平底容器からの砂の二次元流出 (そのII)*

——マスフローについて——

Two-dimensional Flow of Sand from a Flat-bottomed Container (II)

五十嵐 平太郎**

Heitarō Igarashi

緒 言

容器内の粉粒体の重力流れにおいて粒子運動が容器の横断面全体にわたる流れはマスフロー，そうでない流れはプラグフローとよばれている。粉粒体を貯蔵順に排出させるためには流れはマスフローでなければならない。

本報ではマスフロー発生条件について検討する。

回分流出の過程でマスフローを生ずるかどうかは流動境界線の進行速度と層高の変化速度との相対的な関係によって決定される。流動境界線の進行速度については前報¹⁾に報告した。層高の時間的変化を求める公式を2章に提出するが，その際，流動領域の空間率の値を必要とするので，それを1章で取り扱う。

1. 流動領域の空間率

1.1 局所空間率

観察平面上で流出開始前に面積 F の領域が流出開始後運動状態に入り， $F + \Delta F$ に膨脹したとすると質量保存の法則により

$$\begin{aligned} \rho L F (1 - \varepsilon_s) \\ = \rho L (F + \Delta F) (1 - \varepsilon_d) \end{aligned} \quad \dots\dots(1)$$

が成立つ。ここに， ρ は粒子密度， ε_s および ε_d はそれぞれ静止時および運動時の空間率である。(1)式を変形して

図1 トレーサーの変位

$$\varepsilon_d = (\varepsilon_s + E) / (1 + E) \quad \dots\dots(2)$$

ただし

$$E \equiv \Delta F / F \quad \dots\dots(3)$$

が得られる。 E を測定すれば(2)式によって面積 F の地点の ε_d が求められる。

マスフローの場合

流動領域の幅は容器幅に等しいので相隣る二本の水平縞の変位を測定すれば E は容易に求められる。

プラグフローの場合

図1は流出開始後の時刻 t における流動境界線と水平縞の変位を示す。流出開始前に水平な線分 $\overline{12}$ および $\overline{34}$ 上に存在していた粒子は時刻 t においてそれぞれ152および364のように変位する。 $\overline{12}$ ， $\overline{34}$ 両線分間の距離 dy を小さくとりときは図形12431は台形で近似されるので $\overline{12} = b$ ， $\overline{34} = b'$ とすれば

$$F = \frac{1}{2} (b + b') dy \quad \dots\dots(4)$$

と表わせる。また，図形1521および3643の面積をそれぞれ f および f' とすれば

$$\Delta F = f - f' \quad (f > f') \quad \dots\dots(5)$$

である。

b および f はいずれも t および y の関数であるが，いま t を一定とすれば

$$b' = b + \frac{\partial b}{\partial y} dy \quad \dots\dots(6)$$

* 昭和44年6月2日受理

** 長岡工業高等専門学校(長岡市西片貝町888) TEL 02582-2-6435

図 2 流動領域内の空間率分布

$$f' = f + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \cdots \cdots (7)$$

と書ける。(4)～(7)式から

$$E = \left(-\frac{\partial f}{\partial y} \right) / \left(b + \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial y} dy \right) \quad \cdots \cdots (8)$$

が得られる。

実 測 例

図 2 は実験 6 の引伸し写真から ε_d を求めた結果である。 f を実測し、これを y に対してプロットすると y のある範囲内で直線となる。したがって

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -k_f = \text{const.} \quad (k_f > 0) \quad \cdots \cdots (9)$$

鉛直流動領域では b は y によって変わらないから

$$\frac{\partial b}{\partial y} = 0 \quad \cdots \cdots (10)$$

(9), (10) 式が同時に成立つときは

$$E = k_f / b \quad \cdots \cdots (11)$$

となり、 E は y に無関係であり t のみの関数となる。図 2 の曲線の bc 部分は (11) 式に対応する。図からわかるように bc 部分の ε_d は t によってほとんど変わらない。その値を ε_{d0} とする。実験 6 では $\varepsilon_{d0} = 0.430$ である。これは $\varepsilon_s (= 0.348)$ にくらべてかなり大きい値である。

図 2 の破線 ab はスリット直上に自由落下に近い状態の領域が存在することから推定して描いたものである。この領域に入るとトレーサー粒子は急激に変位するため f は測定できない。したがってこの領域の ε_d はこの方法では求められない。

曲線の右端 cd 部分の ε_d の値が大きくなっているが、これはアーチ形流動領域先端部のブリッジングに起因するものと考えられる。

1.2 平均空間率

1.1 節に示した方法はトレーサー変位の測定可能な流出初期に限られ、発達した流れに対しては適用できない。しかし、流動境界線は流出の全過程を通じて明りように観察できるので、流動領域全体の平均空間率 $\bar{\varepsilon}_d$ は次のように求めることができる。

