総説

粉粒体層の力学的強度推算について

—力学的強度推算に関する先駆的研究 その2 Roscoe, Rumpf, Ashton ら—

牧 野 和 孝*
Kazutaka MAKINO

山 田 昌 治*
Masaharu YAMADA

河原正佳*
Masayoshi KAWAHARA

倉 光 鋼太郎*
Kohtaro KURAMITSU

緒言

前報¹⁾ において述べたごとく, Jenike (1960)²⁻⁴⁾は, 粉粒体層物性を基礎とする粉粒体プロセスの設計に対する一つの新しい取り扱いを提出した。その意義は極めて高いものと考えられる。なぜならば, 彼は, 粉体工学とは“粉粒体層の物性をいかに分類し(キャラクタライズ), いかに測定し, いかに推算し, そしてその上にいかに設計法を組み立てるか”という観点から確立すべきものである, ということを示唆しているからである。これは, 粉体工学に物性推算という概念の導入の契機を与えたことを示す。こうして誕生した粉体工学における物性推算が“その後どのように展開され, そして今後どのように発展して行くか”は, 粉体工学に携わる者なら誰も興味あるところ

ろであり、また、この問題は“粉体工学がその対象とする粉粒体層物性を基礎とした粉粒体プロセスの体系的設計手法として構成される”ための一つの前提条件として位置づけることができる。そこで、本報では粉粒体層物性の推算という観点から、Jenike に引き続き、先駆的役割を果たしてきた Roscoe(1958)⁶⁾、Rumpf(1958, 1970)^{5,6)} および Ashton-Cheng-Farley-Valentin (1965)⁷⁾ の研究に注目し、それぞれの意義について考察する。

1. 粉粒体の現象とモデル

粉粒体プロセスの工学的設計法の確立のためには、粉粒体の現象の解明が極めて重要であり、本質的ななか

Fig. 1 工学モデル，工学的物性値および工学的設計法

わりを持つが、これは必ずしも直接的ではない。なぜなら、工学的設計法とは、元来与えられた制約条件下で考えられうるありとあらゆるケースでの装置内の現象の解明を必要とするが、現象の解明は常に完全ではありえない。これを克服するのがモデルである。この点に、現象の基本的特徴をよりよく記述し、現実の多様な条件変化に対する見通しのよさを実現するモデルの重要性とその工学的設計法に対する直接的役割を見ることができると。すなわち、粉粒体の現象解明とモデルとの間には **Fig. 1** のごとく、主として前者から前者への情報の流れ（現象の論理構造）が媒介として存在し、前者は、後者に対して本質的な役割を果たすが、工学的設計法に対しては直接的ではないといえる。単一粒子の挙動を主な対象とするエアフィルターの集じん率の推算という設計問題では、次のような関係が成立すると考えられる。

昭和59年2月8日受付
* 秋田大学鉱山学部資源化学工学科 (〒010 秋田市手形学園町1-1)
TEL 0188-33-5261

(現象の解明)=(現象のモデル) ……(1)

この場合、前者は直ちに後者に一致すると見なしでよい。しかし、一般に粉粒体プロセスにおいて対象とする多くの粉粒体の現象は、未だ十分に解明されているとはいえない。工学とは、本来このように未解明な部分を多く含む対象を取り扱うものであるので、実際に解明されている一部の現象の論理構造を基礎としてモデルを作り、粉粒体の諸現象の全体像を合理的かつ安全側に外挿するのが現実の工学的設計法であろう。このことを図示すると Fig. 1 のごとくなる。なお、一点鎖線で囲まれた部分は、前報の §1 “測定と推算” においてすでに述べた¹⁾。以上の考察より、粉粒体プロセスの内部をブラックボックスと見るような、入出力関係のみに注目してプロセスを解明する立場は、工学的設計法からすれば不十分であるといわざるを得ず、その確立のためには、現象の解明が、設計の基本論理を決定するという観点において本質的であり、ひいては、モデルの適用が工学的設計法に直接的であることがわかる。

これらの観点から、Jenike^{2~4)}に続く、以下に述べる Roscoe⁵⁾、Rumpf^{5,6)} および Ashton-Cheng-Farley-Valentin⁷⁾ の一連の研究は、基礎的のみならず、粉粒体プロセスの設計法という立場からも高く評価することができる。

