Rumpf 式の新たな解釈とその応用

椿 淳一郎*
Jun-ichiro TSUBAKI

はじめに

粉体層の挙動を力学的に解析する場合、実際に測定できるのは応力であり、粒子接触点に働く力の測定はほとんどの場合不可能である。しかし、粒子接触点に働く力を求めたくなる場合が少なからずあるし、また求めることができれば粉体層の力学的挙動の解明に対して有効な武器となる。そのため、粉体層に作用する応力と粒子接触点に働く力の関係式が、これまでいくつか提案されてきた。その中でも、粉体層引張り強さと接触点に働く付着力の関係を求めた Rumpf 式は有名である。

ここでは、これまで提案されている関係式を詳しく紹介するとともに、Rumpf 式に対して新たな意味づけを行ない、その応用例をいくつか紹介する。

1. 応力と力の関係を表す理論式

(1)式に示す Rumpf 式¹⁾は、粉体層の引張り強さに関する理論式として広く知られている。

$$\sigma_z = \frac{1-\varepsilon}{\pi} k \frac{H}{d^2} \quad \cdots(1)$$

一方、応力と力の関係式がいくつか^{2,5,6)}理論的に誘導されている。本章においては、それらのいずれもが(1)式に一致し、したがって Rumpf 式は引張り強さに関する式でなく、応力と力の関係を表す一般式であることを示す。

1.1 Rumpf^{1,2)}, Molerus³⁾ の考え方

ここでは、Molerus の論文に沿って説明する。

まず、粉体層、応力に対して次の仮定を置く。

- i) 粉体層は、半径 r (直径 d) の均一球によってランダムに充てんされている。
- ii) 応力は静水圧のように等方的に作用している。

粉体層に作用する応力を求めるためには、粉体層中に平面を考えなければならない。いまその平面を、Fig. 1

Fig. 1 粉体層の中の平面

Fig. 2 静水圧の応力と圧縮力の分布

に2次的に示すように、 $\overline{gg'}$ とする。しかし、実際の応力伝達は、Fig. 1 に太線で示した曲面 $\widetilde{gg'}$ 上の接触点において行なわれ、これらの接触点はすべて平面 $\overline{gg'}$ が横切る球（以下切断球と略称）上にある。したがって、次のように考えれば、応力と力を関係づけることができる。

$$\text{応力} = \frac{\text{球の個数}}{\text{単位面積}} \times \frac{\text{応力方向に働く力}}{1 \text{ 個の球}} \quad \cdots(2)$$

(2)式を実際に計算するために、粉体層を次のように平均化して考える。切断球は、Fig. 1 から明らかなように、様々な位置で他の球と接触し、その接触球の数もまちまちである。しかし、切断球をすべて重ね合わせれば、ランダム充てんを仮定しているので、接触球はFig. 2に示すように、切断球の回りに一様に分布していることになる。このように粉体層を統計的に平均化して考えれば、応力が等方的に作用するとき、各接触点に働く力も等方的になり、切断球の中心に向って同じ大きさで働くと考えられる。

昭和58年10月5日受付

*名古屋大学工学部化学工学科(〒464 名古屋市千種区不老町)
TEL 052-781-5111

Fig. 3 均一球で充てんされた粉体層の切断面

Fig. 4 切断された球粒子

まず、(2)式右辺第1項、単位面積当りの切断球の個数を求める。平面 $\overline{gg'}$ による切断面は、Fig. 3 のように得られる。球の半径は r で一定であるが、切断される位置によって切断面に表れる円の半径は、0 から r まで変化する。いま、Fig. 4 に示すように、中心から z の位置で球を切ったとすると、その切断円の面積 S は次式で与えられる。

$$S = \pi(r^2 - z^2) \quad \dots\dots(3)$$

したがって、Fig. 3 に示した平面 $\overline{gg'}$ 上の切断円の平均面積 $\bar{S}$ は次式で与えられる。

$$\bar{S} = \frac{1}{r} \int_0^r S \, dz = \frac{2\pi r^2}{3} = \frac{\pi d^2}{6} \quad \dots\dots(4)$$

一方、均一球のランダム充てんにおいては、3次元空隙率と2次元空隙率は等しいので、平面 $\overline{gg'}$ 上の単位面積中の切断円面積の総和は $1-\varepsilon$ になる。よって、切断面単位面積当りの球の数 n は次式で与えられる。

$$n = \frac{1-\varepsilon}{\bar{S}} = \frac{6(1-\varepsilon)}{\pi d^2} \quad \dots\dots(5)$$

