確率フルイの原理と計算*

Principles and Calculations of Screening Based on a Probability Theory

三 輪 茂 雄** 細 川 宏**

Shigeo Miwa

Hiroshi Hosokawa

1. は し が き

フルイ分け過程の理論の基礎として、古くから知られている Gaudin のフルイ分け確率モデルがあるが、この考えを応用して、Mogensen は、モゲンゼン・サイザーとして知られているフルイ機を考案した。それについては Mogensen のレポートがいくつか出ているが^{2,3)}、その一つは、すでに本研究会の粉体工学研究会文献紹介 No. 118(1960年11月)で筆者が全訳にして紹介した。それから、もう8年も経過したのであるが、最近になって、わが国でも、売り出されるようになり、ちらほら問い合わせしてくる方もあるので、少し詳しく、理論的な解説を試みようと思う。

2. モゲンゼン・サイザーの概要

図1は、カタログに示されている外観のスケッチであ

図1 モゲンゼン・サイザーの外観

る。図2は、その作用を示す略図である。網は枠体に固定されており、枠体全体は、上からスプリングでつり下げられている。斜上方にとりつけられたバイブレーター（振動モーター）により、矢印方向の直線振動が行なわれるようになっていいる。ここまでは従来のフルイ機と、とくに変わったところもないのであるが、網目の使い方が、全くちがっている。

まず従来のフルイは、網目の大きさが、そのフルイの分離点であって、網目よりも大きい粒子が網上産物となり、網目より小さい粒子は、網下産物となるというのが常識であった。ところがこのモゲンゼン・サイザーは、分離点よりも、はるかに大きな網目を使っているところが根本的にちがっている。網目が分離すべき粒子径よりも大きければ、当然、網目よりも大きい粒子も、網目を通過するのであるが、次にのべる Gaudin の粒子通過確率によれば、大きい粒子ほど、通過確率が小さい。したがって、何枚も、同じ網を重ねておけば、網目より小さくても、比較的大きい粒子は、全部の網を通過できず、網上産物になることになる。

このことは、入学試験にたとえてみればよくわかる。ずばぬけて成績のよい学生なら、どこでもフリーパスであるが、スレスレの成績の学生だと、同じ程度の大学の入試でも、5回受験すれば、1つや2つはパスできても、どこかでは不合格になって、ハネられる。従来のフルイ分け方法は、厳しい入試1回で合否をきめるような

図2 モゲンゼン・サイザーのフルイ分け状態

* 昭和44年3月3日受理

** 同志社大学工学部化学工学科(京都市上京区今出川烏丸)
TEL 075-211-2311

ものであり、モゲンゼン・サイザーは、比較的やさしい問題で、何回もくりかえして試験するようなもので、どれかにひっかかったら、アウトにするわけである。

次に、モゲンゼン・サイザーは、下の段ほど網の角度が急勾配にしてある。勾配が急になると、網目の投影の関係で、通過しにくい。そのことにより、ギリギリの大きさの粒子は、網下にならないようにしてある。詳しくは後述するが、このことにより、精度を高めている。

このようにして、網目が、分離点よりも大きいから、粒子が目詰りすることはないし、粒子の通過速度も、はやいから、処理能力が、従来のフルイに比し、ずばぬけている、というのが Mogensen の主張である。

3. 粒子通過確率による説明

以上にのべたことを、粒子通過確率のモデルによってもっと詳しく考えてみることにする。

Gaudin¹⁾ は粒子通過確率を図3によって説明した。目開きは一辺 a なる正方形とし、粒子は直径 x なる球と考えると、粒子が網面に直角にぶつかった場合に、粒子の中心が、図示した二つの位置の間にくれば、粒子は網に衝突せずに通過することができる。目開きにたいし、網線の太さが非常に小さければ、粒子通過確率 P は、次式で示すことができる。

$$P = \frac{(a-x)^2}{a^2} \quad \dots\dots(1)$$

網線を考えると、図3右より次式で示される。

$$P = \frac{(a-x)^2}{(a+\delta)^2} = \left(\frac{a-x}{a}\right)^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{a}{a+\delta}\right)^2}_{\text{空間率}} \quad \dots\dots(2)$$

