参 考 資 料

粒度分布による実験値のバラツキに関する考察

Theoretical Study on the Scatter of Experimental Data due
to the Particle Size-Distribution

増 田 弘 昭* 井伊谷 鋼 一*
Hiroaki Masuda Koichi Iino

1. は し が き

粉体プロセスの実験データが他のプロセスのものよりひどくバラツキのはなぜかということは、粉体プロセスを研究して行く上での重要な問題の一つであろう。このことについて、従来一般に、粉体の付着や凝集、あるいは偏析などが主な原因であろうということがいわれていたが、十分な説明はまだなされていない。

確かに、付着や凝集が大きな要因となっているのであろうが、その前に、純然たる統計的な原因について考えておくことも必要である。統計的なものといっても、粒径、粒子形状など非常にたくさんの要素があるが、ここでは粒径、すなわち粒度分布に原因するバラツキを考えよう。まず最初に、粉体プロセスの解析によく用いられる平均粒径と、ここでいう粉体プロセスについて簡単に説明しよう。つぎに、対数正規粒度分布を仮定し簡単にしかも最も一般的なプロセスについて、実験値のバラツキの問題および必要とする精度のデータを得るにはどのくらいの量の粉体を用いたらよいかという問題について考えてみよう。

2. 粉体プロセスと平均粒径

ここでいう粉体プロセスとは、プロセス変量、たとえば温度、圧力、流量、……が、そのプロセスに関係している粒径のある関数として表現される場合であり、最もわかりやすい例としてはストークスの式で表わされる沈降速度プロセスがある。これを式で表わすと

$$y=y(D_p); \text{たとえば, } y \equiv v = (\rho_p - \rho_f) D_p^2 / 18\mu \quad \dots\dots(1)$$

y はプロセス変量で、例では沈降速度である。この式で

は1個の粒子について表わされている。

実際に実験によってえられるデータは、たくさんの粒子の系の平均的なプロセス変量であるため、取り扱いを簡単化する目的で平均粒径が導入されている。この平均粒径をどのように決めるかについても問題はあるがその前に平均的なプロセス変量はどのように考えたらよいかという問題がある。著者らは一つの考え方として、おのおのの粒子がまったく他の粒子と独立に寄与している部分と、各粒子が相互に影響し合って寄与している部分に分けて考えてみた。すなわち、 Y を平均のプロセス変量とすると

$$Y = \int_0^\infty y(D_p) f(D_p) dD_p + \gamma(D_{p1}, D_{p2}, \dots) \quad \dots\dots(2)$$

ここで $f(D_p)$ はプロセスに用いられている粉体の粒度分布であり、 γ は相互作用による項である。第1項は線形的な平均値であるのでこれを

$$y \equiv \int_0^\infty y(D_p) f(D_p) dD_p \quad \dots\dots(3)$$

のように定義して、以下ではプロセス変量の線形推定値と呼ぶ。

実際に重要なのは相互作用による項 γ であり、これが付着や凝集の影響を表現しなければならないことになるであろうが*、ここではまず、基礎的な線形推定値だけを扱う。すなわち仮定として

$$Y = y \quad \dots\dots(4)$$

昭和46年1月16日受理

* 京都大学工学部化学科 (〒606 京都市左京区吉田本町)
TEL 075-771-8111

粒径 D_p をプロセス中で実際に作用する有効径と考えれば (3) 式だけでも相互作用を考慮できるかもしれない。そのとき粒度分布 $f(D_p)$ は有効径分布とでもいうべきものとなる。

なお、(2)式でどんな基準の粒度分布かといった問題もあるが、ここでは省略する。

さて、つぎに平均粒子径の取り方について簡単に述べておこう。平均粒子径の性質から、それは一つの代表径であって、これを独立変数とするある関数が平均のプロセス変量を正しく推定、あるいは表現するものであることが望ましい。しかし、(2)式で表わしたように平均のプロセス変量は非常に複雑であって、このような要求を満たす平均粒子径を定義することは、理論的にはできてもほとんど実用にならないと思われる。そこで、平均粒子径としては1個粒子のプロセス変量 y を用いて線形推定値 $\bar{y}$ を表わすものと定義するのが一番妥当であろう。すなわち

$$y(\bar{D}_p) = \bar{y}; \text{たとえば,} \\ K\bar{D}_p^2 = K \int D_p^2 f(D_p) dD_p \quad \dots\dots(5)$$