時刻 t における観察平面上の静止および流動領域の面積をそれぞれ A_s , A_d , スリットからの流出速度を Q とすると質量保存の法則から

$$\rho L B y_0 (1 - \varepsilon_s) = \int_0^t Q dt + \rho L A_d (1 - \bar{\varepsilon}_d) + \rho L A_s (1 - \varepsilon_s) \quad \cdots \cdots (12)$$

が成立つ。実験によれば Q は t に無関係であるから (12) 式を変形して

$$\bar{\varepsilon}_d = 1 - \frac{1}{A_d} \left\{ (1 - \varepsilon_s) (B y_0 - A_s) - \frac{Q t}{\rho L} \right\} \quad \cdots \cdots (13)$$

が得られる。この式において A_d , A_s , Q を測定すれば $\bar{\varepsilon}_d$ を求めることができる。

実 測 例

図 3 は実験 6 から求めた $\bar{\varepsilon}_d$ を示す。横軸には流動領域の高さ y_T , y_s をとった。

y_T の $\bar{\varepsilon}_d$ は ε_{d0} より大きい。これは $\bar{\varepsilon}_d$ が図 2 の ab および cd 部分の ε_d を含んでいることから当然である。V 字形の自由表面が形成された後は cd 部分の ε_d が無くなるため、 y_s の $\bar{\varepsilon}_d$ は y_T のそれより小さくなる。 y_s の小さい範囲で $\bar{\varepsilon}_d$ が大きくなるのは図 2 の ab 部分の ε_d が $\bar{\varepsilon}_d$ 中で大きな割合を占めるようになるからであ

図 3 流動領域の平均空間率

る。 y_s の大きい範囲ではその割合は小さく、 $\bar{\varepsilon}_d$ は y_s に対し無関係な一定値 $\bar{\varepsilon}_{d0}$ となる。

2. 層高の時間的变化

取り扱いの便宜上、次の仮定を設ける。

- i) 自由表面の形状は完全に平らであるかまたはV字形である。
- ii) 前報図6において流動境界線 AE は BA の延長線、CDおよびDTはBCの延長線によってそれぞれ近似する。

流動境界線と自由表面の関係位置は図4のように変化する。(a)は自由表面中央がくぼみ始める瞬間を表わす。状態(a), (c), (e)の諸量にそれぞれ添字0, K, Lを、また $t = t_W$ における諸量には添字 W を用いることにする。

鉛直流動領域の流動境界線の進行速度が大きいときはダ円形流動領域の頂点が自由表面に達しないうちにマスフローを生ずるので、フローパタンは図4の(a)~(f)の経過をたどらず、直ちに(g)の二点鎖線のようになる。

任意時刻の層高は図4の流出モデルと質量保存の法則から導くことができる(Appendix 参照)。その結果を以下に記す。

- i) $t_0 \leq t \leq t_K$ のとき

$$z = \left[\frac{\tan \phi}{1 - \bar{\varepsilon}_d} \left\{ \frac{Q(t - t_0)}{\rho L} - 2\phi_0(\bar{\varepsilon}_d - \varepsilon_s) \right\} \right]^{1/2} \quad \text{.....(14)}$$

図4 流出モデル

$$\phi_0 \equiv \left[x_V y_0 - A_G \right]_{t_0}^t \quad \text{.....(15)}$$

$$A_G \equiv \frac{y_P \bar{\varepsilon}_P^{-n_P}}{n_P + 1} \bar{\varepsilon}_V^{n_P + 1} \quad \text{.....(16)}$$

- ii) $t_K \leq t \leq t_L$ のとき

$$z = \gamma x_V \tan \phi + \left[(\gamma x_V \tan \phi)^2 + \frac{Q(t - t_K)}{\rho L} - \frac{\tan \phi}{1 - \varepsilon_s} + z_K^2 \frac{\tan \phi}{\tan \phi_K} - 2\phi_K \gamma \tan \phi \right]^{1/2} \quad \text{.....(17)}$$

ただし

$$\gamma \equiv (\bar{\varepsilon}_d - \varepsilon_s) / (1 - \varepsilon_s) \quad \text{.....(18)}$$

$$\phi_K \equiv \left[x_V y_0 + \frac{1}{2} x_V^2 \tan \phi - A_G \right]_{t_K}^t + x_{VK} z_K \quad \text{.....(19)}$$