次に、(2)式右辺第2項、切断球1個に働く応力方向の力は次のように考えることによって求められる。

$$\begin{aligned} & \frac{\text{応力方向に働く力}}{\text{1個の球}} \\ &= \left(\frac{\text{接触点数}}{\text{ある位置の切断球}} \times \frac{\text{力の応力方向成分}}{\text{1接触点}} \right) \text{の平均} \end{aligned}$$

Fig. 5 力の働き方

Fig. 6 切断球に働く z 方向の力

……(6)

(6)式を求める前に、次のことを考慮しなければならない。Fig. 5 に改めて示したように、曲面 $\overline{gg'}$ 上の接触点に働く力には2通りあることである。一つは、接触球から切断球に働く力であり、もう一つは逆に切断球から接触球に働く力である。前者の場合、切断球の中心は平面 $\overline{gg'}$ の下にあり、後者の場合は上にある。しかし両者の存在割合は、ランダム充てんを仮定しているのでまったく等しい、また力が切断球から接触球に働く場合でもその逆の場合でも、作用反作用の法則からその大きさはまったく一致する。したがって、Fig. 5(a), (b) に示すどちらか一方では切断球と接触球の力学的関係は代表できることになる。以下では、Fig. 5 の(a)の場合で説明を進める。

切断される球は平面 $\overline{gg'}$ に対して0から r までの距離をとりうるが、いま Fig. 6 に示すように z の距離の切断球を考え、この球で平面 $\overline{gg'}$ の上方にある球冠(曲面 $\overline{gg'}$ に接する部分)の平均接触点数を求める。球冠上に Fig. 6 示すような帯を考えると、その面積 ΔO は次式で与えられる。

$$\Delta O = 2\pi r \sin \theta \cdot r d\theta \quad \dots\dots(7)$$

平均配位数を k とすれば、 ΔO 上の接触点数 Δk_0 は次式で与えられる。

$$\Delta k_0 = \frac{\Delta O}{4\pi r^2} k = \frac{k \sin \theta \Delta \theta}{2} \quad \dots\dots(8)$$

また、帯 ΔO 上に働く力の応力方向すなわち z 方向成分は、次式で与えられる。

$$P_z = P \cos \theta \quad \dots\dots(9)$$

よって帯 ΔO 上に働く力の z 方向の総和 ΔF は、(8)、(9) 式の積で与えられるので次式となる。

$$\Delta F = \Delta k_0 P_z = \frac{kP \sin 2\theta \Delta \theta}{4} \quad \dots\dots(10)$$

さらに、Fig. 6 から明らかなとおり、 θ は曲面 $\widetilde{gg'}$ の範囲内で変化するので、 $0 \leq \theta \leq \delta$ (ただし $\cos \delta = z/r$) となる。したがって、平面 $\overline{gg'}$ から z の距離にある球に働く z 方向の力 F は、(10) 式を 0 から δ まで積分すれば得られることになる。

$$F = \frac{kP}{4} \int_0^\delta \sin 2\theta d\theta = \frac{kP}{4r^2} (r^2 - z^2) \quad \dots\dots(11)$$

また、 z は 0 から r までとりうるので、 F の z に対する平均 $\bar{F}$ を求めれば、切断球 1 個に作用する z 方向の力の平均、すなわち(6)式を求めたことになる。

$$\bar{F} = \frac{1}{r} \int_0^r F dz = \frac{kP}{6} \quad \dots\dots(12)$$

以上で、(2)式右边の各項は求められたので、(5)、(12) 式を(2)式に代入すれば、次の結果を得る。

$$\sigma_z = \frac{1-\varepsilon}{\pi} k \frac{P}{d^2} \quad \dots\dots(13)$$

(13) 式で、 P を接触点に働く付着力 H で置き換え、 σ_z を粉体層引張り強さとしたのが Rumpf 式である。Rumpf は、1958 年と 1967 年にこの考え方に基いた誘導を試みている。(1) 式は最初の論文¹⁾ において提案されているが、誘導過程にいくつか誤りが含まれていた。2 番目の論文²⁾ において訂正を試みているが、完全に訂正されずに、(1) 式の右边に $9/8$ の係数の掛った式を提案している。Rumpf らが最終的に(1) 式を導出した考え方は、次に紹介するように実に簡潔なものであった。