2. 粉粒体層物性推算の黎明

Jenike は、前報¹⁾でも述べたごとく、貯槽装置設計法を提出し、その設計法の中に粉粒体層物性推算、とりわけ PYL 推算の重要性を示唆したわけであるが、その推算の論理構造については全く触れていない。また、一般に、粉粒体層物性の推算の中身は、基本的には現象に対する設計という観点からの合目的なキャラクター化によって規定され、このキャラクター化の論理的記述は、Fig. 1 の工学的物性値と工学的モデルによって行うことができる。すなわち、粉粒体層物性推算の論理は、現象に対する合目的なキャラクター化の論理と一致する。

2.1 崩壊現象に対するキャラクター化

工学的設計という観点から、合目的な粉粒体の崩壊現象に対するキャラクター化を最初に成功させたのは、土質工学である。そして、その後これが、粉体工学における物性推算という新しい概念の導入に対して非常に重要な影響を与えたのである。

2.1.1 土質工学の場合^{8,9)}

土質工学における粉粒体層の崩壊現象を最初に検討したのは、Hvorslev⁹⁾である。彼は、水で飽和されている

Fig. 2 Roscoe らによって導入された剪断的崩壊曲面 (面崩壊基準)

成形付着土壌の崩壊強度 τ (剪断抵抗) を、粉粒体層中の任意の点を通る断面で崩壊条件が満たされれば、少なくともその点では崩壊が生ずるという考え方から、空隙比 e とある意味での摩擦係数 μ を用いて次式のごとく記述できることを示した。

$$\tau = \mu \sigma + \lambda \exp \{-Be\} \quad \dots\dots(2)$$

ここで、 σ は垂直応力、 λ および B は粉粒体の性質によって決まる定数である。

Roscoe-Schofield-Wroth⁸⁾ は、剪断強度 τ が式 (2) で表わされるということに注目し、もし式 (2) が粉粒体層の剪断強度 τ の基本的特徴をある程度記述することができるのであれば、式 (2) の形がそのまま成立するかどうかは別にして、論理的に、粉粒体層の剪断強度 τ は Fig. 2 のとき (σ, τ, e) 空間内 (*注) の特定の曲面上 (Fig. 2 の斜線の領域) の点として記述されうると考えた。また、彼らは、圧密的崩壊に対して次のように考えた。

一般に、三軸試験において外部から加える主応力 (σ'_1, σ'_2) を変化させると、テスト・セル内部の含水量変化、すなわち空間率変化 (圧密的崩壊) が生ずる。

* 本報での粉体崩壊曲面に対する見方は点崩壊基準であるのかあるいは面崩壊基準であるのかに焦点をあてている。したがって、粉粒体層の状態を化学工学でよく用いられる空間率 e で表わしてもまた土質工学でよく用いられている空隙比 e で表わしても本文の論理展開にとっては何らさしつかえない。この意味では前者の方が無用の混乱を防ぐためには都合がよいとも思われる。しかし、ここでは原報の記述法を尊重するという意味で、それぞれの原論文に従っている。なお、 e と e' の間には次式の関係がある。

$$e' = \frac{e}{1-e}$$

Fig. 3 Roscoe らによって導入された圧密的崩壊曲面 (点崩壊基準)

これより、粉粒体層の圧密的崩壊条件は、空間率 e (間隙比 e で表現する) と主応力 σ_1' , σ_3' により決定されるので、次式のごとく3つの量

$$\left. \begin{array}{ll} \text{間隙比} & e \\ \text{平均垂直応力} & p = \frac{1}{3}(\sigma_1' + 2\sigma_3') \\ \text{偏差応力} & q = \sigma_1' - \sigma_3' \end{array} \right\} \dots\dots(3)$$

によって定義される Fig. 3 のごとき空間内 (*注) の特定の曲面上 (Fig. 3 の斜線の領域) の点として記述されうると推察した。

以上のごとく、粉粒体層の崩壊現象には剪断と圧密の2種があり、それぞれが異なった2つの空間内の曲面上の点によって表わされることがわかった。剪断の崩壊条件は Fig. 2のごとく (σ, τ, e) 空間内の、そして圧密的崩壊条件は Fig. 3のごとく (p, q, e) 空間内の各曲面上の一点として記述され、前者は粉粒体層内の任意の面上での剪断の崩壊が生ずる条件、すなわち面崩壊基準を、そして後者は粉粒体層内の任意の一点での圧密的崩壊が生ずる条件、すなわち点崩壊基準を意味している。土質工学では、その目的から面崩壊基準より点崩壊基準の方がより好都合であるので、Roscoe-Schofield-Wroth⁹⁾ は、Fig. 2および Fig. 3を Fig. 4のごとく点崩壊基準で圧密・剪断両崩壊面を統一的に記述し、崩壊現象を粉粒体層内の一点が崩壊するかどうかという観点 (これより p, q を用いてモール円が決定できる) から、キャラクターゼーションし、限界モール円を基本に

