研究報告

粉体力学における相似則について*

——第2報：中小形サイロ模型実験による確認——

On the Principle of Similarity in the Mechanics of Granular Materials

——2nd Report: Its Confirmation by an Experiment of a Small and a Medium Scale Model of Silo——

竹内 孝次**

Takatsugu TAKEUCHI

長尾 高明**

Takaaki NAGAO

畑村 洋太郎**

Yotaro HATAMURA

中島 信行**

Nobuyuki NAKAJIMA

1. ま え が き

粉体機械や粉体装置の設計において、実際に生じる現象、特に壁面応力を知ることははなはだ重要である。しかし、実物と同じ装置を用いて実験することは大変手間と金がかかることである。そこで、小規模な実験で得られたデータが使えると、著だ都合がよい。このような場合によく用いられるのが相似則である。

しかし、相似則の考えは古くからあるものの、粉体工学においてその観点から論じたものはあまり見当たらない。そこで第1報¹⁾においてこれを理論的に論じたが、特に相似則適用の効果がいちじるしいものとして、サイロのような大型の装置が考えられる。そこで、この相似則適用の例として本稿でサイロの問題を取り上げ、相似則がどのように成立しているかを実験的に確かめた。

サイロの問題については、すでにいろいろの著者により^{2~16)}さまざまな立場から取上げられており、特に静止時から排出時への切換時のピーク荷重については、Jenike¹¹⁾以来、幾人かの著者^{13~16)}により論じられていることである。しかしながら、このようなデータも相似則の観点をもたなければ、実際の設計などに反映できない。

そこで今回の研究では、小形および中形の貯槽模型を製作し、実験によりそれらに粉体を投入したり、排出したりした際の壁面応力分布を測定し、相似則の観点から、整理をして、相似則がどのように成立するかを調べてみた。特に今回の研究で、壁面応力計を新たに開発し、1つの点での圧力と摩擦応力を同時に測定することができるようにしたのが特色である。これにより、従来

の研究において壁面の摩擦係数を仮定して応力分布を求めざるをえなかったことが解消され、圧力のみにより現象を論ずる不備を克服できたことは幸いである。

2. 実験装置および実験内容

実験装置として、Fig. 1のような鋼鉄製の小形粉体貯槽模型および、Fig. 3のような、やはり鋼鉄製の中形粉体貯槽模型が製作された。

Fig. 1の小形模型は、内径130 mm、高さ600 mmの円筒部の下に、ホッパーがついている。このホッパーは、8枚のひずみゲージをはりつけた受け板の上になっていて、全荷重をこの受け板で計ることができるようにになっている。ホッパー部は傾斜角を45°と60°の2種類に、口径を20 mmと40 mmとの2種類に変えられるよ

Fig. 1 小形粉体貯槽模型

昭和58年11月21日受付

*昭和58年度春期研究発表会にて発表（1983.5 大阪）

**東京大学工学部産業機械工学科（〒113 東京都文京区本郷 7-3-1）

TEL 03-812-2111

Fig. 2 センサー取付部

Fig. 3 中形粉体貯槽模型

うになっている。壁面には、Fig. 2 のように、壁面応力センサーが取り付けられるようになっており、円筒部に 7 点、ホッパー部に 1 点取り付け穴がある。センサーの前面は平らであり、壁面も縦帯状に平らな部分をつくって、壁面応力を正しく計るよう工夫してある。壁面応力計は正確に位置決めする必要がある、壁面に直角かつ壁面から突出しないことが必要なので、十分注意して加工された。このセンサー取付部は本体から取り外すことができ、正確に調整できる。

なお、粉体の投入は、上部のホッパーより投入し、下

① 検出ブロック A	② 検出ブロック B
③ 受圧板	④ ケース
⑤ 固定ネジ	⑥ 皿ネジ
⑦ ターミナル	⑧ クリップ A
⑨ クリップ B	⑩ 丸ビス
⑪ シールド線	⑫ 充てん剤
⑬ ストレインゲージ	⑭ パッキング

Fig. 4 小形壁面応力計(外径 φ14, 定格容量軸方向 1 kgf/cm², 接線方向 0.5 kgf/cm²)