1.2 Rumpf⁴⁾ の考え方

Rumpf は 1970 年に、以下の考え方によって最終的に Rumpf 式を導出したのであるが、意外にも国内においては Rumpf 式の紹介や解説は、1967 年の誤りを含んだ論文²⁾ に基づいて行なわれていたようである。

この考え方においても、均一球によって充てんされた粉体層を仮定し、応力は等方的であるとしている。また、Fig. 6 に示した切断球に着目して解析を進めている点も、1.1 で紹介した考え方と同様である。

Fig. 7 に示すように、切断球の表面に帯 ΔO を考えると、図から明らかなとおり、この ΔO の平面 $\overline{gg'}$ 上への投影面積 ΔS は、

Fig. 7 z 方向から切断球と平面に働く力

$$\Delta S = \cos \theta \Delta O \quad \dots\dots(14)$$

で与えられる。一方、帯 ΔO 上の平均接触点数 Δk_0 は、(8) 式と同様に、

$$\Delta k_0 = \frac{\Delta O}{\pi d^2} k \quad \dots\dots(15)$$

で与えられる。また、帯 ΔO 上に働く力の z 方向成分の総和 ΔF は、(10) 式同様次式で与えられる。

$$\Delta F = \Delta k_0 P_z = \frac{kP}{\pi d^2} \cos \theta \Delta O \quad \dots\dots(16)$$

ここで、(14) 式の関係を用いて(16) 式の $\cos \theta \Delta O$ を消去すれば、

$$\Delta F = \frac{kP}{\pi d^2} \Delta S \quad \dots\dots(17)$$

が得られる。この(17) 式は、平面 $\overline{gg'}$ 上に働く力が切断球の切断面積に比例することを表している。したがって(17) 式の右边を平面 $\overline{gg'}$ 上の単位面積中に占める切断球の面積 $1-\varepsilon$ まで積分すれば、左辺の力 ΔF は単位面積に働く力となるので応力 σ_z と書き改めることができ、Rumpf 式(18) 式を求めることができる。

$$\sigma_z = \frac{kP}{\pi d^2} \int_0^{1-\varepsilon} dS$$

$$\therefore \sigma_z = \frac{1-\varepsilon}{\pi} k \frac{P}{d^2} \quad \dots\dots(18)$$

もちろん Rumpf の論文においては圧縮力は想定しておらず、接触点に働く力としては付着力、応力としては引張り強さのみを想定している。

1.3 長尾⁵⁾ の考え方

これまで紹介してきた考え方においては、粉体層に剪断応力が作用しない等方応力に限定されていたのに対して、長尾の考え方は剪断応力も含め応力一般が扱える点ですぐれている。

長尾の考え方においては、粉体層はやはり均一球によってランダムに充てんされているが、等方応力という仮

Fig. 8 応力と力の関係

定はとりのぞかれている。まず長尾の基本的な考え方を説明する。一般 i 軸に垂直な平面 gg' 上で j 方向に作用する応力 σ_{ij} は、曲面 $\widetilde{gg'}$ 上の接触点に働く力の j 方向成分 P^j の総和として表される。いま平面 gg' の面積を δS_i とすれば、次式で表される。

$$\sigma_{ij} \delta S_i = \sum_{\delta S_i} P^j \quad \dots\dots(19)$$

この(19)式を、Fig. 8 に示したような 2 次元粉体層を例にとって説明する。いま、粉体層中に 1 軸に垂直な平面 gg' を考え、この平面に作用する応力と接触点に働く力の関係を求める。平面 gg' に作用する応力としては、垂直応力である σ_{11} と剪断応力である σ_{12} がある。このとき長さ δl_1 の粉体層に働く垂直力 $\sigma_{11} \delta l_1$ は、長さ δl_1 内にある接触点に働く力の 1 方向成分の総和 $\sum P^1$ に等しく、剪断力 $\sigma_{12} \delta l_1$ は接触点に働く力の 2 方向成分の総和 $\sum P^2$ に等しいというのが、(19)式の意味する所である。