Fig. 4 Roscoe らによって導入された圧密・剪断崩壊曲面 (点崩壊基準で統一)

おく見方を提案した。

2.1.2 土質工学と粉体工学との間の相違点と共通点

この問題は、土質工学および粉体工学がそれぞれ対象とする粉粒体現象を考察することによって明らかとなる。

第一に考えられる最大の相違点は、それぞれの対象粉粒体の圧密強度と設計上の関心点である。前者については、土質工学で取り扱う圧密強度 (たとえば、数百 kg/cm^2) が粉体工学でのそれ (たとえば、数 g/cm^2) に対して普通数桁も大きな点にある。また、後者については、粉粒体層が崩壊するまでが土質工学の主な関心点であるのに対し、粉体工学では崩壊以後の方をさらに重要視する場合が多い。しかしながら、共に粒子集合体を取り扱っているという点で、両者間には何ら本質的な差異はない。したがって、前章での Roscoe-Schofield-Wroth⁹⁾ のキャラクターゼーションは、粉体工学にも適用される可能性があることを指摘できる。以下にはこの点に関して、Jenike²⁻⁴⁾ に引き続き、先駆的役割を果たした Rumpf^{5,6)} および Ashton-Cheng-Farley-Valentin⁷⁾ の研究の意義について述べる。

2.2.1 粉体工学の場合

1) 凝集粒子の引張り破断強度に対する Rumpf^{5,6)} の粉体工学的アプローチ

粉体工学の誕生に対して、最初に工学的モデルの導入という重要な役割を果たしたのが Rumpf である。以

Fig. 5 Rumpf による凝集粒子破断面の大胆なキャラクター化 (理想破断面の導入)

下に、彼の研究内容とその先駆的意義について眺めてみよう。

1. i) Rumpf のキャラクター化

Rumpf は、凝集粒子の引張り破断強度の推算という現実的課題を解決する観点から、Fig. 5 のごとく大胆なキャラクター化を行った。要約すれば、その構成は、2 粒子間接触点力を工学的物性値として選択し、その上に下記の工学的モデルを置くというものである。

Rumpf の仮定

①凝集粒子の断面における接触点は、きわめて多い。
②接触面は、破断面上に統計的に分布し、方向性を持たない。

③粒子配列は、ランダムである。

④接触点力は、平均値の近傍に分布する。

すなわち、彼は、凝集粒子内の一次粒子の配列構造について Fig. 5 のごとく均一径粒子群がランダム配列をなしているとし、現実には破断面が実線のごとく存在するのだが、それを一点鎖線のごとき理想的な破断面として見ることができると考えた。前報でも述べたが、現象をこのように設計という観点から考察することは、現象に対して一種の特性化を行うことであると考えられるので、著者らはこれをキャラクター化と呼ぶのである。

Rumpf のキャラクター化の基本的特徴は、第一に、凝集粒子の破断強度 σ_z というマクロ的物性の推算を、工学的モデルとセミ・マクロ的な 2 粒子間付着力 H なる工学的物性値とを組み合わせることにより行った点にある。これによって、セミ・マクロとマクロとの間のギャップを工学的に埋めることを可能にし、次式を得た。

$$\sigma_z = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{H}{D_p^2} \quad \dots\dots(4)$$

ここで、 ε は空間率および D_p は粒子直径である。Rumpf のこの取り扱いこそ最も重要であり、粉体工学が今後とも進むべき点であると考えられる。

第 2 の特徴は、前述の Rumpf の①から④までの仮

定からもわかるごとく、粒子集合体の幾何学的配列を統計的に捕えようとした点にある。これは、セミ・マクロとマクロとの間のギャップを工学的に克服するための手段として、統計的手法を具体例と共に示した所に意義がある。粉粒体現象における連続的な捕え方は、本質的にセミ・マクロ的概念を含み得ないのに対し、統計的な捕え方は、元来、セミ・マクロとマクロの両概念を同時に包含するものである。この統計的概念の特徴は、粒子集合体を対象とする粉体工学にとって極めて好都合であり、これを明確に指摘したのが Rumpf である。