ここで $\bar{D}_p$ が平均粒子径である。これは逆関数を用いて次のようにもかける；

$$\bar{D}_p \equiv y^{-1}(\bar{y}); \text{たとえば,} \\ \bar{D}_p = \sqrt{\int D_p^2 f(D_p) dD_p} \quad \dots\dots(6)$$

これから、(4)式を満足する粉体プロセスでは平均粒子径を(5)または(6)式に従って決めなければ、データが見掛け上バラツクことを示せるが、ここでは省略する。ただ、この見掛け上のバラツキはこれから扱おうとしている統計的な意味のものではなく、このようなバラツキを持ったデータに最小2乗法のような種々の回帰法を適用しても、得られる曲線はプロセスを正しく表現するものではないことに注意する必要がある。

3. 粉体サンプルの平均粒子径とその分布

粉体プロセスのうち、最も簡単で、しかも重要なのはストークス則のように、粒子径の何乗かに比例するものである。すなわち、

$$y = KD_p^\alpha, \quad \alpha \text{ は定数} \quad \dots\dots(7)$$

粉体母集団の粒度分布を対数正規分布とし、それを

$$f^{(0)}(\ln D_p, \mu^{(0)}, \sigma^2)$$

とする。ここで $\mu^{(0)}$ は個数基準分布の対数中位径 ($= \ln D_{p50}$)、 σ^2 はその分散 (標準偏差 $\sigma = \ln D_{p84} - \ln D_{p50}$) である。また、粒度表示基準数 β を

$$\text{個数基準で } \beta=0, \text{ 重量基準で } \beta=3$$

なる数と定義すると、この粉体プロセスの粉体母集団平均粒子径は、(8)式から次のようになる^{1,2,4)}

$$\begin{aligned} \bar{D}_p &= \left\{ \frac{1}{K} \frac{K \int D_p^3 D_p^\alpha f^{(0)}(\ln D_p, \mu^{(0)}, \sigma^2) d \ln D_p}{\int D_p^3 f^{(0)}(\ln D_p, \mu^{(0)}, \sigma^2) d \ln D_p} \right\}^{1/\alpha} \\ &= \left[\frac{\exp\left\{(\alpha+\beta)\mu^{(0)} + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2\sigma^2\right\}}{\exp\left\{\beta\mu^{(0)} + \frac{1}{2}\beta^2\sigma^2\right\}} \right]^{1/\alpha} \\ &= \left[\exp\left\{\alpha\mu^{(0)} + \frac{1}{2}\alpha(\alpha+2\beta)\sigma^2\right\} \right]^{1/\alpha} \\ &= \exp\{\mu^{(0)} + (\beta+\alpha/2)\sigma^2\} \\ &= \exp\{\mu^{(0)} + c\sigma^2\} \quad \dots\dots(8)* \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } c = \beta + \alpha/2 \quad \dots\dots(9)$$

一方、大きさ n (個数) のランダムサンプルの標本平均粒子径は(8)式と同様にして次のようになるであろう。

$$\bar{D}_p = \exp(m + c s^2) \quad \dots\dots(10)$$

ここで、平均 m 、分散 s^2 はサンプルに関するものであり

$$* \quad f^{(0)}(\ln D_p, \mu^{(0)}, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln D_p - \mu^{(0)}}{\sigma}\right)^2\right\}$$

から、 $\int_{-\infty}^{\infty} D_p^t f^{(0)}(\ln D_p, \mu^{(0)}, \sigma^2) d \ln D_p$ は、変数変換

$$x = \ln D_p$$

を行なうと、 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{tx - \frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu^{(0)}}{\sigma}\right)^2\right\} dx$ となる。そこで、

$$tx - \frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu^{(0)}}{\sigma}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu^{(0)} - \sigma^2 t}{\sigma}\right)^2 + \mu^{(0)}t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2$$

の変形を用いると、

$$\begin{aligned} &\exp\left\{t\mu^{(0)} + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right\} \\ &\times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln D_p - \mu^{(0)} - \sigma^2 t}{\sigma}\right)^2\right\} d \ln D_p \end{aligned}$$

