空気輸送の数値実験 (Ⅱ)*

辻 裕**
Yutaka TSUJI

前回には、本数値実験の基礎をなす粒子の反発について考察し、速度および回転角速度の衝突前後の関係式を導いた。今回は、粒子の運動方程式や付加圧力損失の求め方、さらに粗大粒子の空気輸送では重要な役割を果たす異常反発（不規則反発）について述べる。式、図表および文献の番号は、すべて前回からの続きのものを用いる。

4. 運動方程式

4.1 座標系と粒子の初期条件

空気輸送においては、粒子供給器からの粒子は、鉛直下方の方向で輸送管内へ投入されるのが普通であるので、図4に示すように座標系を選ぶ。すなわち、管軸に沿って x 軸、水平方向に y 軸、鉛直上方に z 軸をとる。また粒子供給管の管軸と輸送管の管軸との交点を原点にとる。ここで粒子供給管の半径を R とする。粒子の初期条件ではできるだけ現実に近い状態が望ましい。敲密には、供給管からの個々の粒子の落下速度、落下位置などはすべてランダムな値をとるが、ここでは落下位置だけをランダム量として扱い、落下速度は、粒子径、供給管径、粒子流出量が与えられた場合、決定される量とする。

まず、図4の平面図、立面図において、輸送管に投入される粒子の初期位置を r, θ によって与える。したがって (x, y, z) 座標で、それら初期位置を書き直せば

$$x = r_0 \sin \theta \quad \dots\dots(4.1)$$

$$y = r_0 \cos \theta \quad \dots\dots(4.2)$$

$$z = \sqrt{(D/2)^2 - r_0^2} \cos^2 \theta \quad \dots\dots(4.3)$$

となる。 r_0 を 0 から R までの、 θ を 0 から 2π までの一様乱数で与える。一般に粒子供給管からの粒子の落下速度 $\dot{z}$ は、粒子の供給の仕方によって異なり、それらに依

図4 座標系

じた与え方をとればよい。ここでは、ホッパーに貯えられた粒子が粉体オリフィスから落下する場合の Rausch の経験式¹³⁾

$$W = 0.5077 D_0^{2.745} d^{-0.245} \frac{C \cdot C_0}{\sqrt{\tan \varphi}} \rho_B \quad \dots\dots*(4.4)$$

を用いる。ただし上式において

W : 粒子流出質量 [kg/s]

D_0 : オリフィス直径 $= 2R$ [mm]

d : 粒子径 [mm]

ρ_B : 粒子かさ密度 [kg/m³]

φ : 安息角

C : かさ密度の壁面効果補正係数

C_0 : ホッパー底角に関する補正係数

である。 $D_0/d > 15 \sim 20$ であれば $C \cdot C_0 = 1$ とおくことができる。粒子の落下速度 $\dot{z}$ は、

$$\dot{z} = \frac{W}{\frac{\pi}{4} D_0^2 \rho_B} \quad \dots\dots(4.5)$$

で与えられるので、上式に式 (4.4) を代入すれば、

$$\dot{z} = 0.6465 D_0^{0.745} d^{-0.245} / \sqrt{\tan \varphi} \quad \dots\dots(4.6)$$

となる。式 (4.4) の下に示した各種のパラメータが与えられれば、 W は一意的に決定される。したがって管内空気流量 Q が与えられれば、混合比 m (粒子・空気質量・流量比) は決定される。通常の空気輸送では Q が一定の場合、 m の調節は粒子供給量 W を調節すること

昭和58年1月10日受付

*(1) は本誌 Vol. 20 No. 8 p. 514 に掲載済

**大阪大学工学部産業機械工学科 (〒565 吹田市山田丘2-1)

TEL 06-877-5111

* Rausch のもとの式を SI 単位で書き直した。

によってなされる。この m の調節を本計算では D_0 を変化させることによって行なった。すなわち、混合比 m の定義式

$$m = \frac{W}{Q} \quad \dots\dots(4.7)$$

に式 (4.4) を代入し、整理すれば

$$D_0 = \left[\frac{m Q d^{0.245} \sqrt{\tan \varphi}}{0.5077} \right]^{\frac{1}{2.745}} \quad \dots\dots(4.8)$$

