独の滞留時間分布を閉回路粉碎系のなかから分離して推定する方法を小沼らは報告している⁵⁾。

ここでは前節と同様流量に着目し、 Z 変換のパラメータを Z 、拡張パルス伝達関数を $G(z, m, l)$ とするとき、ラプラスおよび Z 両変換をした入出力の関係を図6に示した。 Z 変換では入力信号のおくれ t_l [min] もミルのおくれに含める必要があり、(1), (2)式と同様次式が成り立つ^{1, 4)}。

$$y(z) = G(z, m, l) x(z) \quad \dots\dots (12)$$

$$y(nT) = z^{-1} [G(z, m, l) x(z)] \quad \dots\dots (13)$$

$$G(z, m, l) = \frac{T d^m}{\tau^2} z^{-l} \left\{ \frac{mz}{z-d} + \frac{d}{(z-d)^2} \right\} \quad \dots\dots (14)$$

$$d = e^{-\frac{T}{\tau}}, t_e + t_d = (l-m)T, l=0, 1, 2, \dots, 1 > m \geq 0 \quad \dots\dots (15)$$

図6 ミルの伝達関数および拡張パルス伝達関数に対する入出力の関係

図7 おくれ t_l をもつパルス定速度入力

[i] パルス・ステップ入力

図3のような入力を加えた場合の応答を考える。 k_1 [g]の粒子を短時間にミルへ投入し、これを周期 T [min]で繰り返すとき、入力デルタ関数 $\delta(t)$ を用いて

$$x_1(t_l+nT) = \sum_{n=0}^{\infty} k_1 \delta \{t - (t_l+nT)\} \quad \dots\dots(16)$$

ここで、 $t_l=0$ の場合、入力の Z 変換は次式で与えられる

$$x_1(z) = \frac{k_1 z}{z-1} \quad \dots\dots(17)$$

この応答は(12), (13), (14)式から次式となる。

$$y_1(nT) = \frac{T d^m}{\tau^2} k_1 \left\{ \frac{m - (n-l+m)d^{n-l+1}}{1-d} + \frac{d - d^{n-l+1}}{(1-d)^2} \right\} \quad \dots\dots(18)$$

また(4), (5), (16)式からも同結果が得られる。これによる計算値は(8)式から得られる値よりはやや大きいがほぼ一致している。実測値との比較は図11に示した。

[ii] パルス定速度入力

図2のような定速度入力をサンプル動作によりパルス化した場合図7のようになり次式で表わせる。

$$x_2(t_l+nT) = \sum_{n=0}^{\infty} k_2(t-t_l) \delta \{t - (t_l+nT)\} \quad \dots\dots(19)$$

図8 パルス定速度入力に対するミルの応答

$t_l=0$ の場合は[i]と同様に

$$x_2(z) = \frac{k_2 T z}{(z-1)^2} \quad \dots\dots(20)$$

となる。ここで k_2 [g/min]は供給速度の増加率である。この応答は(13), (14), (20)式または(4), (5), (19)式から次式で与えられる。

$$y_2(nT) = \frac{T d^m}{\tau^2} k_2 T \left\{ \frac{m(n-l)}{1-d} + \frac{(n-l-1-m)d + (n-l-1+m)d^{n-l+1}}{(1-d)^2} - \frac{2(d^2 - d^{n-l+1})}{(1-d)^3} \right\} \quad \dots\dots(21)$$

この経過は図8のごとくなるが、図2のそれとほぼ同じ傾向を示す。

[iii] 閉回路粉砕において戻粉をサンプル動作した場合

図5の各記号はすべて粒子流量であり、 m : 仕込量、 $r(t)$: 戻粉流量、 f : 供給速度、 p : 排出速度、 $y(t)$: p の変化分、 g : 精粉流量 [g/min]を意味している。

まず、 m 一定として開回路粉砕を行ない($r=y=0$)、定常状態($m=p$)にあるとする。

これを閉回路粉砕に切替えた場合、 $r(t)$ の初期経過($t=0 \sim 30$ [min])に対してはほぼ図9のごとくなる。これは図3および図7の各入力の和と考えられ、応答も図4と図8の各出力の和とみなせば

$$r(t_l+nT) = \sum_{n=0}^{\infty} \{k_1 + k_2(t-t_l)\} \delta \{t - (t_l+nT)\} \\ = x_1(t_l+nT) + x_2(t_l+nT) \quad \dots\dots(22)$$

$$r(z) = x_1(z) + x_2(z) \quad \dots\dots(23)$$

$$y(nT) = y_1(nT) + y_2(nT) \quad \dots\dots(24)$$

図9 サンプル動作した戻粉の時間変化(パルス戻粉)