部からの排出は、ただ布をつめておき、これを引抜くだけの簡単なものである。

Fig. 3 の中形模型は、内径 1000 mm、高さ 3220 mm の円筒部の下にホッパーがついている。ホッパーは高さが 900 mm で、傾斜角が 60° である。材質は S45C で、排出口はスリットから板をさし込み、排出径を調整できる。側面にはたてに 300 mm おきに、円筒部に 10 個、ホッパー部に 3 個の応力計取付用の孔が、90° おきに 3 列あけてある。この応力計取付孔の円筒内面側周辺は、やはり平らになっている。粉体投入はバケット・クレーンで行い、排出口はハンドルで開閉できるようになっている。排出後の粉体は、ベルトコンベヤで回収した。

小形模型での実験に用いた壁面応力計を Fig. 4 に示す。これは平行平板の原理に基く構造をもち、垂直応力と二方向の摩擦応力とを同時に測定できる。外形寸法が φ14 mm × 48 mm で、定格圧力が $9.8 \times 10^4 \text{ Pa}$ (1 kgf/cm²)、二方向の定格摩擦応力が $4.9 \times 10^4 \text{ Pa}$ (0.5 kgf/cm²) であり、ヒステリシスがほとんどなく、各方向の出力の干渉もほとんどないのが特徴である。Fig. 5,

Fig. 5 小形壁面応力計の圧力較正曲線の例

Fig. 6 小形壁面応力計の摩擦応力校正曲線の例

仕様

定格圧力 $9.8 \times 10^5 \text{ Pa}$ (10 kgf/cm²)
 定格摩擦応力 $4.9 \times 10^5 \text{ Pa}$ (5 kgf/cm²)
 定格出力 $2000 \mu\text{st.} / 9.8 \times 10^5 \text{ Pa}$ (圧力)
 $2000 \mu\text{st.} / 4.9 \times 10^5 \text{ Pa}$ (摩擦応力)

Fig. 7 2方向大型壁面応力計(φ100)

Fig. 8 大形壁面応力計の圧力校正曲線の例

Fig. 9 大形壁面応力計の摩擦応力校正曲線の例

Fig. 6 は校正曲線の一例を示す。

中形模型実験に用いた壁面応力計を Fig. 7 に示す。これは同じく平行平板の原理に基く構造をもつが、少し Fig. 4 のものとは構造が異なっている。垂直応力と一方方向の摩擦応力とを同時に測定できる。外形寸法は主要部が $\phi 100 \text{ mm} \times 80 \text{ mm}$ で、定格圧力が $9.8 \times 10^5 \text{ Pa}$ (10 kgf/cm²)、定格摩擦応力が $4.9 \times 10^5 \text{ Pa}$ (5 kgf/cm²) である。Fig. 8, Fig. 9 に校正曲線の一例を示す。なお、これらの壁面応力計の構造、特性などに関するくわしい説明は、別稿で発表する予定なので、参照してほしい。

これらの壁面応力計で測定したデータは、動ひずみ測定器を経て電磁オシログラフで記録され、同時にデータレコーダに記録された。記録された結果は、AD変換器を通じて0.25秒毎に取込まれ、ミニコンピュータ(MEL COM 70/30)により処理され、応力の値に直された。用いられた粉体は、ケイ砂(いわゆる標準砂、平均粒径0.183 mm、見掛け比重1.51、内部摩擦角34.1°)および

表1 実験条件

模 (実験回数)	型	使用粉体	ホッパー 排出口径	ホッパー 傾斜角	実験記号
小形模型 (各5回)	ケイ砂	20 mm	60°		S 1
			45°		S 2
		40 mm	60°		S 3
			45°		S 4
	小麦	20 mm	60°		S 5
			45°		S 6
		40 mm	60°		S 7
			45°		S 8
中形模型 (各2回)	ケイ砂	40 mm	60°		M 1
		70 mm	60°		M 2
	小麦	65 mm	60°		M 3
		75 mm	60°		M 4