となる。本シミュレーションでは、 Q と m を独立なパラメータとして任意に与えるので、それらの値に応じて、 D_0 をその都度変化させた。

4.2 各種流体力と運動方程式

一般に粒子の運動は次式によって記述される。

$$M\ddot{\chi} = F_d + F_l + F_g \quad \dots\dots(4.9)$$

上式において、 M は粒子の質量、 χ は粒子の位置ベクトル $\chi = ix + jy + kz$ 、 F_d 、 F_l 、 F_g はそれぞれ流体抵抗、揚力、重力による外力である。流体力としては、この他に回転に対する粘性抵抗も考慮される。

粒子の運動方程式の誘導において用いられるおまな仮定は次のとおりである。

- (1) 粒子に作用する流体力に関してはすべて、一様流中または静止流体中の結果を適用する。
- (2) 気流の速度分布は $1/7$ 乗法則に従い、粒子の存在による気流速度分布の歪みを無視する。さらに粒子の運動は気流乱れの影響を受けない。
- (3) 粒子相互の衝突を無視する。

流体抵抗ベクトル F_d の大きさを $|F_d|$ は

$$|F_d| = C_D A \frac{1}{2} \rho_a U^2 \quad \dots\dots(4.10)$$

と与えることができる。ここで C_D は抵抗係数、 A は粒子の断面積、 ρ_a は空気の密度、 U は次式で表わされる粒子と空気の相対速度である。

$$U = \sqrt{(u - \dot{x})^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad \dots\dots(4.11)$$

ただし、 u は気流の局所的な時間平均速度である。

C_D はレイノルズ数 $Re = Ud/\nu$ の関数で、標準曲線

がすでに多くの教科書に示されている。広範囲のレイノルズ数に対しては、次の式が利用できる¹⁴⁾。

$$C_D = K_1 + \frac{K_2}{Re} + \frac{K_3}{Re^2} \quad \dots\dots(4.12)$$

K_1 、 K_2 、 K_3 の値は表 5 に示されている。 F_d は相対速度ベクトル $(\dot{x} - u)\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$ と逆方向に作用するので、流体抵抗力の (x, y, z) 方向成分は、

$$\left. \begin{aligned} F_{dx} &= |F_d| \frac{(\dot{x} - u)}{U} = k M C_D U (\dot{x} - u) \\ F_{dy} &= |F_d| \frac{(-\dot{y})}{U} = -k M C_D U \dot{y} \\ F_{dz} &= |F_d| \frac{(-\dot{z})}{U} = -k M C_D U \dot{z} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(4.13)$$

で与えられる。ただし、 ρ_s を粒子の真密度として

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{\pi}{6} d^3 \rho_s \\ k &= \frac{3}{4} \frac{\rho_a}{\rho_s d} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(4.14)$$

である。

次に、回転による揚力についての式を与えよう。輸送管内壁との衝突により、粒子の回転角速度は相当に大きな値、たとえば $10^3 \sim 10^4 \text{ rad/s}$ 程度の値をとる。この値は実験¹⁵⁾によっても確認されており、回転による揚力を考慮する場合としない場合で、粒子の飛跡の計算結果は明らかに異なる。図 5 に示すように、球が左回転しながら速度 U で運動するき、揚力 F_l は回転軸と速度に垂直な方向に働く。このとき F_l に対しては

$$|F_l| = C_L A \frac{1}{2} \rho_a |U|^2 \quad \dots\dots(4.15)$$

図 5 球の回転と揚力

図 6 揚力係数と速度比の関係

表 5 式 (4.12) における係数

Re	K_1	K_2	K_3
$Re < 0.1$	0	24	0
$0.1 < Re < 1.0$	3.69	22.73	0.0903
$1.0 < Re < 10$	1.222	29.1667	-3.889
$10 < Re < 10^2$	0.6167	46.5	-116.67
$10^2 < Re < 10^3$	0.3644	98.33	-2778.0
$10^3 < Re < 5 \times 10^3$	0.365	148.62	-47500.0