この(19)式を具体的に解くわけであるが、これまで紹介してきた考え方では切断球に着目してきたが、長尾の考え方では、接触点を形成する球対に着目している。

いま、Fig. 9 に示すように i 軸に対して ξ_i だけ傾いた球対を考え、平面 gg' より下側の球を k 、上側の球を l とする。Fig. 9 に示した傾き ξ_i の球対は粉体層中に数多くあるが、平面 gg' が切断できるのは、Fig. 10 に示すように球 k が平面 gg' 上にある場合と球 l が平面 gg' 上にある場合の間にある球対であり、その範囲は $2r \cos \xi_i$ となる。いま δS_i の面積を基準にして考えているので、平面 gg' が切断できる傾き ξ_i の球対は、体積 $\delta S_i 2r \cos \xi_i$ の中に含まれることになる。したがって、単位体積中に含まれる接触点数を A とすれば、曲面 $\widetilde{gg'}$ 上に傾き ξ_i の球対によって形成される接触点数 N は次式で与えられる。

$$N = 2A \delta S_i r \cos \xi_i \quad \dots\dots(20)$$

一方、球対が傾き ξ_i をとる確率 p は、 ξ_i は 0 から $\pi/2$ まで変化するので、Fig. 11 から明らかなように、半

Fig. 9 接触球対

Fig. 10 球対の存在範囲

Fig. 11 球対の存在確率

球の表面積と(7)式で求めた ΔO の比で与えられ、次式で表される。

$$p = \frac{\Delta O}{2\pi r^2} = \sin \xi_i d\xi_i \quad \dots\dots(21)$$

したがって、傾き ξ_i の接触点において伝達される力の j 方向成分の総和は、次式で与えられる。

$$\sum_{\delta S_i} P_{\xi_i}^j = N p P^j = A r \delta S_i P^j \sin 2\xi_i d\xi_i \quad \dots\dots(22)$$

よって、(19)式の右辺は(22)式を 0 から $\pi/2$ まで積分すれ

Fig. 12 代表球回りの力の分布

ば求められる。

$$\sum_{\delta S_i} P^j = \int_0^{\pi/2} \sum_{\delta S_i} P \xi_i^j d\xi_i = A \delta S_i r \int_0^{\pi/2} P^j \sin 2\xi_i d\xi_i \quad \dots\dots(23)$$

(19), (23)式より i 軸に垂直な面で j 方向に作用する応力 σ_{ij} は、結局接触点に働く力の j 方向成分 P^j によって次のように求められることになる。

$$\sigma_{ij} = Ar \int_0^{\pi/2} P^j \sin 2\xi_i d\xi_i \quad \dots\dots(24)$$

この(24)式を、いかなる面でも剪断応力は作用しない等方応力という仮定のもとで導かれた結果と比較するため、剪断力の作用しない面、すなわち主応力面で考えてみる。(24)式中の P^j は接触点位置の関数となるため、このままでは(24)式を計算することはできない。そこで、長尾は球面上に働く力も応力と同じように楕円分布をしているという仮定を導入している。この仮定は、Fig. 2に示したように、等方応力の場合には球面上に働く力が一様に球の中心に向かって働くという仮定と、同じ考え方といえる。この仮定を導入すると、Fig. 12に2次元的に示したように、主応力軸 J 軸 ($J=I, II, III$) から ξ_J の角度をなす接触点に働く力 P の J 方向成分 P^J は次式で与えられる。

$$P^J = P_J \cos \xi_J \quad \dots\dots(25)$$

ここで P_J は主軸方向に働く力で、球面上に働く力の主値である。

これで(24)式中の P^j を位置の関数として与えることができたので、(24)式右辺の積分は可能となる。いま、座標軸を主応力軸にとっているので、(24)式は次のように書き改められる。

$$\sigma_J = Ar \int_0^{\pi/2} P_J \cos \xi_J \sin 2\xi_J d\xi_J \quad \dots\dots(26)$$

(26)式右辺の積分は容易に行なうことができ、次式を得る。

$$\sigma_J = \frac{2Ar}{3} P_J \quad \dots\dots(27)$$

Fig. 13 一般座標系

これが長尾の最終結果であるが、Rumpf 式と比較するために次のような変形を行なう。 A は単位体積中の接触点数であるから、次式によって空隙率 ε と配位数 k の関係で次のように与えられる。

$$A = \frac{1-\varepsilon}{4\pi r^3/3} k \quad \dots\dots(28)$$

この式を(27)式に代入すれば、Rumpf 式とまったく同じ次式が得られる。

$$\sigma_J = \frac{1-\varepsilon}{\pi} k \frac{P_J}{d^2} \quad \dots\dots(29)$$

また(24)式とは逆に、Fig. 13に示すような一般座標系で、各軸から角 ξ_i ($i=1, 2, 3$) の位置にある接触点に働く力の j 方向成分は、 j 方向に作用する応力 σ_{ij} ($i=1, 2, 3$) によって次式で与えられる。