Fig. 10 小形サイロ壁面応力分布（ケイ砂，ホッパー角度60°，排出口径40 mm）

Fig. 11 小形サイロ壁面応力分布（ケイ砂，ホッパー角度60°，排出口径20 mm）

Fig. 12 小形サイロ壁面応力分布（小麦，ホッパー角度60°，排出口径40 mm）

Fig. 13 小形サイロ壁面応力分布（小麦，ホッパー角度60°，排出口径20 mm）

小麦（平均粒径4.5 mm，見掛比重0.73，内部摩擦角24.2°）である。実験条件を表1に示す。

3. 実験結果

3.1 貯槽内応力分布について

小形貯槽模型内での壁面応力分布を Fig. 10～Fig. 17

に示す。各図の①②③④はそれぞれ，満載時（ケイ砂10 kg，小麦6 kg），1/4 排出時（ケイ砂7.5 kg，小麦4.5 kg），1/2 排出時（ケイ砂5.0 kg，小麦3.0 kg），3/4 排出時（ケイ砂2.5 kg，小麦1.5 kg）における壁面応力分布および，前の状態からその状態に至るまで（たとえば満載時から1/4 排出時まで）の間の最大および最小応力を示す。これらの値は，それぞれの実験条件で行った5回分の実験値の平均を示している。各図共，縦軸が貯槽深さ（mm）を，横軸が応力（kPa）を示す。実線は圧力（壁面垂直応力），破線は壁面摩擦応力を示す。

同様に中形貯槽模型内での壁面応力分布を Fig. 18～

Fig. 14 小形サイロ壁面応力分布 (小麦, ホッパー角度45°, 排出口径 40 mm)

Fig. 16 小形サイロ壁面応力分布 (小麦, ホッパー角度45°, 排出口径 40 mm)

Fig. 15 小形サイロ壁面応力分布 (小麦, ホッパー角度45°, 排出口径 20 mm)

Fig. 17 小形サイロ壁面応力分布 (小麦, ホッパー角度45°, 排出口径 20 mm)

Fig. 21 に示す。各図の①②③④はそれぞれ满载時、排出開始直後、1/2 排出時および排出終了直前における壁面応力分布を示す。縦軸が貯槽深さ (mm) を、横軸が応力 (kPa) を示し、実線が圧力を、破線が壁面摩擦応力を示すことは前と同様である。

3.2 ホッパー部での壁面圧力および摩擦応力の変化について

各実験におけるホッパー部での排出開始時から排出終

了時までの壁面圧力および摩擦応力の変化の一例を Fig. 22～Fig. 25 に示す。各図の(a), (b) はそれぞれ壁面圧力および摩擦応力の変化である。縦軸にはそれぞれ圧力 σ_H または摩擦応力 τ_H を、粉体の見掛け比重 γ と、貯槽円筒部高さ l との積で割った値 $\sigma_H/(\gamma l)$, $\tau_H/(\gamma l)$ をとり、横軸には実時間 t を総排出時間 T で割った値 t/T をとってある。このように無次元化しておけば、大きさの異なる貯槽のデータを比較する上に大変便利である。なお、 l の値は小形模型では 600 mm、中形模型では 3000 mm とした。

Fig. 18 中形サイロ壁面応力分布（ケイ砂，排出口径 70 mm）

Fig. 19 中形サイロ壁面応力分布（ケイ砂，排出口径 40 mm）

Fig. 20 中形サイロ壁面応力分布（小麦，排出口径 75 mm）

Fig. 21 中形サイロ壁面応力分布（小麦，排出口径 65 mm）

Fig. 22 小形模型での壁面応力変化（無次元表示）（ケイ砂，ホッパー角度 60° ，排出口径 40 mm）（ $T=16$ s， $l=600$ mm）

4. 考 察

4.1 静止時の貯槽内応力分布について

貯槽内の粉体の応力分布については，従来 Janssen の式²⁾が使用されて来た。そこで，本実験の考察も，まず Janssen の式との比較から始めることとする。すなわち，Janssen 式において，鉛直および水平方向の粉体圧 σ_z ， σ_r は，

$$\sigma_r = k \sigma_z \equiv \frac{1 - \sin \phi_i}{1 + \sin \phi_i} \sigma_z \quad \dots\dots(1)$$

$$\sigma_z = \frac{D_r}{4\mu_w k} \left[1 - \exp\left(\frac{4\mu_w k h}{D}\right) \right] \quad \dots\dots(2)$$

Fig. 23 中形模型での壁面応力変化(無次元表示)
(ケイ砂, ホッパー角度 60°, 排出口径 70 mm) ($T=962$ s, $l=3000$ mm)

Fig. 24 小形模型での壁面応力変化(無次元表示)
(小麦, ホッパー角度 60°, 排出口径 40 mm) ($T=22$ s, $l=600$ mm)

Fig. 25 中形模型での壁面応力変化(無次元表示)
(小麦, ホッパー角度 60°, 排出口径 75 mm)
($T=1101$ s, $l=3000$ mm)