となり、この積の後の項は1であるから結局次式が成立する。

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} D_p^t f^{(0)}(\ln D_p, \mu^{(0)}, \sigma^2) d \ln D_p \\ &= \exp\left\{t\mu^{(0)} + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right\} \end{aligned}$$

$$m = \frac{\sum \ln D_p}{n}, \quad s^2 = \frac{\sum (\ln D_p - m)^2}{n} \quad \dots\dots(11)$$

ところで、粉体プロセスの実験で1回に用いられる粉体量（いいかえるとサンプルの大きさ）は十分大きいと考えられるであろう。すると、統計理論から、 $\chi^2 \equiv (n/\sigma^2)s^2$ が、平均 $\nu \equiv n-1$ と分散 2ν の正規分布に従うことがわかっている³⁾、平均 m と分散 s^2 の同時分布 $\phi(m, s^2)$ はつぎのようになる³⁾；

$$\phi(m, s^2) = \frac{n}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{2\nu}} \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(m - \mu^{(0)})^2 - \frac{1}{4\nu}\left(\frac{n}{\sigma^2}s^2 - \nu\right)^2\right\} \quad \dots\dots(12)$$

この分布が今から求めようとする“平均粒子径の分布”の基になるのであるが、これは一応このままにしておいて、取り扱いを簡単に理解するには(12)式の右边は忘れておいた方がよい。さらに、平均粒子径 $\bar{D}_p$ のままではなく、その対数 $\ln \bar{D}_p$ の分布を考えた方が簡単である。(10)式から、

$$\ln \bar{D}_p = m + cs^2, \quad \text{ゆえに,} \\ d \ln \bar{D}_p = dm + cd(s^2) \quad \dots\dots(13)$$

後に $\phi(m, s^2)$ を m と s^2 に関して2重積分する必要があるので $d(s^2)$ と $d(m)$ の外積を作っておこう*。(13)式から

$$d(s^2)dm = d(s^2) \wedge dm = d(s^2) \wedge \{d \ln \bar{D}_p - cd(s^2)\} \\ = d(s^2) \wedge d \ln \bar{D}_p \\ = d(s^2) d \ln \bar{D}_p \quad \dots\dots(14)$$

ここで記号 $\wedge$ は外積を表わし、その基本的性質である“同じ量の外積は零”となることを使っている。(14)式を用いると、

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(m, s^2) d(s^2) dm \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\ln \bar{D}_p - cs^2, s^2) d(s^2) \right\} d \ln \bar{D}_p \quad \dots\dots(15)$$

* $\int \int f(x, y) dx dy$ における $dx dy$ は外積であって、詳しくは $dx \wedge dy$ なる記号を使うところである。

なる変形によって $\ln \bar{D}_p$ の分布が

$$f(\ln \bar{D}_p) \equiv \int_0^{\infty} \phi(\ln \bar{D}_p - cs^2, s^2) d(s^2) \quad \dots\dots(16)$$

になることがわかる。もちろん(15)式から、分布 $f(\ln \bar{D}_p)$ は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\ln \bar{D}_p) d \ln \bar{D}_p = 1 \quad \dots\dots(17)$$

なる関係も満足している。

以上の誘導から結局(12)式を用いて、(16)式の積分をすればよいことがわかった。ところで、便宜的に、サンプルの平均粒子径と母集団粉体の平均粒子径の比、すなわち

$$\kappa = \bar{D}_p / D_p^* \quad \dots\dots(18)$$

を導入して、 $\ln \kappa$ の分布を求めることにしよう。そうすると、(17)式は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\ln \kappa + \ln \bar{D}_p^*) d \ln \kappa = 1 \quad \dots\dots(19)$$

