定半径巡回平面上における粒子の運動について

——面内運動形フルイの運動条件——

Movement of Particles on a Circular Motion Plane with Constant Radius

三輪 茂雄**

Shigeo Miwa

1. ま え が き

平面上のどの点をとっても、半径一定の円運動をなしている場合、この面は定半径巡回運動 (constant-radius circular motion) をなすという。この種の運動は、フルイを両手にもって円運動させる操作として古くから農業における選穀作業などの手フルイに使われてきた。工業的には小麦粉や穀物類のフルイ用として発達したジャイレトリ・シフターにその代表的な例をみることができる。図1はこの種の運動を発生させるメカニズムの例を示す。

フルイ機の最近の発達著しく、とくに振動数が大きく(普通600rpm以上)、かつ網面に直角方向の振動成分を有する振動フルイは、大体1~数mm以上の粒子径の大きい処理物を主に対象として、大型化の傾向が顕著である。

これにたいして細ないし微粉域では、ジャイレトリ・シフター、ジャイロシフター、ローテックス・スクリーンなど、振動数が比較的小さく、(普通400rpm以下)、振幅が大きくて、かつ網面に直角方向の振動成分がないか、あるいは殆んど無視しうような、いわゆる面内運動形のフルイ機を用いることが多く、これも最近では大型化が進んでいる。

細あるいは微粉の処理に面内運動形のフルイ機が使われる傾向にあるのは、網面上における粉体層の強力なかくはん、あるいは粒子群(凝集した)の分散が、フルイ分けの効率向上に有効に作用するのが、ひとつの有力な理由である。小麦粉や穀物類、粉体食品など植物性ないし繊維質の物質用として発達し、その後、付着・凝集性の粉体一般にも使われるようになり、化学工業や医薬品工業など広く利用されるようになったが、面内運動形のフルイ網上において粉体層に働く強いせん断力がその最

大の特徴をなしているものと考えられる。さらに比重が小さくて粒子径が小さい粉体では、小振幅、大振動数の振動フルイの網面部の空気抵抗が大きくなりすぎて、フルイ分けを阻害する因子となるので^{1,2)}、この点でも、大振幅、小振動数で、垂直方向の振動成分のない面内運動形が有利になる³⁾。

定半径巡回運動は、フルイ分け以外にも種々の応用があり、造粒機、選別機、乾燥機、分散機、混合機など特殊な用途にたいして、ユニークな機能を発揮している。また粉体の流動現象の一つの形態としても興味ある対象であろう。しかしながら、定半径巡回運動面上における粒子群の運動に関する基礎的研究は少なく、フルイの最適回転半径と回転数も、経験的に行なわれているのが現状である。そこでこれらの考え方について知られている事項をまとめて参考に供したいと思う。

Fig. 1 Examples of sifters with constant-radius circular motion.

昭和42年2月3日受理

* 同志社大学工学部化学工学科 (〒602 京都市上京区今出川烏丸)

TEL 075-211-2311

2. ジュコフスキー円と、スコット円

定半径旋回運動面上における粒子運動に関するもっとも詳しい研究は、ソ連のジュコフスキー(Жуковский)が1949年に発表したものといわれている^{3,5)}。(しかしその原報はまだ入手していないのでそれを詳しく紹介している Соколов の著書⁶⁾より引用する)。

質量 m なる粒子が、半径 R 、角速度 ω なる定半径旋回運動をなす平面上にのっているものとする。粒子が面にたいして静止し、面と運動を共にして、面との間に相対運動がない場合には、粒子は慣性力 $m\omega^2 R$ を有する。そして粒子が面上で保持されている力は摩擦力であり、その最大値 F は、面と粒子との間の摩擦係数を μ_s とすれば $F=mg\mu_s$ である。(ここで簡単のため平面と粒子との付着力は考慮せず、また静止摩擦係数と動摩擦係数はひとしいものとする。したがって

$$\omega^2 R \leq g \mu_s,$$

であれば、粒子と面とは相対的静止状態を保つ。しかし

$$\omega^2 R > g \mu_s,$$

になると摩擦による保持力は失われ、相対的運動を生ずる。相対運動を生ずる最低角速度 ω_c は、したがって次式で与えられる。

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g \mu_s}{R}} \quad \dots\dots(1)$$