で揚力係数 C_L が定義され、 C_L は速度比 σ

$$\sigma = \frac{d}{2} \omega / |U| \quad \dots\dots(4.16)$$

の関数とおくことができる。 C_L と σ の関係¹⁰⁾ を図 6 に示すように、次式で近似する。

$$C_L = \begin{cases} 0.5\sigma & \sigma \leq 1 \\ 0.5 & \sigma > 1 \end{cases} \quad \dots\dots(4.17)$$

輸送管内の球の場合、 U 、 ω とともに x 、 y 、 z の 3 方向成分を有するが、すべての成分を考慮すると複雑になるので、以下のように近似的に扱う。すなわち、相対速度ベクトルとしては

$$U = (u - \dot{x})i \quad \dots\dots(4.18)$$

のみを考慮し、回転角速度ベクトルを

$$\omega = \omega_y j + \omega_z k \quad \dots\dots(4.19)$$

とおく。つまり (y, z) 平面上の運動にのみ揚力を考慮する。以上のように仮定すれば、揚力の大きさ $|F_l|$ および σ は次式で与えられる。

$$|F_l| = C_L \frac{1}{8} \pi d^2 \rho_a (u - \dot{x})^2 \quad \dots\dots(4.20)$$

$$\sigma = \frac{|\omega_y j + \omega_z k| d}{2(u - \dot{x})} \quad \dots\dots(4.21)$$

揚力ベクトル F_l の方向は、 $U \times \omega$ の方向と一致するので、 $U \times \omega$ の単位方向ベクトル e を

$$e = e_y j + e_z k \quad \dots\dots(4.22)$$

とおけば

$$F_l = |F_l| e_y j + |F_l| e_z k \quad \dots\dots(4.23)$$

となる。 e_y 、 e_z は式 (4.18)、(4.19) より

$$\left. \begin{aligned} e_y &= \frac{(u - \dot{x}) \omega_z}{|u - \dot{x}| \sqrt{\omega_y^2 + \omega_z^2}} \\ e_z &= \frac{(u - \dot{x}) \omega_y}{|u - \dot{x}| \sqrt{\omega_y^2 + \omega_z^2}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(4.24)$$

である。式 (4.20) を式 (4.23) へ代入すれば、 F_l の各成分が次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} F_{lx} &= 0 \\ F_{ly} &= C_{Lv} k M (u - \dot{x})^2 \\ F_{lz} &= C_{Lz} k M (u - \dot{x})^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(4.25)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} C_{Lv} &= C_L e_y \\ C_{Lz} &= C_L e_z \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(4.26)$$

である。

粒子に働く重力 F_g は

$$F_g = -g M k \quad \dots\dots(4.27)$$

で与えられる。

式 (4.13)、(4.25)、(4.27) を式 (4.9) へ代入し整理すれば、粒子の運動方程式は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k C_D U (u - \dot{x}) \\ -k C_D U \dot{y} \\ -k C_D U \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k C_{Lv} (u - \dot{x})^2 \\ k C_{Lz} (u - \dot{x})^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad \dots\dots(4.28)$$

k は式 (4.14)、 C_D は式 (4.12) と表 5、 C_{Lv} 、 C_{Lz} は式 (4.26) と式 (4.17)、(4.21) より決定される。上式を積分すれば粒子の飛跡が求まるが、積分は数値積分法、たとえばルンゲ・クッタ法などを用いて行なう必要がある。

4.3 圧力損失

運動方程式によって粒子の運動を求めるだけであれば、本手法の実用的価値は低い。なぜなら設計技術者にとって知りたい量は圧力損失であるからである。そこで本節では圧力損失の求め方について述べる。

区間 dx における全圧力損失 dp は、気流のみによる圧力損失 dp_a と粒子による付加圧力損失 dp_s の和として、

$$dp = dp_a + dp_s \quad \dots\dots(4.29)$$

とおく。 dp_a に対しては単相流の結果、たとえばブラジウスの管摩擦公式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_a}{dx} &= \frac{\lambda}{D} \frac{1}{2} \rho_a u^2 \\ \lambda &= \frac{0.3164}{Re^{\frac{1}{4}}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(4.30)$$