- iii) $t_L \leq t \leq t_W$ のとき

$$z = \frac{Q(t - t_L) / \rho L + (1 - \varepsilon_s) \{ B z_L + \lambda^2 (\tan \phi - \tan \phi_L) \} - 2\phi_L(\bar{\varepsilon}_d - \varepsilon_s)}{B(1 - \varepsilon_s) - 2x_V(\bar{\varepsilon}_d - \varepsilon_s)} \quad \text{.....(20)}$$

ただし

$$\phi_L \equiv \left[x_V y_0 + \frac{1}{2} x_V^2 \tan \phi - A_G \right]_{t_L}^t + x_{VL} z_L \quad \text{.....(21)}$$

- iv) $t_W \leq t$ のとき

$$Z = \frac{Q(t - t_W)}{\rho L B (1 - \bar{\varepsilon}_d)} + \frac{2\phi_W}{B} \quad \text{.....(22)}$$

ただし

$$\phi_W \equiv \left[\frac{1}{2} \lambda^2 \tan \phi + \frac{\bar{\varepsilon}_d - \varepsilon_s}{1 - \bar{\varepsilon}_d} A_G \right]_{t_W}^t + \lambda z_W \quad \text{.....(23)}$$

図5 マスフロー領域決定線図

t が十分大なるときは流動境界線の進行速度は非常に小さくなる。したがって、 t_w の値が大きい場合は

$$A_G = A_{GW} \quad \text{.....(24)}$$

が成立つ。また、 ϕ の t による変化が小さい場合は

$$\phi = \phi_W \quad \text{.....(25)}$$

とおけるので、(24)、(25)式を(23)式に代入すれば $\phi_W = \lambda z_W$ となり、(23)式は

$$z = z_W + \frac{Q(t - t_w)}{\rho L B (1 - \bar{\epsilon}_d)} \quad \text{.....(26)}$$

となる。

自由表面が平らなピストンフローの場合は(23)式において $\phi = \phi_W = 0$ とすればよい。

3. マスフロー発生条件

図4(g)のように $t \geq t_w$ において $y \geq y_u$ の範囲に粉体層が存在するとき、 $y \geq y_u$ でマスフローを生ずる。

マスフロー領域を定量的に求めるには $y_s - t$ 、 $y_u - t$ の二曲線を同一時間軸に対して描けばよい(図5)。

$y_s - t$ 曲線を描くとき前章に提出した公式が利用できる。また、 $y_u - t$ 曲線は前報(3)式において、 $\xi = \lambda - \sigma$ 、 $y = y_u$ とおくことにより

$$y_u = y_P \left(\frac{\lambda - \sigma}{\xi_P} \right)^{n_P} \quad \text{.....(27)}$$

から描ける。

図5に示すように回分流出のフローパターンはマスフローの発生のかたによって次の三つに分類できる。

a) P型 $t = t_w$ のとき $y_{sw} < y_{uw}$ であって、流出の全過程を通じてマスフローを生じない。

b) M型 ダ円形流動領域は自由表面に達せず、 $t \geq t_w$ において $y \geq y_u$ では直ちにマスフローを生ずる。流出の末期 $t > t_H$ ではプラグフローとなる(図4(h)参照)。

c) PM型 ダ円形流動領域は自由表面に達し、さらに $t = t_w$ のとき $y_{uw} < y_{sw}$ の場合は $t < t_w$ のときプラグフロー、 $t_w \leq t \leq t_H$ のとき $y \geq y_u$ でマスフローとなる。 $t > t_H$ ではプラグフローとなる。

粉体貯槽としてはM型のフローパターンが望ましい。そのためには t_w を小さくすればよい。 t_w は前報(3)式で与えられる。

結 言

- 1) 流動領域の空間率をトレーサー変位から求める方法を提出し、これに基づいて実測を行なった結果、静止領域のそれよりかなり大きいことがわかった。
- 2) 任意時刻における層高を求める公式を提出した。
- 3) 回分流出におけるマスフロー発生条件について検討した。

Appendix

- 1) 時刻 t 、 t_i ($t_i < t$) における容器内の砂の質量をそれぞれ M 、 M_i とすると Q が t に無関係の場合は

$$Q(t - t_i) = M_i - M \quad \text{.....(A1)}$$

さらに、 $\bar{\epsilon}_d$ が t に無関係ならば

$$Q(t - t_i) = \rho L (A_{di} - A_d) (1 - \bar{\epsilon}_d) + \rho L (A_{si} - A_s) (1 - \bar{\epsilon}_s) \quad \text{.....(A2)}$$