Fig. 26 貯槽壁面での応力

で与えられる³⁾。ここに ϕ_i は粉体の内部摩擦角, D は貯槽直径, μ_w は粉体と壁面との摩擦係数, h は粉体上面からの深さである。したがって, 貯槽内粉体高さを l とすれば, 貯槽底部では

$$\frac{\sigma_{zA}}{\gamma l} = \frac{D}{l} \frac{1}{4\mu_w k} \left[1 - \exp\left(-\frac{4\mu_w k l}{D}\right) \right] \quad \dots\dots(3)$$

となる。Fig. 26 に示すように, 円筒部最下部壁面 A での応力は, 傾斜角 45° または 60° のホッパー部 B または C での壁面応力 (σ_{H45}, τ_{H45}) または (σ_{H60}, τ_{H60}) とは, 図のモールの円で表わされるような関係にある。すなわち, A における垂直方向と最大主応力の方向のなす角を φ とすると, A での摩擦応力 τ_A は

$$\tau_A = \mu_w \sigma_{rA} \quad \dots\dots(4)$$

で与えられる。したがって, 図のモールの円の関係から,

$$\tan 2\varphi = \frac{2\tau_w}{\sigma_z - \sigma_r} = \frac{2k\mu_w}{1-k} \quad \dots\dots(5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{H45} &= \frac{\sigma_z + \sigma_r}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_r}{2}\right)^2 + \tau_w^2} \cos(90^\circ - 2\varphi) \\ &= \left(\frac{1+k}{2k} + \mu_w\right) \sigma_r \end{aligned} \quad \dots\dots(6)$$

$$\begin{aligned} \tau_{H45} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_r}{2}\right)^2 + \tau_w^2} \sin(90^\circ - 2\varphi) \\ &= \frac{1-k}{2k} \sigma_r \end{aligned} \quad \dots\dots(7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{H60} &= \frac{\sigma_z + \sigma_r}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_r}{2}\right)^2 + \tau_w^2} \cos(120^\circ - 2\varphi) \\ &= \left(\frac{1+3k}{4k} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mu_w\right) \sigma_r \end{aligned} \quad \dots\dots(8)$$

$$\begin{aligned} \tau_{H60} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_r}{2}\right)^2 + \tau_w^2} \sin(120^\circ - 2\varphi) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}(1-k)}{4k} + \frac{1}{2} \mu_w\right) \sigma_r \end{aligned} \quad \dots\dots(9)$$

を得る。

そこでまず, 貯槽模型実験での静止時の摩擦応力をその点での圧力で割った値を平均して, μ_w を求めた。また, 三軸圧縮試験から得た内部摩擦角 ϕ_i を用いて k の

表2 内部摩擦角と、壁面・粉体間摩擦係数

粉 体	ケイ砂	小 麦
内部摩擦角 ϕ_i	34.1°	24.2°
$k=(1-\sin \phi_i)/(1+\sin \phi_i)$	0.28	0.42
小形模型壁面との摩擦係数	0.59	0.23
中形模型壁面との摩擦係数	0.40	0.35

Fig. 27 小形サイロ模型における静的応力（ヤンセン値と実測値との比較）（小麦）

値を計算した。それらの結果を表2に示す。これらの数値に基づいて式(3)～(9)を用いて壁面応力を計算したのが表3である。ただし σ_r の値はA点における値で代用している。

また、これらの数値を用いて、Janssen の式から求めた壁面応力と摩擦応力とを、実測値と比較して示したのが、Fig. 27～Fig. 30 である。これらの結果を見ると、小形模型においては、ケイ砂、小麦のいずれの場合にも Janssen 値が実測値より小さくなっている。中形模型ではやはり同様の傾向であるが、小麦の圧力のみが実測値

Fig. 28 小形サイロ模型における静的応力（ヤンセン値と実測値との比較）（小麦）

Fig. 29 中形サイロ模型における静的応力（ヤンセン値と実測値との比較）（小麦）

が Janssen 値を下まわっている。しかしながら、粉体投入時の密度の偏りなどを考慮に入れると、定性的には一応 Janssen の式は粉体投入後、静止時の貯槽内応力分布の特徴を表わしているといえるのではなかろうか。