が利用できる。

付加圧力損失 dp_s は粒子に働く流体抵抗の反作用として得られるが、具体的に式を導くため図 7 に示すように、断面内の粒子の分布を一様と仮定し、現象を一次元的に扱うことにする。図において dx は、粒子が dt 時間に進む距離

$$dx = \dot{x} dt \quad \dots\dots(4.31)$$

とし、区間 dx に含まれる粒子の個数を N とする。付加圧力損失 dp_s と管断面積 S の積 $dp_s \cdot S$ は、運動量の定

図 7 空気輸送される粒子群

理により、流体が粒子群に与えた力、すなわち流体抵抗に等しい。したがって

$$dp_s \cdot S = -F_{dx} \cdot N \quad \dots\dots(4.32)$$

となる。普通、空気輸送の取扱いにおいては、粒子の個数 N よりも粒子の質量流量や混合比（粒子と空気の質量流量比） m がパラメータにとられるので、ここでも N の代わりに m を用いて式を整理する。 dt 時間に輸送される粒子の質量は MN であり（ M は粒子1つ当りの質量で式（4.14）により与えられる）、流体の質量は $\rho_a S \bar{u} dt$ である。ただし $\bar{u}$ は断面平均された気流速度である。混合比 m の定義

$$m = \frac{MN}{\rho_a S \bar{u} dt} \quad \dots\dots(4.33)$$

より

$$N = m \frac{\rho_a S \bar{u} dt}{M} \quad \dots\dots(4.34)$$

となる。式（4.13）、（4.34）を式（4.32）へ代入すれば

$$\frac{dp_s}{dt} = -k \rho_a \bar{u} C_D U(u - \dot{x}) m \quad \dots\dots(4.35)$$

が得られる。式（4.28）、（4.35）において時間軸 t と空間軸 x は式（4.31）によって変換される。運動方程式（4.28）と連立して、式（4.35）の積分を行なえば、付加圧力損失の流れ方向の変化が求まる。ただし、このようにして求めた付加圧力損失の値は1個粒子の値に粒子個数を掛けたものに相当するので付加圧力損失の実測値と比較するには、多数の粒子に対し同様の計算を実行し、個々の粒子に対し得られた dp_s の値を平均する必要がある。著者の経験によれば、30～50個程度の粒子の計算によって実用的な意味で十分収束するようである。

4.4 粒子の回転の粘性減衰

粒子の回転の粘性減衰は以下の理由によって考慮する必要がある。前に述べたように空気輸送される粒子は $10^3 \sim 10^4 \text{ rad/s}$ 程度の高速回転をしているが、回転数の無限の増加があり得ないことはいうまでもない。しかし、数値実験において回転の増加を抑制する因子を考慮しない場合、回転数は衝突の度に増え、流れ方向に粒子の回転数は増加しつづける。とくに粒子の反発が管の下半面のみで繰り返される場合に、この傾向が顕著である。前回示した衝撃運動方程式の解からもわかるように、一般に衝突後の粒子速度は回転による影響も受ける。本数値実験では回転が粒子速度を増加させる傾向をもつため、回転の減衰がない場合、空気との相対速度が小さくなり、圧力損失などが実際と合わなくなる。

著者が調べた限りでは、球の回転の粘性減衰については、静止流体中において得られた結果しか見あたらないので、ここではそれを利用する。角速度 ω で回転する

表6 式（4.37）における係数

R	C_1	C_2
$10 < R < 20$	5.32	37.2
$20 < R < 50$	6.44	32.2
$50 < R < 100$	6.45	32.1

球に働くトルク T はストークス近似が成り立つ場合、次の理論解を持つ。

$$T = -8\pi\mu a^3\omega \quad \dots\dots(4.36)$$

ただし、 μ は流体の粘度、 a は粒子の半径 $d/2$ である。しかし、粗大粒子の場合にはストークス近似を用いることができないので、広範囲のレイノルズ数 $R = a^2\omega/\nu$ に対し成立する次の式¹⁷⁾を適用する。

$$T = -\frac{1}{2}\rho_a a^5 \omega^2 (C_1 R^{-\frac{1}{2}} + C_2 R^{-1}) \quad \dots\dots(4.37)$$