図10 パルス戻粉入力に対するミルの応答

となり、④式を図示すれば図10となる。実験値との比較は図12に示す。

[iv] パルス・ステップ入力の場合(計算例)⁴⁾

この場合(8)式のむだ時間にサンプル動作によるおくれ t_l を含めて $t_d \equiv t_l + t_a$ とおくことになる。ミルの τ , t_d は既知であり、実験条件から K_1 , t_l も指定される。すなわち以下の値をとるものとする。

$K_1 = 50$ [g/min], $\tau = 4.46$ [min], $t_l = 0.5$ [min], $t_d = 0.2$ [min], また(8)式では上の値のほかさらに

$T = 1$ [min], $d = e^{-\frac{T}{\tau}} = e^{-0.224} = 0.799$ [-], $k_1 = 50$ [g], $t_l + t_d = 0.7 = 1 - 0.3 \equiv (l-m)T$, より $l = 1$ [-], $m = 0.3$ [-] となる。このとき(8)式は

$$y_1(nT) = 50 - (11.7n + 50)(0.799)^n \dots (18)'$$

これらの計算値と実験値とを図11に示した。図の記号で $FL_{1.9}$ はフィードに石灰石 (2.5~1.2 [mm], 平均 1.9[mm]) を使用し, n_{40} はミル回転速度が臨界回転速度 (83.9[rpm]) の40[%] (33.6[rpm]) であり, J_{20} はボール充填比が20[%], $x_{0.50}$ はサンプル入力を0から 50[g] に急変したことを意味する。

[v] 閉回路粉碎の場合(計算例)⁴⁾

④式に示したごとくこれはパルス・ステップ入力

表1 各応答のまとめ

入 力	$x_i(t)$	$x_i(s)$, $x_i(z)$	$y_i(t) = L^{-1}[G(s)x_i(s)]$, $y_i(nT) = z^{-1}[G(z, m, l)x_i(z), t_d \neq 0]$	$y_i(t)$, $y_i(nT)$, $t_d = 0$
ステップ	$x_1(t) = K_1 u(t)$	$x_1(s) = \frac{K_1}{s}$	$y_1(t) = K_1 \left\{ 1 - \left(1 + \frac{t-t_d}{\tau} \right) e^{-(t-t_d)/\tau} \right\}$	$y_1(t) = K_1 \left\{ 1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right\}$
定速度	$x_2(t) = K_2 t$	$x_2(s) = \frac{K_2}{s^2}$	$y_2(t) = K_2 \left\{ (t-t_d-2\tau) + (t-t_d+2\tau)e^{-(t-t_d)/\tau} \right\}$	$y_2(t) = K_2 \left\{ (t-2\tau) + (t+2\tau)e^{-t/\tau} \right\}$
パルスステップ	$x_1(t_l + nT) = \sum_{n=0}^{\infty} k_1 \delta(t - (t_l + nT))$	$x_1(z) = \frac{k_1 z}{z-1}$	$y_1(nT) = \frac{T d^m}{\tau^2} k_1 \left\{ \frac{m - (n-l+m)d^{n-l+1}}{1-d} + \frac{d - d^{n-l+1}}{(1-d)^2} \right\}$	$y_1(nT) = \frac{T}{\tau^2} k_1 \left\{ \frac{-nd^{n+1}}{1-d} + \frac{d - d^{n+1}}{(1-d)^2} \right\}$
パルス	$x_2(t_l + nT) = \sum_{n=0}^{\infty} k_2 (-t_l) \delta(t - (t_l + nT))$	$x_2(z) = \frac{k_2 T z}{(z-1)^2}$	$y_2(nT) = \frac{T d^m}{\tau^2} k_2 T \left\{ \frac{m(n-l) + (n-l-1-m)d + (n-l-1+m)d^{n-l+1}}{(1-d)^2} - \frac{2(d^2 - d^{n-l+1})}{(1-d)^3} \right\}$	$y_2(nT) = \frac{T}{\tau^2} k_2 T \times \left\{ \frac{(n-1)(d + d^{n+1})}{(1-d)^2} - \frac{2(d^2 - d^{n+1})}{(1-d)^3} \right\}$
定速度	$x_3(t) = K_3 t$	$x_3(s) = \frac{K_3}{s^2}$	$y_3(t) = K_3 \left\{ (t-t_d-2\tau) + (t-t_d+2\tau)e^{-(t-t_d)/\tau} \right\}$	$y_3(t) = K_3 \left\{ (t-2\tau) + (t+2\tau)e^{-t/\tau} \right\}$
パルス戻粉	$x_4(t) = K_4 u(t)$	$x_4(s) = \frac{K_4}{s}$	$y_4(t) = K_4 \left\{ 1 - \left(1 + \frac{t-t_d}{\tau} \right) e^{-(t-t_d)/\tau} \right\}$	$y_4(t) = K_4 \left\{ 1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right\}$