ここで $(a/(a+\delta))^2$ は網の空間率に相当する。

この粒子通過確率を用いて、図4のように、同じ網目開きを有するフルイ網を10段平行に排列したモゲンゼン・サイザーを考えてみる。フルイ網を長さ方向に1, 2, 3, …… i 等分し、各等分区間で、粒子は1回づつ網目に

図3 Gaudin の粒子通過確率のモデル

図4 10段平行型モゲンゼン・サイザーの解析

衝突し、通過を試みるものとする、供給端に入った粒子が各部に存在する確率は、表1のように求められる。

すなわち、10段式の場合、試行 i の区間で、10段目のフルイ網の下におちる確率（網下配分確率）は

$$y = \frac{(10+i-2)!}{(i-1)!9!} \cdot P^{10}(1-P)^{i-1} \quad \dots\dots(3)$$

で与えられる。そこで、特定の P の場合について、種々の i の値につき上式を計算すれば、図4のフルイの10段目の網の下におちる粒子の配分を求めることができることになる。

一例として、空間率

$$\left(\frac{a}{a+\delta}\right)^2 = 0.5 \quad \dots\dots(4)$$

なる網を用い、相対粒子径 $x/a=0.2$ なる粒子をフルイ分けるものとする

$$P = (1-0.2)^2 \times 0.5 = 0.32$$

であるから

$$y = \frac{(10+i-2)!}{(i-1)!9!} \cdot (0.32)^{10}(0.68)^{i-1} \quad \dots\dots(5)$$

同様に、 $x/a=0.4$ の場合

$$y = \frac{(10+i-2)!}{(i-1)!9!} \cdot (0.18)^{10}(0.82)^{i-1} \quad \dots\dots(6)$$

表2はこの計算結果であり、図5は、 i にたいし y を図示したものである。この図は、10段平行型の場合、粒子

表1 10段平行型モゲンゼン・サイザーの確率配分

試行数 段 i	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$		$i=i$
1	1 ↓	$1-P$ ↓	$(1-P)-P(1-P)$ ↓ $= (1-P)^2$	$(1-P)^2-P(1-P)^2$ ↓ $= (1-P)^3$		$(1-P)^{i-1}$ ↓
2	P ↓	$\frac{P(1-P)}{2P(1-P)} \rightarrow \frac{P-P^2=P(1-P)}{2P(1-P)}$ ↓	$\frac{P(1-P^2)}{3P(1-P)^2} \rightarrow \frac{P(1-P)-2P^2(1-P)}{3P(1-P)^2}$ ↓	$\frac{P(1-P)^3}{4P(1-P)^3} \rightarrow \frac{P(1-P)^2-3P^2(1-P)^2}{4P(1-P)^3}$ ↓		$iP(1-P)^{i-1}$ ↓
3	P^2 ↓	$\frac{2P^2(1-P)}{3P^2(1-P)} \rightarrow \frac{2P^2-P^3=P^2(1-P)}{3P^2(1-P)}$ ↓	$\frac{3P^2(1-P)^2}{6P^2(1-P)^2} \rightarrow \frac{3P^2(1-P)-3P^3(1-P)^2}{6P^2(1-P)^2}$ ↓	$\frac{4P^2(1-P)^2}{10P^2(1-P)^3} \rightarrow \frac{4P^2(1-P)^2-6P^3(1-P)^3}{10P^2(1-P)^3}$ ↓		$\frac{(3+i-2)!}{(i-1)!} (1-P)^{i-1}$ ↓
4	P^3 ↓	$4P^3(1-P)$	$10P^3(1-P)^2$	$20P^3(1-P)^3$		
5	P^4 ↓	$5P^4(1-P)$	$15P^4(1-P)^2$	$35P^4(1-P)^3$		
6	P^5 ↓	$6P^5(1-P)$	$21P^5(1-P)^2$	$56P^5(1-P)^3$		
7	P^6 ↓	$7P^6(1-P)$	$28P^6(1-P)^2$	$84P^6(1-P)^3$		
8	P^7 ↓	$8P^7(1-P)$	$36P^7(1-P)^2$	$120P^7(1-P)^3$		
9	P^8 ↓	$9P^8(1-P)$	$46P^8(1-P)^2$	$165P^8(1-P)^3$		
10	P^9 ↓	$10P^9(1-P)$	$55P^9(1-P)^2$	$220P^9(1-P)^3$		
網下産物	P^{10} ↓	$10P^{10}(1-P)$	$55P^{10}(1-P)^2$	$220P^{10}(1-P)^3$		$\frac{(10+i-2)!}{(i-1)!} P^{10}(1-P)^{i-1}$