とも書けるので、分布 f は $\ln \kappa$ の分布でもある。そこで、これを $\ln \kappa$ の分布という意味で $f_{\ln \kappa}$ と書く、

$$f_{\ln \kappa} = f(\ln \kappa + \ln \bar{D}_p^*) \quad \dots\dots(20)$$

無次元平均粒子径 κ が1であれば、サンプルの平均粒子径が母集団粉体の平均粒子径と一致していることになりそれはまた実験値が理論値と一致していることにもなる。

さて、問題の分布 $f_{\ln \kappa}$ は(12)式を用いて、(16)式の積分を実行すると次のように求まる；

$$\left. \begin{aligned} f_{\ln \kappa} &= \frac{\sqrt{n}}{\sigma \sqrt{2\pi} \sqrt{2c^2\sigma^2 + 1}} e^{-\frac{\varphi^2}{2}} \Phi(z) \\ \text{ここで, } \varphi &= \frac{\sqrt{n}(\ln \kappa + c\sigma^2/n)}{\sigma \sqrt{2c^2\sigma^2 + 1}} \\ z &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2(2c^2\sigma^2 + 1)}} (2c \ln \kappa + 2c^2\sigma^2 + 1) \\ \text{および, } \Phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(21)^*$$

* 分布(21)は、かたよりの持った分布で、 $c > 0$ ならば左に、 $c < 0$ ならば右にかたよるが、 $n \rightarrow \infty$ とすればこの性質はなくなる。

これでは初期の目的は達した。この結果が、実験にどのくらいの粒子（サンプル量）を用いるべきか、という問題に対して適用される。このことを次節で述べる。

4. 実験に必要な粉体量

この問題を取り扱うためには、粒度分布による実験値のバラツキの分布を知っておく必要がある。しかし、これは前節で求めた“無次元平均粒子径の分布” $f_{\ln \kappa}$ から簡単に誘導できる。今、 $Y(\mu^{(0)}, \sigma^2)$ を Y^* と書き、実験値 $Y(m, s^2)$ と理論値 Y^* との比を λ と定義する。この λ と κ は次のような関係にある；

$$\lambda = Y/Y^* = (\bar{D}_p/\bar{D}_p)^{\alpha} = \kappa^{\alpha} \quad \text{.....(22)}$$

したがってある関数 $f_{\ln \lambda}$ ($\ln \lambda$ の分布になる) はつぎの関係

$$f_{\ln \lambda} d \ln \lambda = \alpha f_{\ln \kappa} d \ln \kappa \quad \text{.....(23)}$$

を満足する。したがって、この関数を

$$f_{\ln \lambda} = f_{\ln \kappa} / \alpha = f(\ln \lambda / \alpha + \ln \bar{D}_p) / \alpha \quad \text{.....(24)}$$

で定義すれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\ln \lambda} d \ln \lambda = 1 \quad \text{.....(25)}$$

を満足し、明らかに“無次元実験値の対数” $\ln \lambda$ の分布となっている。

このようにして実験値の分布が得られると、実験値が理論値と誤差 $\pm \delta$ 以内に落ち着く確率は、分布を積分すれば得られる。今、相対誤差 e を

$$e = \frac{Y - Y^*}{Y^*} = \lambda - 1 \quad \text{.....(26)}$$

で定義すると、 $|e| \leq \delta$ となる確率 $P(|e| \leq \delta)$ は

$$\begin{aligned} P(|e| \leq \delta) &= \int_{\ln(1-\delta)}^{\ln(1+\delta)} f_{\ln \lambda} d \ln \lambda \\ &= \left| \int_{\frac{\ln(1-\delta)}{\alpha}}^{\frac{\ln(1+\delta)}{\alpha}} f_{\ln \kappa} d \ln \kappa \right| \quad \text{.....(27)} \end{aligned}$$

から計算できる。

これで、一応問題の解答は得られたのであるが、これでは計算が大変で、不便であるので、以下では近似を用いて簡単化してみよう。幸い、サンプルの粒子数はたいていの粉体プロセスでは十分大きい ($n > 50$) と考えられる。一方、②式の z は $\ln(1-\delta)/|\alpha| \simeq -\delta/|\alpha|$ なる近似を行なうと、常に不等式；

$$z \geq \left\{ \sqrt{2c^2\sigma^2+1} - \frac{2\delta}{|\alpha|} \frac{\sqrt{c^2}}{\sqrt{2c^2\sigma^2+1}} \right\} \sqrt{\frac{n}{2}} \quad \text{.....(28)}$$

