破壊関数の一考察*

A Consideration on Breakage Function

桑 原 好 孝**

Yoshitaka Kuwahara

Gilvarry の考え¹⁾

固体には最初からミクロなき裂が存在し、外力を受けて固体内部に応力が生じたとき、き裂が活性化されて伝ばし、ついには破壊に至る。そしてそのき裂は固体の内部、表面上および稜上におのおの独立してランダムに存在し、それらのおのおのが破壊プロセスに寄与するものと考えられる。また、先在するき裂のうちで活性化される確率はポワソン分布に従うものとする。

いま、広さ t の領域中に n 個の点が存在する確率 $P(n/t)$ をポワソン分布によって表わせば次のようになる。

$$P(n/t) = e^{-\gamma t} (\gamma t)^n / n! \quad \dots\dots(1)$$

また、領域 t についての n の期待値 $\langle n/t \rangle_{av.}$ は次のように表わせる。

$$\langle n/t \rangle_{av.} = \gamma t \quad \dots\dots(2)$$

したがって、 γt は領域中の点の平均個数であり、 γ は領域内にわたる点の平均密度を表わすものである。

そして、 $0 \sim t$ の区間には点がなくて、 $t \sim t+dt$ の区間に1つ存在する確率 $P(t)dt$ は次のようになる。

$$P(t)dt = \gamma e^{-\gamma t} dt \quad \dots\dots(3)$$

いま、破片の体積を v 、表面積を s として面の合致する稜の全長を l とすると、この大きさの破片ができるためには、 $v \cdot s \cdot l$ の領域にはき裂がなく、 $dv \cdot ds \cdot dl$ の中に1つ存在する確率によって決定される。そこでその確率を $dp(l \cdot s \cdot v)$ とすれば次のように表わされる。

$$\begin{aligned} dp(l \cdot s \cdot v) &= (\gamma_v dv + \gamma_s ds + \gamma_l dl) e^{-(\gamma_v v + \gamma_s s + \gamma_l l)} \\ &= e^{-(\gamma_v v + \gamma_s s + \gamma_l l)} d(\gamma_v v + \gamma_s s + \gamma_l l) \\ &= e^{-Q} dQ \end{aligned}$$

ただし、

$$Q = \gamma_v v + \gamma_s s + \gamma_l l \quad \dots\dots(4)$$

いま粒子径を x として $l = \lambda_1 x$, $s = \lambda_2 x^2$, $v = \lambda_3 x^3$ とおくと次のように整理される。

$$Q = (x/k) + (x/j)^2 + (x/i)^3 \quad \dots\dots(5)$$

ここで $k \cdot j \cdot i$ は定数である。そして x のできる確率 $P(x)$ は(4)式を x まで積分して次のように求める。

$$\begin{aligned} P(x) &= \int_0^x e^{-Q} dQ \\ &= 1 - e^{-(x/k + (x/j)^2 + (x/i)^3)} \quad \dots\dots(6) \end{aligned}$$

分布関数について

いま(6)式において x が小さい場合、右辺の二重かっこ内の (x/k) の項は他の二項が無視できるほど優勢となる¹⁾。このことは、粒径が小さくなれば稜上に存在する活性化されたき裂が破壊プロセスに大きな役割を果たすことを意味するものである。

そこで、筆者の扱った粒子径の範囲内においては、固体の稜上に存在するき裂が支配的に破壊プロセスに寄与すると考えて、(3)式の領域を粒子径 y に置き換え、 t_0 を $y_{\max}$ で表わして次の条件を考える。

$$\int_0^{y_{\max}} P(t) dt = P(y_{\max}) = 1 - e^{-\gamma y_{\max}} \quad \dots\dots(7)$$

$$\int_0^y P(t) dt = P(y) = 1 - e^{-\gamma y} \quad \dots\dots(8)$$

* 昭和44年10月22日受理

** 工業技術院名古屋工業技術試験所（名古屋市北区平手町1）
TEL 052-911-2111

図1 振動ミルの分布関数
(○印は実測した値であり、実線は(11)式によるものである)

(7), (8)式は $y_{\max}$ および y なる粒子径以下に生成するフルイ下ろを意味するものであり、分布関数 $B(y, y_{\max})$ はその定義によりそれらの比で表わすことができる。

$$B(y, y_{\max}) = P(y)/P(y_{\max}) = (1 - e^{-\tau y}) / (1 - e^{-\tau y_{\max}}) \quad \dots\dots(9)$$

いま分布定数 α を導入して次のような関係を考える。

$$\alpha = \tau y_{\max} \quad \dots\dots(10)$$

そして(10)式を(9)式に代入することにより分布関数の実測式²⁻⁴⁾ が求まる。

$$B(y, y_{\max}) = \{1 - e^{-\alpha(y/y_{\max})}\} / (1 - e^{-\alpha}) \quad \dots\dots(11)$$

分布定数 α は破片の粒度分布の形を表わすものである。そしてその破片の粒度分布は活性化されたき裂がどのように伝ばし、最後にどのような大きさの破片を形成するかによって決定されるものである。活性化されるき裂の平均密度 τ は、破壊される粒子の破壊強度 σ および周囲の応力場 Σ ならびにふんいき a の影響を受けるが、最後にき裂がどのように伝ばするかというのを表わす値としての τ をも考えなければいけない。そこで α の概念は次のようになる。

図2 限定粒子径範囲を変化させた場合の選択関数と分布定数との関係

$$\alpha \propto f(\sigma, \Sigma, a, \tau, y) \quad \dots\dots(12)$$

そして分布関数の実測した結果と(11)式とがよく一致することを図1に示す*。

選択関数について

選択関数はその計算式⁴⁾ により末粉碎量の大きさに決定される。そしてこの末粉碎量 $\Delta P(y_{\max}, t)$ は(7)式より容易に求まる。

$$\Delta P(y_{\max}, t) = 1 - P(y_{\max}) = e^{-\tau y_{\max}} \quad \dots\dots(13)$$

そこで選択関数 S_e は次のようにする。

$$S_e = \frac{1}{t} \ln \left\{ \frac{1}{\Delta P(y_{\max}, t)} \right\} \propto y_{\max} \quad \dots\dots(14)$$

また(10)式を考慮すれば次の関係が成り立つ。

$$S_e \propto \alpha \quad \dots\dots(15)$$

すなわち粒子径を変化させたとき、選択関数と分布定数との間には直線関係が成り立つことを表わしている。これを図2に示す*。

* 図の詳細は文献4)を参照されたい

引用文献

- 1) Gilvarry, J. J. ; *J. Appl. Phys.*, 32, 391 (1961)
- 2) 桑原・山本・上田 ; 化学工学協会第34年会前刷 E210 (1969)
- 3) 桑原・山本・上田 ; 化学工学協会第3回秋期大会前刷 E314 (1969)
- 4) 桑原・山本・上田 ; 粉体工学研究会誌., 6, 406 (1969)