- i) $t_0 \leq t \leq t_K$ のとき

図4(b)を参照して

$$A_d = 2x_r y_0 - z^2 \cot \phi - 2A_G \quad \text{.....(A3)}$$

$$A_s = B y_0 - A_d - z^2 \cot \phi \quad \text{.....(A4)}$$

ここに、 A_G は図形BEGの面積で、前報(3)式から

$$A_G = \frac{y_P \xi_P^{-n_P}}{n_P + 1} \xi_V^{n_P + 1} \quad \text{.....(A5)}$$

添字 i を0にして(A3)、(A4)式を(A2)式に代入して、 z について解けば(A4)式が得られる。

ii) $t_K \leq t \leq t_L$ のとき

図4(d)を参照して

$$A_d = 2x_V(y_0 - z) + x_V^2 \tan \phi - 2A_G \quad \cdots \cdots (A6)$$

$$A_s = By_0 - A_d - z^2 \cot \phi \quad \cdots \cdots (A7)$$

添字 i を K にして (A2), (A6), (A7) 式から (7) 式が得られる。

iii) $t_L \leq t \leq t_W$ のとき

図4(f)を参照して

$$A_d = 2x_V(y_0 - z) + x_V^2 \tan \phi - 2A_G \quad \cdots \cdots (A8)$$

$$A_s = By_0 - A_d - (Bz - \lambda^2 \tan \phi) \quad \cdots \cdots (A9)$$

添字 i を L にして (A2), (A8), (A9) 式から (20) 式が得られる。

iv) $t_W \leq t$ のとき

図4(g)を参照して

$$A_d = B(y_0 - z) + \lambda^2 \tan \phi - 2A_G \quad \cdots \cdots (A10)$$

$$A_s = 2A_G \quad \cdots \cdots (A11)$$

添字 i を W にして (A2), (A10), (A11) 式から (22) 式が得られる。

記 号

A_d : 流動領域の面積	[cm ²]	y_S : 任意時刻における層高 (容器中心線上)	[cm]
A_G : 図4 (b) の図形BEGの面積	[cm ²]	y_T : ダ円形流動領域の頂点の高さ	[cm]
A_s : 静止領域の面積	[cm ²]	y_U : 側壁における静止領域の高さ	[cm]
B : 容器幅	[cm]	z : $y_0 - y_S$	[cm]
b : 流動領域の幅	[cm]	ε_d : 流動領域内の局所空間率	[—]
E : 面積膨張率 ((3)式)	[—]	ε_d : 流動領域の平均空間率	[—]
F : 図1図形12431の面積	[cm ²]	ε_s : 静止領域の空間率	[—]
f : 図1図形1521の面積	[cm ²]	λ : $B/2$	[cm]
k_f : 定数 ((9)式)	[cm ² /cm]	ξ : $x - \sigma$	[cm]
L : 容器奥行	[cm]	ξ_P : 定数 (前報(4)~(6)式), t の関数	[cm]
M : 容器内の砂の質量	[g]	ξ_V : $x_V - \sigma$	[cm]
n_P : 指数 (前報(3)式)	[—]	ρ : 粒子密度	[g/cm ³]
Q : スリットからの砂の流出速度	[g/sec]	σ : $S/2$	[cm]
S : スリット幅	[cm]	ϕ : V字形自由表面の傾斜角	[degree]
t : 流出開始からの時刻	[sec]	<添字>	
t_0 : 自由表面の下降開始時刻	[sec]	H : 図4の状態 (h)	
t_W : 鉛直流動領域の流動境界線が側壁に達する時刻	[sec]	K : 図4の状態 (c)	
x : 流動境界線の横座標	[cm]	L : 図4の状態 (e)	
x_V : 鉛直流動領域の x	[cm]	W : $t = t_W$ の状態	
y : 容器底からの高さ	[cm]	Z : 流出完了の状態	
y_0 : $t=0$ における層高	[cm]		

引 用 文 献

- 1) 五十嵐平太郎: 粉体工学研究会誌, 6, 176 (1969)

Abstract

Two-dimensional Flow of Sand from a Flat-bottomed Container (II)

By Heitarō Igarashi

(Nagaoka Tech. Coll.)

In the discharge process of sand, mass-flow occurs when the flow boundary reaches to the side walls. The mass-flow region can be estimated

using the graph shown in Fig. 5, where t is the time measured from the beginning of discharge, t_W is the time at which the flow boundary

reaches to the side walls, y_s is the bed height and y_U is the height of static region at the side walls.

Formulas for predicting y_U and y_s were proposed in Eqs. (14)~(27). They were based on

a discharge model shown in Fig. 4. The overall voidage in the flow region $\bar{\varepsilon}_d$ which appears in these formulas can be evaluated by Eq. (13) which was derived from the law of conservation of mass.