$$P^j = \frac{3 \sum_i \sigma_{ij} \cos \xi_j}{2Ar} \quad \dots\dots(30)$$

1.4 金谷⁶⁾の考え方

金谷は、ここでは誘導を省略するが、仮想仕事の原理を用いて(30)式に一致する関係式を導出している。いま、主応力軸を座標軸とすると、座標軸に垂直な面では剪断力は作用しないので $I \neq J$ なら $\sigma_{IJ} = 0$ となる。したがって、(30)式は次式となる。

$$P^J = \frac{3\sigma_J \cos \xi_J}{2rA} \quad \dots\dots(31)$$

(31)式の左辺を(25)式で書き改め、整理すれば(27)式に、したがって Rumpf 式に一致する次式を得る。

$$P_J = \frac{3\sigma_J}{2Ar} \quad \dots\dots(32)$$

さらに、これまでのいずれの考え方においても、球面上の接触点分布は一樣としてあつかってきたが、金谷は、接触点分布は主応力方向に、その主応力の大きさにほぼ比例して増大する傾向がある^{7,8)} という実験事実より、

Fig. 14 接触面に働く力の法線方向成分

平均接触点分布密度が Fig. 14 に示すように、接触点に接する単位面積に働く力 P の法線方向成分 P_n に比例するとして、接触点分布を考慮している。接触点の分布を考慮すると(29)式は次のようになる。

$$P^J = \frac{3}{2Ar} \sigma_J \cos \xi_J \frac{\sum_K \sigma_K}{3 \sum_K \sigma_K \cos^2 \xi_K} \quad \dots\dots(33)$$

2. Rumpf 式の新たな解釈

Rumpf 式はこれまで引張り破断に関する理論として知られてきたが、上述のように、様々な考え方によって誘導されてきた応力と力の関係式が Rumpf 式に一致することより、Rumpf 式は応力と力の関係を表す一般式であると結論できる。

Rumpf 式の物理的意味は、(29)式によって明らかにされている。すなわち、(29)式は球表面に働く力の分布が応力楕円と相似な楕円で表されることを示している。このことは、球表面に働く力もまたテンソルとなり、応力テンソルと楕円に関係づけられることを示している。したがって主軸で得られた(29)式は、一般座標系でも成立することになり次式のように一般化される。

$$\sigma_{ij} = \frac{1-\varepsilon}{\pi} k \frac{P_{ij}}{d^2} \quad \dots\dots(34)$$

Fig. 15 に示すように、(34)式を用いれば i 軸方向の接触

Fig. 15 Rumpf 式の物理的意味

Fig. 16 Rumpf 式の剪断試験への応用

Fig. 17 Rumpf 式の剪断試験への応用

点に働く力の3方向成分 P_{ii} , P_{ij} , P_{ik} が、 i 軸に垂直な平面に作用する3つの応力 σ_{ii} , σ_{ij} , σ_{ik} から求められることになる。

3. Rumpf 式的应用

Rumpf 式は、応力と力の関係を表す一般式であることがわかったため、極めて応用範囲の広い実用価値の高い理論式となった。ここでは、粉体層の力学的特性を調べる代表的な試験法である、剪断、圧密、引張り試験に対して、どのように Rumpf 式の適用が可能かを紹介する。

3.1 剪断試験への応用

Fig. 16 に示すように、剪断面に接する粒子接触点に働く圧縮力 Σ と剪断力 T が、(34)式を用いれば、垂直応

力 σ と剪断応力 τ から次のように求められる。

$$\Sigma = \frac{\pi d^2}{1-\varepsilon} \frac{\sigma}{k} \quad \dots\dots(35)$$

$$T = \frac{\pi d^2}{1-\varepsilon} \frac{\tau}{k} \quad \dots\dots(36)$$

また、Fig. 17(b)に示すように、応力のモール円を描くことができれば、主軸を決定することができるので、Fig. 17(a)に示すように、粒子表面の任意の位置に働く力も求められることになる。具体的には次の手順によればよい。まず、モール円が決まれば主応力 σ_J ($J=I, II$) は求められるので(35)式によって力の主値 P_J は求められる。次に力 P もテンソルであるから、主軸から任意に θ だけ傾いた接触点に働く力の主軸方向成分 P^J は次式によって求められる。

$$\begin{pmatrix} P^I \\ P^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_I & 0 \\ 0 & P_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \dots\dots(37)$$

このように、Rumpf 式を用いれば、簡単に粒子表面に働く力を応力から計算できるので、構成粒子に着目した剪断機構のミクロな解析には、極めて有効な武器になると思われる。