次に、相対運動の特性について考える。わかっている条件は、平面の等速円運動による慣性力(遠心力) P の方向と大きさ $m\omega^2 R$ 、摩擦力の大きさ $F=mg\mu_s$ 、それにこの摩擦力は面と粒子との相対運動の方向と正反対の方向であるということである。平面の運動が等速円運動であるから、その面上で生ずる粒子の相対運動も等速円運動であることが当然予想され、したがってその相対運動による慣性力 P_0 の方向は、相対運動の方向(したがってその正反対の摩擦力の方向)と直角をなすと考えることができる。図2はこれらの関係を示したものである。図には3つの軌跡円が示され、それぞれ平面の軌跡、粒子の相対運動の軌跡(これを以下ではジュコフスキー円と呼ぶ)、および絶対運動の軌跡(スコット円)である。相

Fig. 2 Loci of a particle on a plane with constant-radius circular motion.

対運動の軌跡というのは、運動平面に固定した座標に関する軌跡、絶対運動の軌跡というのは、地面に固定した座標に関する軌跡である(図ではそれが固定していることを示すため、台が書いてある)。

絶対運動の軌跡の半径を r_a 、その慣性力を P_a で示すと、ダランベールの原理より

$$\overline{P_a} + \overline{F} = 0$$

でなければならない。また

$$\overline{P_a} = \overline{P} + \overline{P_0}$$

である。(ここに $\overline{P_a}$, $\overline{P}$, $\overline{P_0}$ はベクトルを示す)。(したがって次の関係がある。

$$\overline{F} + \overline{P} + \overline{P_0} = 0 \quad \dots\dots(2)$$

以上より、力の直角三角形のベクトル式を解いて P_0 の大きさを決定することができる

$$P_0 = \sqrt{P^2 - F^2} \quad \dots\dots(3)$$

ベクトル $\overline{P_0}$ は角速度 ω をもって等速回転し、 P_0 と F はつねに 90° の角度をなし、同じ方向に同じ角速度で回転する。

$P = m\omega^2 R$, $P_0 = m\omega^2 r_0$, $F = mg\mu_s$ を入れて

$$r_0 = R \sqrt{1 - \left(\frac{g \mu_s}{\omega^2 R}\right)^2} \quad \dots\dots(4)$$

これはジュコフスキー円の半径を示す式である。後記の二層の場合と区別するため、これを単層ジュコフスキー円と呼ぶ。

また $P_a = F$ より

$$r_a = \frac{g \mu_s}{\omega^2} \quad \dots\dots(5)$$

(これは網の上から粒子を眺めていると直接観測できるもので、Scott⁹⁾ がのべているもので、筆者は従来、これをスコット円と呼んできた。別著⁷⁾ p. 245, 269参照)。

P と P_a とのなす角 φ については次の関係がある。

$$\cos \varphi = \frac{g \mu_s}{\omega^2 R} = \frac{r_a}{R} \quad \dots\dots(6)$$

3. 厚い粒子層の場合のジュコフスキー円

以上では、網にある1個の粒子の運動について考えたが、定半径旋回平面上に、非常にたくさんの粒子がうすい層、たとえば1粒子層で存在するとき、各粒子についていつも μ_s がひとしく変化しなければ、どの粒子も同じ運動をするのであるから、下の平面にたいしては、1粒子層の連続した1枚の板のように挙動することになる。(実際には網面は凹凸があり、粒子も不規則形状をなしており、ひっかかりや、とび上りがある、複雑になる。しかし平均的にはやはり一枚の板のように挙動することは、実際にも視察によって確認できる)。この板状の粒子層は、角速度 ω 、半径 r_a なる絶対円運動、半径 r_0 なる相対円運動をなしている。