表6に C_1 と C_2 の値を示す。粒子の慣性モーメントを I とすれば、粘性による角速度の変化は

$$I \dot{\omega} = T \quad \dots\dots(4.38)$$

で与えられる。ただし、

$$I = \frac{8}{15}\pi\rho_s a^5 \quad \dots\dots(4.39)$$

である。微分方程式（4.38）により、衝突から次の衝突までの間の角速度の変化量が求まる。7章において結果を示すが、粘性による減衰を式（4.37）、（4.38）で考慮することにより、実測値と同程度の回転数におちつくことが確認されている。

5. 異常反発

5.1 異常反発のモデル

前章までの説明で、空気輸送シミュレーションの準備がほとんどでき上がったことになるが、ここでさらに考慮すべき重要な現象が標題に示した異常反発である。前章までの計算モデルでは、水平な直管において粒子の反発が下の壁で単純に繰り返されると、図8に示すように粒子の壁面からの距離は減少の一途をたどり、いずれの粒子も管底をしゅう動する結果におちいる。し

図8 異常反発をしない粒子の運動

図9 異常反発をする粒子の運動

かし実際の空気輸送を観察すれば、図9に示すように粒子は反発を繰り返しながら飛翔しつづける。少くとも粗大粒子の空気輸送の場合、回転による揚力、乱れ、さらに気流速度勾配による揚力などの流体力は、しゅう動を妨げる原因にはなり得ない。長い水平管において粒子が飛翔しつづけるのは、衝突後の粒子の速度の半径方向成分（壁面に垂直な方向）が衰えないためである。ここでは、このような反発を異常反発と呼ぶ。

異常反発のメカニズムを厳密に考慮した式を得ることは困難であるので、モデルを作ることとする。そのようなモデルとしては、いろいろなものが考えられる。たとえば壁面にわずかな起伏を仮定したり¹⁰⁾、または粒子形状を完全球からわずかに歪ませるだけで¹⁵⁾、粒子が定常的に反発を繰り返すことが、本稿と同様の数値実験によって示されている。ここでは、仮想壁面を導入することによって粒子と壁面の反発を操作する方法を述べる。すなわち、長い水平管内で定常的な反発を可能にするため、管壁に対する粒子の入射角 η がある値 β 以下になれば、壁面は図10の破線で示される迎え角 α をもつ壁面に置きかえられる。この迎え角 α と入射角 η の関係を勾配 δ を用いて次式で仮定する。

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = -\delta(\eta - \beta) \quad \eta < \beta \\ \alpha = 0 \quad \eta \geq \beta \end{array} \right\} \quad \dots\dots(5.1)$$

上式から導かれる結果と同様の結果が、粒子の反発実験¹⁰⁾からも得られている。仮想壁面に対する衝突における粒子速度や回転角速度の変化の計算には3章（前回第8号）で求めた関係式をそのまま使えばよい。粒子がこのような仮想壁面と反発する場合、もとの壁面から測った反射角 η' は η より大きくなるので、速度の半径方向成分は衰えず粒子の反発はいつまでも続く。

実際の空気輸送と同じような粒子群の分布を得るには、仮想壁面が流れ方向（管軸方向）に α の角度を持つだけでなく、さらに周方向にも

$$-r_0 < r < r_0 \quad \dots\dots(5.2)$$

の範囲の角度 γ を持つと仮定し、 r を乱数によって衝突

図10 異常反発における仮想壁面

図11 直角座標と曲座標

の度に与える必要がある。 γ による不規則性を与えた理由は、角度 α のみによる反発の操作では、距離が長くなると粒子の分布が一ヶ所に集中し、現実の分布と合わなくなるためである。ただし、ふり角 γ は粒子が異常反発を行なう場合のみ考慮するだけで十分である。 β , δ , γ_0 などの決定はまったく経験的であり、それについては7章で述べる。