3.2 圧密試験への応用

圧密試験の場合にも剪断試験の場合と同様に、応力から粒子表面に働く力を計算できることは当然である。

圧密実験の結果は、空隙率と圧密応力の関係で表される。この圧密特性の解析においても、Rumpf 式が非常に有効であることを紹介する。

Rumpf 式は、 $k\varepsilon = \pi$ を仮定すると次のように書き換えられる。

$$\sigma_{ij} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{P_{ij}}{d^2} \quad \dots\dots(38)$$

(38)式中の空隙率関数は、Fig. 18 に示すようにかなり広い範囲において、次式で近似される⁹⁾。

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \simeq 10 \exp(-4.5\varepsilon) \quad \dots\dots(39)$$

したがって、(38)式は次のようなあつかいやすい式に書き換えることができる。

$$\sigma_{ij} = 10 \exp(-4.5\varepsilon) \frac{P_{ij}}{d^2} \quad \dots\dots(40)$$

この式を圧密試験に適用する場合は、圧密応力 p と圧密応力方向に働く力 P の関係になるから次式となる。

$$p = 10 \exp(-4.5\varepsilon) \frac{P}{d^2} \quad \dots\dots(41)$$

一方、圧密特性である圧密応力 p と空隙率 ε の関係は、Fig. 19⁹⁾に示すように、片対数紙上で直線関係になる場合が多い。そこで、いま圧密応力 p を増大しても接触点にかかる力 P が増大しない場合を考えてみると、

Fig. 18 空隙率関数の近似式

Fig. 19 圧密特性の Rumpf 式による解析

(41)式から明らかとなり圧密特性の傾き $\partial\varepsilon/\partial \ln p$ は $-1/4.5$ となる。この $-1/4.5$ という傾きの値をうまく使うと、Fig. 19 に示したように、圧密応力の増大による空隙率の減少と接触点に働く力の増大を、定量的に区別することができる。Fig. 19 において、任意の基準圧密応力 p_0 から傾き $-1/4.5$ の直線を引くと、この直線は、圧密応力の p_0 からの増大分は、接触点数の増加（空隙率の減少）のみによって伝達されることを意味する。いまある空隙率において、接触点数の増加のみによって伝達可能な圧密応力を p_1' とし、実測値を p とすれば、 $p_1' - p_0$ は接触点数の増加のみによって増大した圧密応力を表し、 $p_1 - p_1'$ は接触点にかかる力の増大による圧密応力増加分を表している。

これを数式によって表現すれば次のようになる。ここで想定しているのは、圧密実験結果が次の実験式で整理される場合である。

$$p = k_1 \exp(-\varepsilon/c) \quad \dots\dots(42)$$

ただし、 k_1 , c は実験定数である。この式から明らかなように、空隙率をさらに $\Delta\varepsilon$ だけ減少させるために必要な圧密応力の増加割合 $\Delta \ln p (= \Delta p/p)$ は、次式で与えられる。

$$d \ln p = -d\varepsilon/c \quad \dots\dots(43)$$

一方、接触点に働く力 P が一定のまま圧密されるとした場合は、(41)式を ε で偏微分して、

$$(\partial \ln p)_P = -4.5 \partial \varepsilon \quad \dots\dots(44)$$

が得られる。ここで(43)、(44)式の比をとれば、

$$\left(\frac{d \ln p}{d\varepsilon} \right) / \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \varepsilon} \right)_P = \frac{1}{4.5c} \quad \dots\dots(45)$$

を得る。この(45)式は、空隙率を $\Delta\varepsilon$ だけ減少させるのに必要とされた圧密応力の増加割合は、接触点に働く力を一定にして圧密した場合の圧密応力増加割合の何倍になるかを表わしている。このことを Fig. 19 と対比させれば、次のようになる。

$$\frac{\ln p_1 - \ln p_0}{\ln p_1' - \ln p_0} = \frac{1}{4.5c} \quad \dots\dots(46)$$

したがって、圧密試験の結果を空隙率のみならず接触点にかかる力によっても、定量的に解析できることになる。

3.3 引張り試験への応用

引張り破断試験は、Rumpf 式のいわば“発祥の地”であるが、Rumpf 式の新たな解釈によって、従来よりはるかに有効な利用が可能になる。すなわち、粉体層の引張り強さに対する、空隙率（接触点数）と1接触点当りの付着力の寄与を、分離して定量的に解析評価できることである。その解析は、圧密試験の場合と同様に、次のようにして行なわれる。