ところが、粒子層が厚くなるとどうなるであろうか。一般に粒子と平面との摩擦係数 μ_s と、粒子層同士の摩擦係数 μ_p とはちがっており、たとえば平面がフルイ網で、穀粒の粒子層の場合、 $\mu_p = (0.85 \sim 0.8) \mu_s$ すなわち、粒子層間の μ_p の方が15~20%低い値になるとされている。(μ_s の測定法については別著⁷⁾ p. 281 参照)。そのような場合には、平面の角速度をゼロから次第に増してゆくと、まず粒子層の上層と下層との間で相対運動がはじまり、その限界条件における角速度 ω_c' は(1)式と同様にして次式で与えられる。 $\omega_c' < \omega_c$ であり

$$\omega_c' = \sqrt{\frac{g \mu_p}{R}} \quad \dots\dots(7)$$

また上層の絶対運動の軌跡半径 r_a' は次式で示される。

$$r_{a2} = -\frac{g \mu_p}{\omega^2} \quad \dots\dots(8)$$

さらに回転数が増して、後記の(13)式の角速度 ω_c (前記(1)式ではない) をこえると、下層と平面との間にも相対運動がはじまる。そして上層と下層とは独立に運動する。(上層と下層との境目がどこにできるかについては、ここでは別問題とする)。このように上層と下層との二層に分れて別々に運動する場合に、下層の粒子層に作用する力として、次の3つを考えることができる。

上層の質量を m' 、下層の質量を m として (小さな要素をとって考えるものとして)

$$\text{絶対運動の慣性力} \quad P_a = m \omega^2 r_a$$

$$\text{上層に関する摩擦力} \quad F_1 = m' g \mu_p$$

$$\text{平面との摩擦力} \quad F = (m + m') g \mu_s$$

定常運動ではこれら3つの力がバランスする。

まに半径 R なる定半径旋回平面上で粒子が運動する場合、 P と P_a とのなす角 φ は(6)式で示されたことを考え、2層の場合には R の代りに r_a なる定半径旋回平面

Fig. 3 Equilibrium of forces and loci for two-layer movement

$R=3.2\text{cm}$, $N=260\text{rpm}$, $\mu_s=0.8$, $\mu_p=0.6$, $m/m'=1$, $r_a=1.61\text{cm}$, $r_a'=0.795\text{cm}$, $r_{a2}=2.26\text{cm}$, $\varphi'=60^\circ 30'$

(粒子下層)があり、その上で上層が回転するのであるから、前のときの P と P_a との間の角度関係は、この場合には P_a と F_1 (上層の運動方向) との角度関係に相当するから、 P_a と F_1 との間の角度 φ' は次式で与えられる。

$$\cos \varphi' = \frac{g \mu_p}{\omega^2 r_a} \quad \dots\dots(9)$$

図3は二層運動の場合の力の関係と、軌跡を示す。 F_1 と P_a の合力が F と釣合っている。そこで力のバランスの三角形より、第2余弦定理を用いて

$$\begin{aligned} F^2 &= F_1^2 + P_a^2 - 2F_1 P_a \cdot \cos(\pi - \varphi') \\ &= F_1^2 + P_a^2 + 2F_1 P_a \cdot \cos \varphi' \quad \dots\dots(10) \end{aligned}$$

これに前記の F_1, P_a および $\cos \varphi'$ の値を入れて変形すると、下層の絶対運動半径を示す次式をうる

$$r_a = \frac{g \mu_s}{\omega^2} \cdot k \quad \dots\dots(11)$$

$$k = \sqrt{\left(\frac{\mu_p}{\mu_s}\right)^2 + \left(1 + \frac{m'}{m}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\mu_p}{\mu_s}\right)^2\right]} \quad \dots\dots(12)$$

この式は、無次元係数 k 、したがって r_a は、 m' が大きく(層が厚く)なり、 μ_p が小さくなるにつれて大きくなること、すなわち下層の絶対運動半径は、粉体層の物理的性質と、層の厚みに依存することを示している。