5.2 座標変換

粒子の空間運動は図4に示したように0-xyz座標系を用いて記述されており、一方衝突前後の関係については、図1（前回第8号）に示す衝突平面上に設定された0-XYZ座標系を用いてその解が表わされている。そのため2つの座標系に対する粒子の速度および回転角速度の変換式が必要となる。まず異常反発がない場合について変換式を示し、そのあと異常反発を考慮に入れる。

x と X は同じであるので

$$\left. \begin{array}{l} V_x^{(0)} = \dot{x} \\ \omega_x^{(0)} = \dot{\omega}_x \end{array} \right\} \quad \dots\dots(5.3)$$

である。 $(V_y^{(0)}, V_z^{(0)})$ 成分と $(\dot{y}, \dot{z})$ 成分の変換式を導くため、図11に示す管断面において直角座標 (y, z) と曲座標 (r, ϕ) を考える。

$$\left. \begin{array}{l} y = r \cos \phi \\ z = r \sin \phi \end{array} \right\} \quad \dots\dots(5.4)$$

なる関係と

$$\left. \begin{array}{l} -V_y^{(0)} = \dot{r} \\ V_z^{(0)} = r \dot{\phi} \end{array} \right\} \quad \dots\dots(5.5)$$

より

$$\left. \begin{array}{l} -V_y^{(0)} = \dot{y} \cos \phi + \dot{z} \sin \phi \\ V_z^{(0)} = -\dot{y} \sin \phi + \dot{z} \cos \phi \end{array} \right\} \quad \dots\dots(5.6)$$

が容易に得られる。 $V_y^{(0)}$ に負符号（-）が付くのは、 r の方向と Y の方向が逆にとられているためである。式(5.3)と(5.6)をまとめて次のように書くこともできる。

$$\mathbf{V}^{(0)} = A \dot{\mathbf{x}} \quad \dots\dots(5.7)$$

回転角速度についても同様に

$$\omega^{(0)} = A\omega_x \quad \dots\dots(5.8)$$

となる。ただし

$$\left. \begin{aligned} V^{(0)} &= (V_x^{(0)}, V_y^{(0)}, V_z^{(0)}) \\ \omega^{(0)} &= (\omega_x^{(0)}, \omega_y^{(0)}, \omega_z^{(0)}) \\ \dot{x} &= (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \omega_x &= (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \\ \phi &= \tan^{-1} z/y \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(5.9)$$

である。異常反発を考慮しないならば、上式によって (X, Y, Z) 座標に対応する衝突前の粒子速度、回転角速度が求まるので、表2（前回第8号）に与えた式に従って、衝突後の (V_x, V_y, V_z) , $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ が得られる。 (V_x, V_y, V_z) および $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ が得られれば、次に式(5.7), (5.8)の逆変換により $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ および $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ に計算し直し、再び運動方程式や回転粘性減衰式に基づいて次の衝突までの粒子の運動を計算すればよい。

次に異常反発がある場合を考えよう。本稿のモデルでは、異常反発は真の壁面に対し傾いた仮想壁面に粒子が衝突することによって引き起こされる。衝突問題の際に

図12 衝突問題における座標系

図13 ふり角 γ による回転

図14 迎え角 α による回転

用いた座標系を図12に改めて示す。図において X は管軸に平行、 Y は壁面に垂直、 Z は X, Y に垂直な座標である。仮想壁面を考えることは、図12の座標系にふり角 γ 、迎え角 α の回転を与え、上に求めた $(V_x^{(0)}, V_y^{(0)}, V_z^{(0)})$, $(\omega_x^{(0)}, \omega_y^{(0)}, \omega_z^{(0)})$ をそのような回転を施された座標系の成分として変換し、それらを衝突前の速度、角速度として扱うことと等価である。