2) PYL に対する Ashton-Cheng-Farley-Valentin⁷⁾ のキャラクター化とその意義

前述のごとく、Jenike は、粉粒体貯槽装置の粉体工学的設計手法を提出し、PYL の推算法の確立の重要性を示唆した。また、Rumpf は、凝集粒子の力学的強度の推算法に対して新しい粉体工学的アプローチを提出し、その後の PYL の推算法の誕生にとって極めて意義深い役割を果たした。そして、Rumpf のこのアプローチに影響を受け、Ashton らは、PYL に対する同様のキャラクター化に成功した。

2. i) 崩壊現象に対するマクロ的キャラクター化

Ashton ら⁷⁾ は、Jenike^{2~4)} と同様の観点から“粉粒体層内の任意の面が崩壊する応力条件”を工学的物性値として選択すれば、粉粒体層内のすべり面を検討するのに極めて都合がよいとの立場をとった。粉粒体プロセスの設計という観点から、推算すべきものは、Fig. 4 の Roscoe-Schofield-Wroth⁹⁾ によって定義された (p, q, e) 空間での崩壊曲面ではなく、Fig. 6 のとき Jenike²⁾ および Schwedes¹⁰⁾ によって導入された $(\sigma, \tau, \varepsilon)$ 空間内 (*注) でのそれであると考えたのである。前述のごとく、両者間の相違は、前者は崩壊曲面上の一点から粉粒体層内の対応する点におけるモール円を記述できるのに対し、後者は崩壊曲面上の一点は粉粒体層内の任意の面上での崩壊条件を意味しているという所にある。それゆえ、後者は、すべり線の形成メカニズムを検討する際、工学的物性として使用できる。ここに、Ashton ら⁷⁾ の粉体工学という観点からの巧みなキャラクター化を読みとることができる。

2. ii) PYL に対する工学モデルの作成

Ashton ら⁷⁾ は、粉粒体層に面心立方格子モデルを用い、粘弾性的考察を行うことにより、前述の $(\sigma, \tau, \varepsilon)$ 空間内での剪断側の崩壊曲面の形状、すなわち PYL を次のように導いた。

Ashton らの仮定

Fig. 6 Jenike および Schvedes らに導入された圧密・剪断的崩壊曲線（面崩壊基準で統一）

Fig. 7 Ashton らが導入した粉体層の粒子配列モデル（面心立方格子配列モデル）

Fig. 8 Ashton らの導入した粒子間相互作用力（反発力と吸引力との和）

①粒子は、Fig. 7のごとく、面心立方格子状（最密充填）に配列し、その立方格子間の単位距離を a とする。また、最隣接粒子間の引力は、粒子間距離により Fig. 8のごとく変化し、 r_c において最大値となる。

②粉体がある限界応力以下で圧縮（引張り）を受けると、フックの法則に従って弾性変形する。

$$\frac{da}{a} = -\frac{\sigma}{E} \quad \dots\dots(5)$$

ここで、 σ は圧縮（引張り）応力および E はヤング率である。

横方向の変形は、ポアソン比 ν を用いて

$$\frac{da'}{a} = \nu \frac{\sigma}{E}$$

剪断応力 τ に対しては、非線形指数則が成立して

$$\gamma = \frac{\tau^n}{G} \quad \dots\dots(7)$$

ここで、 γ は剪断歪および G は剛性率である。

また、圧縮と剪断とが同時に作用すると、変形に対して重畳の原理（すなわち変形はベクトル和になる）が成立する。

③粒子間距離が r_c になった時初期流動の状態となり、さらに歪が生じると崩壊して流動する。

これらの仮定から、初期流動における圧縮および剪断の複合応力状態の粉体要素を考える。

Fig. 9 に示す変形より

$$(2r_c)^2 = a^2 \left(1 + \frac{d a}{a}\right)^2 + a^2 (1 + \gamma)^2 \quad \dots\dots(8)$$

2 次の微小量を省略して

$$(2r_c)^2 = 2a^2 \left(1 - \frac{\sigma}{E} + \frac{\tau^n}{G}\right) \quad \dots\dots(9)$$