を満足する。そこで、相対誤差の上限 δ に、

$$0 \leq \delta/|\alpha| \ll \sigma \quad \text{.....(29)}$$

なる条件を付加すると、

$$\frac{\delta}{|\alpha|} \ll \sigma \leq \frac{2c^2\sigma^2+1}{2\sqrt{c^2}}$$

であるから、次式が成り立つ；

$$\frac{2\delta\sqrt{c^2}}{\sqrt{2c^2\sigma^2+1}} \ll \sqrt{2c^2\sigma^2+1}$$

したがって、②式は

$$z \geq \sqrt{2c^2\sigma^2+1} \sqrt{\frac{n}{2}} \geq \sqrt{\frac{n}{2}} > 5, \quad (\because n > 50) \quad \text{.....(30)}$$

ところで、 $z=5$ で $\Phi(z)$ は $1-0.286\cdots \times 10^{-6}$ であり、近似的に

$$\Phi(z) \simeq 1$$

この条件が得られると②式が簡単になり、②式の積分が実行できる；

$$\begin{aligned} P &\simeq \frac{\sqrt{n}}{\sigma \sqrt{2c^2\sigma^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left| \int_{-\delta/\alpha}^{\delta/\alpha} e^{-\frac{\varphi^2}{2}} d \ln \kappa \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varphi^2}{2}} d\varphi - \int_{-\infty}^{-|u|} e^{-\frac{\varphi^2}{2}} d\varphi \right. \\ &\quad \left. - \int_{|u|}^{\infty} e^{-\frac{\varphi^2}{2}} d\varphi \right\} = 1 - 2\Phi(-|u|) \quad \text{.....(31)} \end{aligned}$$

ここでパラメータ u は次式で定義した

$$u \equiv \frac{\sqrt{n} \delta}{\alpha \sigma \sqrt{2c^2 \sigma^2 + 1}} \quad \dots\dots(32)$$

(32)式を書き変えると

図 1 実験に必要とされる粒子数 $\omega = u^2 \alpha^2 \sigma^2 (2c^2 \sigma^2 + 1)$

$$\Phi(-|u|) = \frac{1-P}{2} \quad \dots\dots(33)$$

すなわち、相対誤差 e が δ 以内に落ち着く確率 P を指定すると、誤差関数表を使って u を(33)式から求められる。 u が得られると、(32)式から n (粒子数) を求めることができる。このような手法によって決められた n を「必要粒子数」と呼び、これを n_* と書くと、(32)式から次式がなり立つ

$$\log n_* = -2 \log \delta + \log \omega \quad \dots\dots(34)$$

ここで、

$$\omega \equiv u^2 \alpha^2 \sigma^2 (2c^2 \sigma^2 + 1) \quad \dots\dots(35)$$

このパラメータ ω は、バラツキの程度を表わしており、 ω が大きいほどバラツキは大きい。(34)式は簡単な図でも表わされる。これを図 1 に示す。

5. 例 題

以上の結果がどのように使えるか、例を考えてみよう。

一般的な例

一般的な例としてストークスの沈降法則のように、プロセス変量が粒子径の 2 乗に比例するプロセスを取り上げよう。粉体母集団は個数基準で 50% 径が 5 ミクロン、

表 1 一般的な例
 $y = KDp^2$, $p = 95\%$, $q = \pm 5\%$

対数標準偏差 $\sigma (= \ln \sigma_g)$	幾何標準偏差 σ_g	RRS 分布の n (均等数)	バラツキ ω		必要粒子数 n_*	
			個数基準	重量基準	個数基準	重量基準
0	1	∞	0	0	—	—
0.693	2	1~3	7.08	120.7	2.8×10^{-3}	4.8×10^{-4}
1.099	3	0.6~2.5	63.4	717.7	2.6×10^{-4}	2.4×10^{-5}

重量中位径	個数基準 $\sigma_g = 2$		重量基準 $\sigma_g = 2$		個数基準 $\sigma_g = 3$		重量基準 $\sigma_g = 3$	
1 μ	2.9	10^{-6} mg	5.0	10^{-5} mg	2.7	10^{-5} mg	2.5	10^{-4} mg
10 μ	2.9	10^{-3} mg	5.0	10^{-2} mg	2.7	10^{-2} mg	2.5	10^{-1} mg
100 μ	2.9	mg	50	mg	27	mg	250	mg
1 mm	2.9	g	50	g	27	g	250	g
1 cm	2.9	kg	50	kg	27	kg	250	kg