まず、 (X, Y, Z) 座標系に対し、図13に示すように X を軸に (Y, Z) 平面内で角度 γ の回転を与えて作られる座標系を (X', Y', Z') とする。ただし $X=X'$ である。したがって (X', Y', Z') 座標における速度成分は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} V_x^{(0)} \\ V_y^{(0)} \\ V_z^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x^{(0)'} \\ V_y^{(0)'} \\ V_z^{(0)'} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(5.10)$$

次に図14に示すように Z' を軸に (X', Y') 平面内で角度 α の回転を与えてできる座標系を (X'', Y'', Z'') とする。ただし $Z'=Z''$ である。 (X'', Y'', Z'') 座標系における速度成分は

$$\begin{bmatrix} V_x^{(0)''} \\ V_y^{(0)''} \\ V_z^{(0)''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x^{(0)'} \\ V_y^{(0)'} \\ V_z^{(0)'} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(5.11)$$

で与えられる。回転角速度についても式(5.10), (5.11)とまったく同じ変換行列を使うことができるので、結局ベクトル $V^{(0)''} = (V_x^{(0)''}, V_y^{(0)''}, V_z^{(0)''})$ および $\omega^{(0)''} = (\omega_x^{(0)''}, \omega_y^{(0)''}, \omega_z^{(0)''})$ と $V^{(0)} = (V_x^{(0)}, V_y^{(0)}, V_z^{(0)})$, $\omega^{(0)} = (\omega_x^{(0)}, \omega_y^{(0)}, \omega_z^{(0)})$ は次式で関係づけられる。

$$\left. \begin{aligned} V^{(0)''} &= B V^{(0)} \\ \omega^{(0)''} &= B \omega^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(5.12)$$

ただし、

$$B = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad \dots\dots(5.13)$$

図15 フローチャート

である。上式で得られた $V^{(0)'}$, $\omega^{(0)'}$ を表2 (前回第

8号) の $V^{(0)}$, $\omega^{(0)}$ の代わりに代入すれば V , ω が求まるが、これは仮想壁面に衝突した場合の値であり、これを (x, y, z) 座標に変換するには次のような逆変換を施す必要がある。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A^{-1} B^{-1} \dot{V} \\ \omega_x &= A^{-1} B^{-1} \omega \end{aligned} \quad \dots (5.14)$$

ただし、 A^{-1} , B^{-1} はそれぞれ行列 A , B の逆行列である。

本手法では、粒子は常に異常反発するのではなく、粒子の壁面に対する入射角 η がある値 β よりも小さい場合に限っている。

$$\eta < \beta \quad \dots (5.15)$$

したがって異常反発を起こさせるかどうかの判定のために、入射角 η を衝突の度に計算しておかねばならない。 η は次式で与えられる。

$$\eta = \tan^{-1} \frac{-V_{Y^{(0)}}}{\sqrt{V_{X^{(0)}}^2 + V_{Z^{(0)}}^2}} \quad \dots (5.16)$$

6. 数値計算

以上で数値実験を行なうためのすべての準備が完了したことになり、次の段階はプログラミングである。どのような問題に応用するかによって一般にプログラムは大きく変る。最も簡単な長さ L の直管の場合のフローチャートの一例を図15に示す。

次回は、直管の場合およびベンドを有する場合に得た計算例を示す。

支

献

- 13) Zenz, F.A. and D.F. Othmer: Fluidization and Fluid-Particle Systems, Reinhold, 140 (1960)
- 14) Morsi, S.A. and A.J. Alexander: *J. Fluid Mech.*, 55—2, 193 (1972)
- 15) Matsumoto, S. and S. Saito: *J. Chem. Eng. Japan*, 3—1, 83 (1970)

- 16) 谷一郎: 科学, 24—9, 405 (1950)
- 17) Dennis, S.C.R., S. N. Singh and D.B. Ingham: *J. Fluid Mech.*, 101—2, 257 (1980)
- 18) Matsumoto, S. and S. Saito: *J. Chem. Eng. Japan*, 3—2, 223 (1970)
- 19) Muschelknautz, E.: VDI-Forsch.-Heft. 476 (1959)