表2 網下配分確率 (空間率0.5として)

$\frac{x}{a}=0.2$		$\frac{x}{a}=0.4$	
i	y	i	y
5	2.27×10^{-3}	5	1.152×10^{-5}
10	1.70×10^{-2}	10	2.91×10^{-4}
15	4.15×10^{-2}	15	1.837×10^{-3}
20	5.11×10^{-2}	20	5.68×10^{-3}
25	4.26×10^{-2}	25	1.178×10^{-2}
30	2.57×10^{-2}	30	1.845×10^{-2}
35	1.393×10^{-2}	35	2.43×10^{-2}
40	5.54×10^{-3}	40	2.64×10^{-2}
45	2.13×10^{-3}	45	2.55×10^{-2}
50	7.43×10^{-4}	50	2.28×10^{-2}

図5 網下配分曲線(10段の場合)

径が網目開きの0.2倍の粒子と0.4倍の粒子が、10段目の網下にどのように配分されるかを示している。平らな床の上でフルイ分けを行えば、床の上にこの曲線のような山ができることになる。そこで図7のように $x=0.2a$ と $x=0.4a$ なる粒子の混合物を供給し、図5から $i=30$ くらいのところに、網の排出端が来るようにすれば、

図6 網下配分曲線(20段の場合)

図7 分離点

細粒中への粗粒の混入は、図のハッチング部分だけとなり、分離が行なわれる。

図6は、同様にして、20段にした場合である。当然分離の鋭さはよくなってくる。

4. 網の傾斜角の影響

図3で示した粒子通過確率の考え方は、粒子が網面に

90°に衝突するものとしている。斜方向からぶつかる場合には、入射角が小さくなるにつれて、通過確率が小さくなるはずで、Gaudinはこのことを詳しく解析し、入射角と通過確率の関係を図8のように示した。

Mogensen は、図9のようなモデルを考え、粒子が通過しうる範囲を、図3の場合よりも少し広くして、線半径 $\delta/2$ に ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 なるある関数を掛け合わせることにし、フルイ網が、水平に対し傾斜角 β をなす場合につき、粒子通過確率を、次式で示した。

図8 入射角の影響 (Gaudin)

図9 傾斜した丸線網の粒子通過確率モデル

$$P = \frac{(a + \phi_3 \delta - x) \left\{ (a + \delta) \cos \beta - \delta + \frac{\delta}{2} (\phi_1 + \phi_2) - x \right\}}{(a + \delta)(a + \delta) \cos \beta}$$

$$= \frac{\left(1 + \phi_3 \frac{\delta}{a} - \frac{x}{a} \right) \left\{ \left(1 + \frac{\delta}{a} \right) \cos \beta - \frac{\delta}{a} + \frac{\delta}{2a} (\phi_1 + \phi_2) - \frac{x}{a} \right\}}{\left(1 + \frac{\delta}{a} \right)^2 \cos \beta} \quad \dots\dots(7)$$

$P < 1$ であるから、級数に展開し

この式の意味は図9から容易に理解できる。

粒子通過確率 P は、1個の粒子が1回網目に衝突したときに、その粒子が網を通過する確率を表わしているが、いまいずれも等しい粒子径を有する N 個の粒子が、おのおの1回づつ網目に衝突するものとする、 N が非常に大きな数であれば、 NP 個の粒子が網目を通過し、 $(N - NP)$ 個の粒子が網面上に残るものと考えることができる。

このようにして、各粒子が1回づつ網目に衝突し、網目を通過できなかった $N(1 - P)$ 個の粒子が、つぎに再び各1回づつ網目に落ちれば、 $N(1 - P)P$ 個の粒子が網目を通過し $N(1 - P)^2$ 個の粒子が網面上に残る。同様の過程を i 回繰返すならば、 $N(1 - P)^i$ 個の粒子が網面上に残ることになる。このとき、はじめの全粒子数 N にたいする網面上に残った粒子数の比、すなわち個数網上残留率 r_i は、次式で表わすことができる。

$$r_i = \frac{N(1 - P)^i}{N} = (1 - P)^i \quad \dots\dots(8)$$

ここで i のことを、試行数 (trials) とよぶ。上式の対数をとって

$$\ln r_i = i \cdot \ln(1 - P) \quad \dots\dots(9)$$

$$\ln(1 - P) = -P - \frac{P^2}{2} - \frac{P^3}{3} - \dots\dots \quad \dots\dots(10)$$