引張り試験の場合、一般式である(40)式は、引張り強さ σ_z と1接触点当りの付着力 H の関係式として、次のように書き改められる。

$$\sigma_z = 10 \exp(-4.5\varepsilon) \frac{H}{d^2} \quad \dots\dots(47)$$

ここで、付着力 H が空隙率 ε によって変化しないと仮定すると、引張り強さ σ_z と空隙率 ε の関係は、Fig. 20 に示すように、片対数紙上で傾き -4.5 の直線となる。一方、数多くの実験結果⁹⁻¹²⁾は、引張り強さ σ_z と空隙 ε の関係が、次の実験式で整理されることを示している。

$$\sigma_z = k_2 \exp(-\varepsilon/b) \quad \dots\dots(48)$$

ただし、 k_2 , b は定数である。したがって、実測値も片対数紙上にプロットするなら、Fig. 20 に示したように、傾き $-1/b$ の直線でよく相関される。

ここで、空隙率が ε_0 で引張り強さが σ_{z0} 、1接触点当りの付着力が H_0 の粉体層を、空隙率 ε_1 まで圧密し

Fig. 20 引張り強さの Rumpf 式による解析

た時の引張り強さについて考えてみる。いま、 ε_0 から ε_1 までの圧密によっても、付着力は H_0 で一定であると考え、Fig. 20 から明らかなように、引張り強さは σ_{z0} から σ_{z1}' まで増大する。つまり、 $\sigma_{z1} - \sigma_{z0}$ は空隙率の減少（接触点数の増大）のみによる、引張り強さの増加を表わしている。それに対して実測値では、 σ_{z0} から σ_{z1} まで増大しているので、 $\sigma_{z1} - \sigma_{z1}'$ は付着力の増加による引張り強さの増大を表わしていることになる。

したがって、圧密試験の場合と同様に、

$$\frac{\ln \sigma_{z1} - \ln \sigma_{z0}}{\ln \sigma_{z1}' - \ln \sigma_{z0}} = \frac{1}{4.5b} \quad \dots\dots(49)$$

を求めることによって、空隙率の変化による引張り強さの変化割合を、接触点数の増加によるものと、1接触点当りの付着力の増加によるものに分離して、定量的に解析評価できることになる。

4. 具体的応用例¹³⁾

われわれは、3.2、3.3で紹介した解析法を、粉体層の引張り破断試験に適用して、興味深い結果を得ているので、要約して紹介する。

粉体層の引張り強さを測定する場合、空隙率は予圧密によって調整されるので、引張り破断試験で得られる測定データには、圧密特性も含まれており、圧密特性、引張り強さについての解析、また両者の関係についての解析も可能となる。

われわれの研究室で得られた22の測定データが、Fig. 21, 22にその1例を示したように、圧密特性および引張り強さに関する実験式⁴²⁾, (48)式で相関されることを確かめ、 $(4.5b)^{-1}$, $(4.5c)^{-1}$ の値を求めてみた。その結果をFig. 23に示したが、引張り試験の場合 $(4.5b)^{-1}$ の値は約3から7で、空隙率の変化による引張り強さの変化割合に対しては、1接触点当りの付着力の増大が、極めて大きな役割を果していることがわかる。

Fig. 21 圧密特性

Fig. 22 引張り強さ

Fig. 23 粒子接触点に働く力の重要性

Fig. 24 引張り強さと予圧密応力

一方、圧密試験の場合 $(4.5c)^{-1}$ の値は約6から19で、圧密応力の変化割合に及ぼす空隙率の変化の寄与はほんのわずかで、圧密応力の変化は、ほとんど粒子接触点に働く圧縮力の変化によって生じていることがわかる。

次に、圧密特性と引張り強さの関係について若干考察してみる。引張り強さ σ_z と予圧密応力 p の関係は、Fig. 24 にその1例を示したように、次の実験式で表わされる。

$$\sigma_z = k_3 p^m \quad \dots\dots(50)$$

ただし、 k_3 , m は定数。さらに理論的考察から、(50)式は次式のように接触点に働く力関係を表わすことも、明らかにしている。

$$H = k_3 P^m \quad \dots\dots(51)$$

(50)式の予圧密応力 p をある近似のもとに、(38)式によって接触点に働く圧縮力 P に書き改めると、引張り強さに関する次の半理論式を得る。

$$\sigma_z = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} k_3 \left(\frac{P}{d^2} \right)^m \quad \dots\dots(52)$$