表3 Janssen の式による計算で求めた無次元応力

模 型	粉 体	円筒最下部		2ϕ	傾斜角 45° のホッパー				傾斜角 60° のホッパー			
		$\frac{\sigma_{rA}}{\gamma l}$	$\frac{\tau_A}{\gamma l}$		$\frac{\sigma_{H45}}{\gamma l}$	$\frac{\tau_{H45}}{\gamma l}$	$\frac{\sigma_{H60}}{\gamma l}$	$\frac{\tau_{H60}}{\gamma l}$	$\frac{\sigma_{H45}}{\gamma l}$	$\frac{\tau_{H45}}{\gamma l}$	$\frac{\sigma_{H60}}{\gamma l}$	$\frac{\tau_{H60}}{\gamma l}$
小 形	ケイ砂	0.087	0.051	24.6°	0.250	0.112	0.187	0.123	0.250	0.112	0.187	0.123
	小 麦	0.196	0.045	18.4°	0.376	0.135	0.303	0.140	0.376	0.135	0.303	0.140
中 形	ケイ砂	0.154	0.062	17.3°	0.414	0.198	0.306	0.202	0.414	0.198	0.306	0.202
	小 麦	0.197	0.069	26.9°	0.402	0.136	0.325	0.152	0.402	0.136	0.325	0.152

Fig. 30 中形サイロ模型における静的応力（ヤンセン値と実測値との比較）（小麦）

4.2 粉体排出時の貯槽内応力分布について

粉体の排出が始まると、かなり大きい粉体応力が壁面にかかり、しかも、その変動がはげしい。変動は小麦の方がケイ砂よりも大きい。また、小麦では圧力摩擦応力のピークが何度も現われるが、ケイ砂では排出直後にピークがあり、後は次第に減少する。

Fig. 10～Fig. 17 の図中には、小形模型実験において、粉体の排出開始時よりどの位の時間で圧力の最大ピークが訪れるかを（ ）の中の数字で示してある。これらによれば、最大圧力は排出口より始まって、次第に上昇してゆくように見える。これは、排出口からの圧力変動が衝撃波状に上に伝わってゆくのではないかと考えられる。

この圧力波伝播速度は、表 4 のごとくであり、通常の圧力波伝播速度よりかなり小さい値である。ホッパー部形状や粉体の種類によっても違い、ケイ砂でホッパー部排出口径 40 mm、傾斜角 60° の場合が最も速度が速く、小麦でホッパー部排出口径 20 mm、傾斜角 45° の場合が最も速度が遅い。小麦の場合の速度は、同じ条件でのケイ砂の場合の約半分の値であり、これは粉体の見掛け比重が関係するためにも考えられる。なお、同様の現象は中形模型実験においても認められた。

排出時最大応力は、特に排出直後に生じることが多い。ケイ砂よりも小麦の方が応力変動がはげしく、また中形模型よりも小形模型の方が応力変動幅が大きい。これは、粒子の大きさの、模型寸法に対する比（たとえば r/l ）が関係するためと考えられる。表 5 に、ホッパー部および円筒部に生じる最大圧力および最大摩擦応力、それらの静止時の値およびヤンセン値に対する比を示し

表 4 圧力波伝播速度（小形模型実験）

粉体	排出口径 (mm)	傾斜角	速度 (cm/s)
ケイ砂	20	60°	3.1
	20	45°	1.9
	40	60°	22.5
	40	45°	11.7
小麦	20	60°	1.67
	20	45°	1.0
	40	60°	12.5
	40	45°	5.5

てあるが、これらを見ると次のことが分る。

最大圧力または摩擦応力は、大体ホッパー部または円筒部最下端において生じている。それらの値は、円筒最下部における最大壁面圧力を σ_{AM} 、静止時圧力を σ_h 、最大摩擦応力を τ_{AM} 、静止時摩擦応力を τ_{AS} と表わすと、