下層と平面とが相対運動を生ずる限界条件は、 $r_a = R$ のときであるから、(11)式の r_a を R にかえて、そのときの ω の値を ω_c とおき、次式で与えられる。

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g \mu_s k}{R}} \quad \dots\dots(13)$$

4. ジュコフスキー円の解析 (二層運動の場合)

二層運動の場合のジュコフスキー円の半径を、一層の場合の r_0 と区別するため r_{02} で表わすことにする。 r_{02} の値を求めるのに、ジュコフスキーは図解法を示し、図3においてB点を通る垂線と、A点を中心とする半径 R なる円との交点が r_{02} の中心であり、BCの距離を r_{02} の値としている。

解析的には次のようにして求められる。図4のように φ'' をとると(10)式と同様にして次式が書ける。

$$F_1^2 = F^2 + P_a^2 - 2F \cdot P_a \cdot \cos \varphi'' \quad \dots\dots(14)$$

(10), (14)式の辺々相加えて整理し、次式をうる。

$$P_a + F_1 \cos \varphi' - F \cdot \cos \varphi'' = 0$$

ここで

$$(P_a + F_1 \cdot \cos \varphi') / F = X$$

とおいて

$$\cos \varphi'' = X, \quad \sin \varphi'' = \sqrt{1 - X^2} \quad \dots\dots(15)$$

また次の関係がある

$$(P_a \cdot \sin \varphi'' + P_0)^2 + (P_a \cdot \cos \varphi'')^2 = P^2$$

これに P_a, P_0, P の値を入れて整理すると次式がえられる。

$$r_{02}^2 + 2r_a \cdot r_{02} \cdot \sin \varphi'' + (r_a^2 - R^2) = 0$$

これを r_{02} について解いて

$$r_{02} = -r_a \sqrt{1 - X^2} + \sqrt{R^2 - r_a^2 X^2} \quad \dots\dots(16)$$

ここで

$$X = \frac{\frac{m}{m'} + \left(\frac{\mu_p}{\mu_s k}\right)^2}{\left(\frac{m}{m'} + 1\right)} \cdot k \quad \dots\dots(17)$$

また、機械特性として

$$\text{遠心効果 } K = \frac{R \omega^2}{g}$$

とおき(16)式を次の無次元形に書くことができる

$$\frac{r_{02}}{R} = -\frac{\mu_s k}{K} \cdot \sqrt{1 - X^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_s k X}{K}\right)^2} \quad \dots\dots(18)$$

これを二層ジュコフスキー円の式と称する。

Fig. 4 Generally accepted values of R and K for commercial sifters.

Fig. 5 Relations between K and r_0 for monolayered Zhkovskii's circle.

Fig. 6 Relations between K and r_0 for two-layered Zhkovskii's circle.

5. 面内運動形フルイにおける問題点

以上のべたジュコフスキー円を、実際の面内運動形フルイの場合について考えてみる。 R と K の実用範囲を知るために、著名な数種の機械についての実績値をとり⁷⁾、横軸に回転半径 R 、縦軸に rpm をとって図4のようにプロットしてみた。そして大体の傾向線を右下りの斜線で示した。 R が大きくなると、 K はあまり大きくとり

Fig. 7 Relations between R and K required to give constant r_{02}

くい実情が現われているが、これは機械的強度とコストの絡んだ問題であって、性能（フルイ分け効率と処理能力）上の理由とは別問題である。

このような実用範囲について、(4)式から次の無次元形にして単層ジュコフスキー円を求める

$$\frac{r_0}{R} = \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_s}{K}\right)^2} \quad \dots\dots(19)$$

図5には μ_s をパラメーターにとって K と r_0/R の関係を示した。これから、網面と粉体との摩擦係数 μ_s が大きくなると、ジュコフスキー円はかなり小さくなり、とくに $K=1.5$ 程度のフルイではそれが著しいことがわかる。 r_0 は R に正比例するから、 μ_s が大きいくほど R は大きくとることが望ましい。当然のことであるが $r_0=0$ になる条件 $K=\mu_s$ は(1)式の条件と同じである。