Fig. 23 に示した結果と、半理論式(52)式によって、予圧密と引張り強さの関係を、次のように考えることができる。粉体層を予圧密すれば、空隙率は減少し接触点数は増大するが、Fig. 23 の $(4.5c)^{-1}$ の値は、それにも増して粒子接触点に働く圧縮力 P が増大することを示している。圧縮力 P と付着力 H は(51)式で関係づけられるから、圧縮力 P の増大はすなわち付着力 H の増大を意味し、Fig. 23 の $(4.5b)^{-1}$ の値が1よりはるかに大きくなるのである。

この解析結果は、粉体層の空隙率調整を目的にして行なう予圧密が、空隙率を減少させるだけでなく、粒子接触点に働く圧縮力をも増大させていること、そして粉体層の引張り強さに対しては、空隙率よりも圧縮力の方が

極めて重要な因子であることを示している。このことは、空隙率が等しくともその調整法が異なっていれば、粉体層はまったく異なる引張り強さを持つことを意味し、空隙率のみによって粉体層の引張り強さを整理することには、問題があることを示している。

より一般的にいえば、現在粉体層の力学的特性を表わすパラメータとして空隙率が広く用いられているが、粉体層の力学的特性は、空隙率によって代表されるものではまったくなく、粒子接触点に働く力によっても評価されるべきであるといえる。この粒子接触点に働く力を考慮に入れた現象の解析と、その評価法の確立が粉体層力学の今後の重要な課題であると思われる。

おわりに

以上 Rumpf 式と、粉体層の応力と粒子接触点に働く力を関係づけるいくつかの理論式を詳細に紹介しながら、Rumpf 式は従来考えられていたような引張り強さに関する理論式ではなく、単に粉体層に作用する応力と接触点に働く力の関係式であることを明らかにした。

しかし、Rumpf 式の適用範囲が、従来考えられていた引張り応力から、圧縮応力や剪断応力を含めた応力一般に拡張されるため、Rumpf 式は極めて応用範囲が広

く、実用価値の高い理論式であることを明らかにした。

また、Rumpf 式が様々な考え方によって誘導された理論式と完全に一致することから、均一球によってランダムに充てんされた粉体層という仮定のもとでは、Rumpf 式はゆるぎない理論式であるということができ

る。したがって Rumpf 式は、実測可能であるマクロな情報を基礎にして、ミクロな視点から粉体層の力学的挙動を解析する上で、強力な武器となるものである。ここでは、粉体層の力学的特性の代表的試験法に対して、いくつか応用法を例示し、引張り試験結果の解析に具体的に適用した例によって、その威力の一端を紹介した。

粉体層力学が他からの借りものでなく、独自の力学体系を持つためには、粉体の不連続性とその不連続面での現象が定量的にとりあつかわなければならない。この「不連続」の問題解決に対して、Rumpf 式がいかになくその実力を発揮してくれることを期待したい。

謝 辞

ここで紹介した内容は、本学会「粉体操作に伴う諸現象に関する勉強会」での伊ヶ崎文和氏の資料に負う所が大きい。伊ヶ崎氏始め勉強会メンバーの諸氏に、厚くお礼申し上げる。

引 用 文 献

- 1) Rumpf, H.: *Chem. Ing. Tech.*, **30**, 144(1958)
- 2) Rietsch, W. and H. Rumpf: *ibid*, **39**, 885(1967)
- 3) Molerus, O.: *Powder Technology*, **12**, 259(1975)
- 4) Rumpf, H.: *Chem. Ing. Tech.*, **42**, 538(1970)
- 5) 長尾高明: 機械学会論文集, **43**, 4038(1977)
- 6) 金谷健一: 粉体工学誌, **17**, 504(1980)
- 7) Oda, M.: *Solids and Foundations*, **12**, 1(1972)
- 8) Oda, M. and J. Konishi: *ibid*, **14**, 25(1974)
- 9) Jimbo, G. and R. Yamazaki: European Symposium Particle Technology, B. 1064(1980 Amsterdam)
- 10) 大塚昭信, 檀上和美: 粉体工学会誌, **18**, 591(1981)
- 11) 椿淳一郎, 加藤啓一, 神保元二: 粉体工学会誌, **1**, 873(1980)
- 12) Jimbo, G. and S. Hatano: the Fine Particle Society Pacific Region Meeting (1983 Hawaii)
- 13) Tsubaki, J. and G. Jimbo: *Powder Technology*, **37**, 219 (1984)