小形模型でケイ砂の場合 $\sigma_{AM}/(\gamma l)$ が 0.292,
 $\tau_{AM}/(\gamma l)$ が 0.119

小麦の場合 $\sigma_{AM}/(\gamma l)$ が 0.676,
 $\tau_{AM}/(\gamma l)$ が 0.466

中形模型ではケイ砂の場合 $\sigma_{AM}/(\gamma l)$ が 0.374,
 $\tau_{AM}/(\gamma l)$ が 0.095

小麦の場合 $\sigma_{AM}/(\gamma l)$ が 0.331,
 $\tau_{AM}/(\gamma l)$ が 0.112

のような値を示している。また、ホッパー部における最大圧力を σ_{HM} 、最大摩擦応力を τ_{HM} とおくと、

小形模型で ケイ砂の場合 $\sigma_{HM}/(\gamma l)$ が 0.231,
 $\tau_{HM}/(\gamma l)$ が 0.140

小麦の場合 $\sigma_{HM}/(\gamma l)$ が 0.460,
 $\sigma_{HM}/(\gamma l)$ が 0.417

中形模型で ケイ砂の場合 $\sigma_{HM}/(\gamma l)$ が 0.550,
 $\tau_{HM}/(\gamma l)$ が 0.185

小麦の場合 $\sigma_{HM}/(\gamma l)$ が 0.750,
 $\tau_{HM}/(\gamma l)$ が 0.163

のような値を示している。さらに、円筒最下部応力についてはヤンセンの式から導びかれた壁面圧力 σ_{AJ} 、摩擦応力 τ_{AJ} と比較すると、

小形模型ではケイ砂の場合 σ_{AM}/σ_{AJ} が 3.36,
 τ_{AM}/τ_{AJ} が 2.33

小麦の場合 σ_{AM}/σ_{AJ} が 3.45,
 λ_{AM}/τ_{AJ} が 10.35

中形模型ではケイ砂の場合 σ_{AM}/σ_{AJ} が 2.43,
 τ_{AM}/τ_{AJ} が 1.53

表5 中, 小形模型実験における総排出時間, 排出速度, ホッパー部および円筒最下部の壁面圧力および摩擦応力の静止時の実測の実測値, ヤンセン値および最大値, 並びにそれらの比

実 験 記 号		S 1	S 2	S 3	S 4	S 5	S 6	S 7	S 8	M 1	M 2	M 3	M 4
使 用 粉 体		ケイ砂	ケイ砂	ケイ砂	ケイ砂	小 麦	小 麦	小 麦	小 麦	ケイ砂	ケイ砂	小 麦	小 麦
排 出 口 径(mm)		20	20	40	40	20	20	40	40	40	70	65	75
ホ ッ パ ー 傾 斜 角		60°	45°	60°	45°	60°	45°	60°	45°	60°	60°	60°	60°
満 載 重 量 (kg)		10.0	10.0	10.0	10.0	6.0	6.0	6.0	6.0	3775	3775	1800	1800
総 排 出 時 間 (s)		77	75	16	16.5	186	182	23	19	3859	970	1526	1101
重 量 流 出 速 度 (g/s)		130	133	625	606	32.3	33.0	261	316	978	3891	1180	1635
体 積 流 出 速 度 (cm³/s)		86	88	414	401	44.2	45.2	358	433	648	2577	1616	2240
ホッパ ー部圧力	静 止 時 $\sigma_{HS}/(\gamma l)$	0.126	0.170	0.132	0.156	0.292	0.236	0.324	0.276	0.439	0.297	0.592	0.363
	排出直後 $\sigma_{HD}/(\gamma l)$	0.189	0.201	0.170	0.231	0.303	0.266	0.367	0.311	0.482	0.387	0.438	0.438
	最 大 値 $\sigma_{HM}/(\gamma l)$	0.189	0.201	0.170	0.7231	0.437	0.460	0.374	0.460	0.550	0.387	0.750	0.438
	ヤンセン値 $\sigma_{HJ}/(\gamma l)$	0.187	0.250	0.187	0.250	0.303	0.376	0.303	0.376	0.306	0.306	0.325	0.325
	σ_{HM}/σ_{HS}	1.50	1.18	1.29	1.48	1.50	1.95	1.15	1.67	1.25	1.30	1.27	1.21
	σ_{HM}/σ_{HJ}	1.01	0.804	0.906	0.924	1.44	1.22	1.23	1.22	1.80	1.26	2.31	1.35
ホッパ ー部摩擦 応力	静 止 時 $\tau_{HS}/(\gamma l)$	0.035	0.025	0.108	0.011	0.075	0.056	0.058	0.063	0.171	0.115	0.154	0.149
	排出直後 $\tau_{HD}/(\gamma l)$	0.138	0.095	0.140	0.089	0.089	0.352	0.078	0.197	0.185	0.176	0.154	0.163
	最 大 値 $\tau_{HM}/(\gamma l)$	0.138	0.095	0.140	0.089	0.250	0.353	0.135	0.417	0.185	0.176	0.154	0.163
	ヤンセン値 $\tau_{HJ}/(\gamma l)$	0.123	0.112	0.123	0.112	0.140	0.135	0.140	0.135	0.202	0.202	0.152	0.152
	τ_{HM}/τ_{HS}	3.94	3.80	1.30	8.09	3.07	6.30	2.33	6.62	1.08	1.53	1.00	1.09
	τ_{HM}/τ_{HJ}	1.12	0.848	1.14	0.795	1.79	2.61	0.964	3.09	0.916	0.871	1.01	1.07
円筒最 下部圧力	静 止 時 $\sigma_{AS}/(\gamma l)$	0.171	0.106	0.150	0.153	0.315	0.168	0.185	0.289	0.332	0.279	0.289	0.271
	最 大 値 $\sigma_{AM}/(\gamma l)$	0.239	0.190	0.292	0.259	0.629	0.676	0.617	0.635	0.369	0.374	0.289	0.331
	ヤンセン値 $\sigma_{AJ}/(\gamma l)$	0.087	0.087	0.087	0.087	0.196	0.196	0.196	0.196	0.154	0.154	0.197	0.197
	σ_{AM}/σ_{AS}	1.40	1.80	1.95	1.69	2.00	4.03	3.33	2.20	1.11	1.34	1.00	1.22
	σ_{AM}/σ_{AJ}	2.75	2.18	3.36	2.98	3.21	3.45	3.15	3.24	2.40	2.43	1.47	1.68
円筒最 下部摩擦 応力	静 止 時 $\tau_{AS}/(\gamma l)$	0.076	0.052	0.098	0.055	0.149	0.051	0.077	0.045	0.088	0.095	0.056	0.075
	最 大 値 $\tau_{AM}/(\gamma l)$	0.119	0.080	0.118	0.090	0.466	0.244	0.262	0.328	0.088	0.095	0.056	0.112
	ヤンセン値 $\tau_{AJ}/(\gamma l)$	0.051	0.051	0.051	0.051	0.045	0.045	0.045	0.045	0.062	0.062	0.069	0.069
	τ_{AM}/σ_{AS}	1.56	1.54	1.21	1.63	3.13	4.81	3.39	7.23	1.00	1.00	1.00	1.50
	τ_{AM}/τ_{AJ}	2.33	1.57	2.31	1.76	10.35	5.42	5.82	7.29	1.42	1.53	0.812	1.62