84%径が8ミクロン（粒子の大きさはあまり重要ではないが具体的にするためこのような粉体としておく）の対数正規分布にしたがっているとすると、 $\mu^{(0)}$ は1.61、 σ^2 は0.221となる。パラツキのパラメタ ω を求めるためには、 α と c と u の値が必要であるが、 α は2であることがわかっており、 c は個数基準と重量基準でそれぞれ1および4であることは(9)式からただちに得られるから、(3)式より一応 ω は次のようになる。

$$\omega^{(0)}=1.27u^2, \quad \omega^{(3)}=7.13u^2 \quad \cdots \cdots (36)$$

ところで、 u は(3)式の解であって、それはデータの $p\%$ を相対誤差 $\pm q\%$ に入れようとする要求の p によって決まり、 q にはよらない*。たとえば95%のデータがある誤差範囲に入れたいなら、 P は0.95であり、関数表を使って(3)式の解を得ると u は1.96となる。この場合、これを(36)式に代入すると $\omega^{(0)}$ 、 $\omega^{(3)}$ はそれぞれ4.87および27.4となる。このようにパラツキのパラメタが数値で得られると、必要粒子数 n_* は(4)式あるいは図1から、それぞれの要求（今度は q ）に応じて求められる。すなわち、

$$\begin{aligned} n_*^{(0)}(95\%, \pm 10\%) &= 487, \\ n_*^{(3)}(95\%, \pm 10\%) &= 2,740 \\ n_*^{(0)}(95\%, \pm 5\%) &= 1,900, \\ n_*^{(3)}(95\%, \pm 5\%) &= 11,000 \end{aligned}$$

記 号

β : $\alpha/2$
 $\bar{D}_p$: 標本平均粒子径
 $\bar{D}_p'$: 母集団平均粒子径
 n : サンプル粒子数
 n_* : 必要粒子数
 $P(|d| \leq \delta)$: 実験値が相対誤差 $\pm \delta$ 以内に入る確率; 信頼性
 σ : 標本標準偏差
 σ_g : 相対信頼性パラメタ; $\Phi(-|u|) = (1-P)/2$ で決められる

.....,
 記号 $n_*^{(3)}(p\%, \pm q\%)$ はデータの $p\%$ が相対誤差 $\pm q\%$ に入るために必要な粒子数を示している。

同様に、任意の確率 P についても必要粒子数を求められる。

標準偏差 σ の2、3の値について計算し、粒子の真密度 ρ_p を $2g/cm^3$ として重量に直した値を表1に示しておく。

ところで図1はもう1つ別の使い方も出来る、すなわち50,000個の粒子を使えばデータの95%は、個数基準で相対誤差 $\pm 1\%$ に、また重量基準で $\pm 2.5\%$ に入ることになる。

6. おわりに

ここで述べた方法は、導出そのものには少しむづかしいところもあるが、結果は非常に簡単であって、その応用法の一例も示すことができた。これは対数正規分布という非常に便利な分布を仮定したためであるけれども、一般の粒度分布をもつ粉体についても大ざっぱには適用できると思われる。この手法が粒度分布についてだけでなく、他の何らかの分布をもつ現象の誤差の検討にも発展しうことは明らかであるので、粉体プロセスの研究に少しでも役立つのではないかと期待している。なお、本文の内容は化学協会英文誌 *J. Chem. Eng.* 4巻1号に掲載されている。

* 記号 p, q はそれぞれ P, δ の%表示

α : (7)式の定数
 β : 粒度表示基準数（個数基準で0、重量基準で3）
 δ : 相対誤差
 κ : 無次元表示の標本平均粒子径 $= \bar{D}_p / \bar{D}_p'$
 σ : 母集団標準偏差
 σ_g : 母集団幾何標準偏差
 ω : パラツキのパラメタ $= u^2 \alpha^2 \sigma^2 (2c^2 \sigma^2 + 1)$

引 用 文 献

- 井伊谷ら：化学工学第3回秋季大会講演要旨集，P.235 (1969)
- Chakravati, I. M., R. G. Laha and T. Roy : "Hand-book of Methods of Applied Statistics", vol. I, p. 153,

- John Wiley & Sons, Inc., New York (1967)
 3) 田口：実験計画法，第2版，P.858，丸善（1963）
 4) 田畑：粉体工学研究会誌，6，No.5，324（1969）