高次の項を省略し、もっとも簡単に第1項のみをとれば

$$\ln r_i = -i \cdot P \quad \dots\dots(11)$$

をうる。

この式に、(7)式の P を入れ、たとえば $r_i = 0.1$ になるために必要な試行数 i を求めることができる。

一つの例として、 $\delta/a = 0.2$, $x/a = 0.2$ また ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 はいずれも 0.2 なる場合について計算してみると

$$P = 0.700 - \frac{0.210}{\cos \beta}$$

$$2.303 \log 0.1 = -i \left(0.7 - \frac{0.210}{\cos \beta} \right)$$

$$i = \frac{2.303}{0.7 - \frac{0.210}{\cos \beta}} \quad \dots\dots(12)$$

図10は、 $x/a = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ の場合につき β と i の関係を図示したものである。この図からわかることは、たとえば 60° の傾斜角では、相対粒子径 $x/a = 0.2$ なる粒子は通過しやすいが、0.4 なる粒子は、ほとんど通過しないことがわかる。このように、フルイ網の傾斜角に応じて、ある臨界粒子径がある。

図10 種々の傾斜角の網を90%通過するに必要な試行数

ためには、どうしても大きいスペースを要するという致

以上の理由で、モゲンゼン・サイザーでは、下段にゆくにつれて角度を大きくし、分離点をコントロールしている。

5. 二次元の分離面からの脱却という方向

従来、フルイ分けは網面という二次元の分離面で、分離を行なってきた。そのため処理能力を増す

命的な欠陥がつきまっていた。このことはフルイに限らず、風力分級でも、原理的には分離面という二次元の制約があることが多い。フルイではその解決策として、網面を多段配置することも行なわれるが、網目に近い大きな粒子はどうしても通過に手間どり、これが処理能力を押えてきた。

その点、モゲンゼン・サイザーは、分離面を三次元化する方向へ一歩を開いたものとして注目すべきものがあると思われる。Mogensen は、Gaudin の確率に基礎をおいて、この型式を開発したわけであるが、フルイ分け過程に関する理論は、Gaudin 以後も多くの研究が行なわれて、進歩した理論があるので、それらから出発して、モゲンゼン・サイザーよりも優れた性能を有するフルイ分け方式を開発することも、当然可能なはずである。このことについては別の機会にのべることにしたい。

引用文献

- 1) Gaudin, A. M. : [Book] "Principles of Mineral Dressing" (1939)
- 2) Mogensen, F. : *Bergbau-Wiss.*, 7, [6] 136 (1960)
- 3) Mogensen, F. : *Tonind. Ztg. u. Kram. Rundschau*, 84, 88 (1960) (三輪茂雄訳：粉体工学研究会文献紹介 No. 118)
- 4) Fagerberg, B. : *Eng. Min. J.*, 161, [7] 88 (1960)
- 5) Schruf, H. : *Berg-u. Hüttenmänn Monatsch*, 110 [8], 283 (1965)
- 6) Mogensen, F. : *Quarry Managers' J.*, [Oct] 409 (1965)

〔書評〕

Separation of Dust from Gases

E.E.U.A. Handbook No. 19 : 1967

発行 : Constable & Company Ltd. London

図40, 表16, 全111頁 1620円

本書はイギリスの Engineering Equipment Users Association のハンドブックの1つで、8つの会社（ユーザー）の代表が集ってつくられたものである。大気汚染を防止するための集じん装置の選定、設計、操作などについての、非常に実用的な記述がしてある。

1. 粉じん負荷の測定, 2. 粒度測定法, 3. 乾式サ

イクロン, 4. 湿式洗浄装置, 5. バッグフィルター, 6. 電気集じん機, 7. 集じんプラント選定の簡単なガイド, 8. 配管系の設計

数表や図表も、参考になるものが多く、要領よくまとめてあるので、座右において、実務に直ちに使える本である。
(三輪茂雄)