小麦の場合 σ_{AM}/σ_{AJ} が 1.68,
 τ_{AM}/τ_{AJ} が 1.62

のような値を示している。このようにケイ砂よりも小麦の変動がはげしいので, 特に小麦の場合, 小形模型ではヤンセン値の10倍以上の摩擦応力が排出時に壁面に働くのが注目される。

ホッパー部最大応力をヤンセンの式から導びかれた壁面応力 σ_{HJ} , 摩擦応力 τ_{HJ} と比較すると, 小形模型ではケイ砂の場合 σ_{HM}/σ_{HJ} が 1.01,

τ_{HM}/τ_{HJ} が 1.14

小麦の場合 σ_{HM}/σ_{HJ} が 1.44,

τ_{HM}/τ_{HJ} が 3.09

中形模型ではケイ砂の場合 σ_{HM}/σ_{HJ} が 1.80,

τ_{HM}/τ_{HJ} が 0.916

小麦の場合 σ_{HM}/σ_{HJ} が 2.31,

τ_{HM}/τ_{HJ} が 1.01

のような値を示している。このように, 排出時の動圧によって, 壁面にヤンセン値の数倍に及ぶ圧力が働くこと

Fig. 31 体積流出速度 U_v と排出口径 d との関係

は、従来も識者から指摘されていることではあるが、今回の実験でもこのことが確認された。のみならず、壁面摩擦応力もヤンセンの式より得られる値よりはるかに大きい値が計測されたわけである。

しかしながら、大ざっぱではあるが、無次元応力値はある一定の幅の中におさまっており、応力は貯槽高さにほぼ比例すると考えてもよさそうである。

4.3 粉体の流出速度について

第1報において、体積流出速度 U_v (cm^3/s) は、排出口径 d (cm) の2.5乗に比例することを導いた。Fig. 31

は、小麦およびケイ砂についての体積流出速度 U_v と、排出口径 d (cm) との関係を示すものである。これを見れば、小麦では $U_v \propto d^{2.97}$ 、ケイ砂では $U_v \propto d^{2.64}$ となっている。この理由は断定はできないが、排出口径 d が小さくなるほど、粒子径の影響を無視できず、粒子速度が小さくなるためではないかと思われる。しかし、それでもかなり理論値2.5乗に近い累乗数が得られたと考えている。

また、体積流出速度 U_v は、粉体の貯槽内での高さなどによらず、排出口径だけでほぼ定まる一定流出速度で、流出するようである。これは余談であるが、砂時計がきわめて正確に時間を示すのも、理由のあることだとうなずけるのである。