図11 パルス・ステップ入力に対するミルの応答と実験値との比較。 $K_1=50$ [g/min], $\tau=4.46$ [min], $t_l=0.5$ [min], $t_d=0.2$ [min], $T=1$ [min], $d=0.799$ [-], $k_1=50$ [g], $l=1$ [-], $m=0.3$ [-]

とパルス定速度入力の重畳であるから、(8)、(11)式において

$K_1=30$ [g/min], $K_2=0.806$ [g/min], $\tau=4.46$ [min], $t_l=0.5$ [min], $t_d=0.2+1.0=1.2$ [min], また(18)、(21)式では(iv)と同じく $T=1$ [min], $d=0.799$ [-], $k_1=30$ [g], $k_2=0.806$ [g/min], $t_l+t_d=1.7=2-0.3=(l-m)T$, より $l=2$ [-], $m=0.3$ [-]を得る。

このとき(24)式は(18)、(21)式より

$$y(nT) = (21.6 + 0.807n) - (6.06n + 16.3)(0.799)^{n-1} \quad \dots\dots(24)'$$

となる。これらの計算値と実験値を図12に示した。ここで t_d を 0.2 [min]でなく 1.2 [min]としたのは最初の炭粉入力が 1.5 [min]後に投入開始されるので 0.2 [min]としては 1 [min]の不足になるのでこれを t_d に含めたためである。

また図12において $C_{1.2}$ は分級を 1.2 [mm]のふるい網で行ない、 r_{30}^{60} はサンプル動作した炭粉入力が 30 [g]から 60 [g]へ直線的に変化したことを意味する。

図11では実験値と計算値との対応は良好である。図12では炭粉入力の変動が大きく、出力の変動も大きい、実験値は計算値とはほぼ同傾向にあると考えられる。すな

図12 パルス炭粉入力に対するミルの応答と実験値との比較。 $K_1=30$ [g/min], $K_2=0.806$ [g/min²], $\tau=4.46$ [min], $t_l=0.5$ [min], $t_d=1.2$ [min], $T=1$ [min], $d=0.799$ [-], $k_1=30$ [g], $k_2=0.806$ [g/min], $l=2$ [-], $m=0.3$ [-]

わち、ボールミルは一般に大きい時定数をもつので、これに比べ短い周期で粒子供給を行なう場合は、ミルの平均化作用により不連続波形をもつミル内粒子は連続波形へ移行してゆくものと考えられる。

4. 結 論

ボールミルに種々の波形で粒子供給を行なった場合、ミル排出速度の応答について考察した。その結果は以下のごとくである。

(i) ミルの伝達関数としては、むだ時間と一次おくれ要素二個でよく近似でき、この過渡応答はS字型になるが、ミル以外の一般の化学装置に対してもこの伝達関数は適用し得るものと思われる。

(ii) パルス状に粒子供給を行なった場合には、前記の伝達関数を拡張パルス伝達関数に変形し、Z変換によりその応答を求められる。また多少冗長になるが、(2)または(5)式からも同結果を求められる。

(iii) 供給粒子は粉碎と同時に混合され平均化作用を受ける。ミルの時定数は通常かなり大きいため、供給速度が変動しても、排出速度はかなり平滑化される。前記伝達関数は電気回路におけるいわゆる低域ロ波器に相当し高周波成分をカットする性質をもつ。高周波成分を多くもつパルス状入力に対して、ミルの出力が連続波状入力に対するそれと大差ないことは、この対応がほぼ妥当であることを示しているものと考えられる。

引 用 文 献

- 1) 高橋安人：自動制御理論, p. 98, 209 岩波(1959)
- 2) 山崎：セメント技術年報, 17, 137(1963)
- 3) Mori, Y., Jimbo, G. and Yamazaki, M.: Dechema-Monographien, Bd. 57(2. Europäischen Symposions „Zerkleinern“ Amsterdam) Teil 2, p. 605 Verlag Chemie (1967)
- 4) 山崎：日本セメント株式会社研究所要報 第254号, p. 50, 152 (1962)
- 5) 小沼, 川端, 安斉：化学工学, 32, 1026 (1968)