次に二層ジュコフスキー円は (18) 式より計算できるが $\mu_p=0.6$ 、 $\mu_s=0.8$ で $m/m'=1/5$, $1/2$, $1/1$ の場合について図6に示す。 m/m' の影響は $K=1.5$ 以上では比較的少ない。実際のフルイ分けにおいては、上層の相対運動がある値を確保することは大切であろう。このことを調べるため、図7をつくってみた。たとえば $r_{02}=2\text{cm}$ を確保するには、 $R=6\text{cm}$ くらいなら K は1.5程度でもよいが、 R が3～4cm以下になると急に K を大きくとる必要が生じ、 $R=2.5\text{cm}$ 以下は殆んど使えないことがわかる。図4の実績傾向線をここに書き入れてみると、この $r_{02}=2\text{cm}$ の線に近づいていることは興味深く、実際にもこの種のフルイ機で $R=2.5\text{cm}$ 以下は殆んど実用されていない事実もこの辺にその理由があるのかもしれない。なお網上での輸送速度を増すには遠心効果が大きいことを要する点を別に考慮する必要があるがここでは論じない。

6. む す び

粉体の運動現象には種々の形態があるが、定半径巡回運動は定常的な規則性のある運動であって非常に興味深い。以上にのべたジュコフスキーの解析はこれを説明する上で有力な手がかりを与えるものといえよう。運動し

ている粉体層内で、 μ_p がどのようにになっているか、もし連続的に上層ほど空間率が小さいために μ_p が小さくなるとすれば、二層から多層へ考えを展開することも考えられる。そしてそれが面内運動フルイの運転条件とどう関連するかについては今後の研究にまたねばならない。

Nomenclature

g	: acceleration of gravity		movement.
K	: centrifugal effect ($=Ra^2/g$)	r_{02}	: radius of relative motion in two-layer movement.
m', m	: mass of upper and under layer of particles	μ_p	: coefficient of internal friction
R	: radius of gyration of sifter	μ_s	: coefficient of friction between particles and screening surface.
r_a	: radius of absolute motion in mono-layer movement.	ω	: angular velocity
r_{a2}	: radius of absolute motion in two-layer movement.	ω_c	: critical angular velocity
r_0	: radius of relative motion in mono-layer		

参 考 文 献

- 1) Крюков, Б. И. : Извест ВУЗ. гор. жур., 6, [1]83~85 (1963)
- 2) Гриценко, Ю. Г. : Цветные металлы, 37, [2] 54~61 (1964)
- 3) Болегов, А. В. : Извест ВУЗ. гор. жур., 9, [7]167~171 (1966)
- 4) Жуковский, Н. Е. : Заметка о плоском рассеиве. Соб. соч, т3. Гостехиздат, (1949)
- 5) Дябин, Н. В. : Извест. ВУЗ. гор. жур., 10, [9]145~148 (1967)
- 6) Соколов, А. Я. : Технологическое оборудование предприятий по хранению и переработке зерна. (穀物の貯蔵と加工企業の技術的装置), Хлебоиздат. (1958) (これはマイクロフィルムの形で入手できる。)
- 7) 三輪茂雄著 : “粉体のフルイ分け” (日刊工業) (1965)
- 8) Scott, R. A. : Cremer, H. W., Davis, T. 共著 “Chemical Engineering Practice,” Vol. III., p. 128~161 “Screening, grading and Classification.”

Author's Abstract

Movement of Particles on a Circular Motion Plane with Constant Radius

by

Shigeo MIWA

(Department of Chemical Engineering, Doshisha University)

Critical considerations on the Zhukovskii's theoretical analysis⁴⁾ of the movement of particles on the screening surface with constant-radius circular motion is given.

Following his analysis, Fig. 2 and 3, radius of locus for relative motion of a particle (so-called Zhukovskii's circle) are expressed by eq. (4) for monolayer movement, and eq. (18) for two-layer.

Based on the theory, generally accepted values of R and K , Fig. 4 for commercial sifters is discussed in Fig. 5, 6 and 7.