$\tau = 0$ で垂直応力が引張り応力 T' の場合は

Fig. 9 Ashton らの崩壊モデルにおける (σ, τ) と粒子変位の関係

Fig. 10 単純引張時における Ashton らの引張応力 T と粒子変位の考え方

$$(2r_c)^2 = 2a^2 \left(1 + \frac{T'}{E} \right) \quad \dots\dots(10)$$

したがって、式(9)および式(10)より

$$\left(\frac{\tau}{C'} \right)^n = \frac{\sigma}{T'} + 1 \quad \dots\dots(11)$$

ここで、

$$(C')^n = \frac{T'G}{E} \quad \dots\dots(12)$$

さらに、Fig. 10 に示すように単純引張り応力 T を加える場合を考えると

$$\begin{aligned} (2r_c)^2 &= a^2 \left(1 - \frac{da}{a} \right)^2 + a^2 \left(1 - \frac{da'}{a} \right)^2 \\ &= 2a^2 \left[1 + (1-\nu) \frac{T}{E} \right] \quad \dots\dots(13) \end{aligned}$$

したがって、式(10)および式(13)より

$$T' = (1-\nu)T \quad \dots\dots(14)$$

$\nu \ll 1$ と仮定すれば、式(11)および式(12)は

$$\left(\frac{\tau}{C} \right)^n = \frac{\sigma}{T} + 1 \quad \dots\dots(15)$$

$$C^n = \frac{TG}{E} \quad \dots\dots(16)$$

ここで、 T は引張り強度、 C は付着力および n は剪断指数であり、式(15)は剪断の崩壊曲面が満たすべき形状の条件である。

式(15)において、ある特定の空間率 ε_0 の粉粒体層に対する C 、 T および n が何らかの方法で実測あるいは与えられるならば、その空間率 ε_0 に対するすべての剪断崩壊条件 (σ, τ) を推算することができるが、しかし、任意の空間率 ε に対するそれを推算することはできない。なぜならば Ashton らの取り扱い、たとえば工学的物性値として剪断指数 n を採用しているが、 n の空間率依存性、換言すれば、粒子のセミ・マクロ的配列の n におよぼす影響を検討していないからである。つまり、Rumpf の提起したセミ・マクロとマクロとの間のギャップを埋めるという観点とは一致せず、この点が彼らの取り扱いにおける一つの限界と考えることができると同時に、その後、これが物性推算に直接用いられなかった理由と考えられる。しかしながら、ここでの彼らの研究の重要な意義は、粉体工学において確立すべき PYL 推算モデルというものが、

- ① いかに粒子配列を表現するか
- ② いかに粒子間相互作用を表現するか
- ③ いかに崩壊条件を与えるか

の3項目を具体的に与えるならば可能である、ということを示唆したことにある。

ま と め

以上、本報においては、粉粒体の現象とモデルおよび粉粒体層物性推算の形成過程を、Rumpf^{5,10)} および Ashton ら⁷⁾ の研究を中心に眺めてきた。その結果、Rumpf は、粉粒体層物性推算における工学的モデルの重要性を、Ashton らは、PYL 推算モデルの基本的な論理構造を明確にしたと結論することができる。

今回は、PYL 推算の確立への試みとその意義について述べる。

引 用 文 献

- 1) 牧野和孝, 山田昌治, 河原正佳, 倉光鋼太郎: 粉体工学雑誌, 21, No. 3, 163(1984)
- 2) Jenike, A.W., P.J. Elsey and R.H. Wooley: *Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, 60, 1168(1960)
- 3) Jenike, A. W.: *Trans. Instn. Chem. Engrs.* 40, 264(1962)
- 4) Jenike, A. W.: *Trans. Soc. Min. Eng.*, 235, 267(1966)
- 5) Rumpf, H.: *Chem. Ing. Tech.*, 30, 144(1958)
- 6) Rumpf, H.: *Chem. Ing. Tech.*, 42, 538(1970)
- 7) Ashton, M. D., D.C.H. Cheng, R. Farley and F. H.H. Valentin: *Rheologica Acta*, 4, 206(1965)
- 8) Roscoe, K.H., A.N. Schofield and C.P. Wroth: *Geotechnique*, 8, 22(1958)
- 9) Hvorslev, M.J.: *Ingvidensk. Skr. A.*, No. 45, 159(1937)
- 10) Schwedes, J.: *Powder Technology*, 11, 59(1975)