5. あとがき

第1報で理論的に明らかにした粉体力学の相似則が、実験的にどの程度成立しているかを調べるために、小形および中形粉体貯槽模型を製作し、小麦およびケイ砂を貯槽模型に投入、排出した時の壁面応力、排出時間等を計測し、次のような結果を得た。

(1) 一般的に壁面応力の値は、静止時には Janssen 式によって計算される値よりやや大きめの値を示す。

(2) 粉体排出時には、壁面応力値は非常に大きく、静止時にくらべて、圧力は1.1~1.95倍(ケイ砂)、または1.0~4.03倍(小麦)、摩擦応力は1.08~8.09倍(ケイ砂)、または1.0~10.35倍(小麦)の値を示す。

(3) 粉体排出時には壁面応力値の変動が、特に小形模型において大きい。また、最大圧力のピークが排出口から上昇してゆく。

(4) 「応力値が貯槽高さにほぼ比例する」とか、「粉体流出速度が排出口径の2.5乗に比例する」などの、理論的に得られる粉体力学の相似則からの結論が、ほぼ実験的に確かめられた。(ただし、実際は粉体流出速度は排出口径の2.5~3.0乗に比例する。)

文

- 1) 長尾高明：粉体力学における相似則について（第1報：理論的基礎）粉体工学会誌, 21, 398 (1984)
- 2) Janssen, H. A.: Versuche über Getreidedruck in Silozellen, VDI-Zeitschrift, 39—35, 1045(1895)
- 3) 久保輝一郎他：粉体—理論と応用—, 634, 丸善(昭54)
- 4) Cowin, S. C.: The Theory of static loads in bins, J. Appl. Mech., 409(1977)
- 5) Blair-fish, P. M. & P. L. Bransby: Flow patterns and wall stresses in a mass-flow bunker, J. Eng. Ind., 17(1973)

献

- 6) Brennes, C. & J. C. Pearce: Granular material flow in two-dimensional hoppers, J. Appl. Mech., 45, 43(1978)
- 7) Nguyen, T. V., C. Brennen, & R. H. Sabersky: Gravity flow of granular materials in conical hoppers, J. Appl. Mech., 46, 529(1979)
- 8) Jenike, A. W., J. R. Johanson, & J. W. Carson: Bin loads-Part 4; Funnel-Flow Bins, J. Eng. Ind., 13(1973)
- 9) Jenike, A. W., J. R. Johanson, & W. J. Carson:

- Bin loads-Part 3; Mass-Flow Bins, *J. Eng. Ind.*, 6(1973)
- 10) Jenike, A. W., J. R. Johanson, & J. W. Carson: Bin loads-Part 2; Concepts, *J. Eng. Ind.*, 1(1973)
- 11) Jenike, A. W. & J. R. Johanson: On the theory of bin loads, *J. Eng. Ind.*, 339(1969)
- 12) 内海良治 他 3 名: 貯槽における粉粒体の圧力分布測定,

- 粉体工学会誌, 19—11, 666(1982)
- 13) 森山龍一 他 2 名: ビンの壁圧分布に及ぼす供給方法の影響, 粉体工学会誌, 19—4, 225(1982)
- 14) 丹野浩一 他 2 名: 粉体の排出に伴う動的圧力変動について, 粉体工学会誌, 13—6, 299(1976)
- 15) 青木隆一: 化学工学, No. 1/2, 754(1973)
- 16) 杉田稔: 粉体工学研究会誌, 7—6, 513(1970)

Authors' Abstract

On the Principle of Similarity in the Mechanics of Granular Materials 2nd Report; Its Confirmation by an Experiment of a Small and a Medium Scale Model of a Silo

by

Takatsugu TAKEUCHI, Takaaki NAGAO
Yotaro HATAMURA, and Nobuyuki NAKAJIMA

(Department of Mechanical Engineering for Production,
Faculty of Engineering, University of Tokyo.)

On the basis of the theoretical consideration of the principle of similarity in the mechanics of granular materials, a series of tests has been carried out by using a small and medium scale model of a silo. The pressure and frictional stress distributions on the wall were measured with the biaxial wall stress cells especially developed for this experiment when the granular materials were put in and drawn out of them. Silica sand and wheat were used. The following have been confirmed:

- (1) The static wall stresses show values slightly greater than those calculated from Janssen's formula.
- (2) In the drawing-out time, the pressure showed values 1.1 to 1.95 times larger than the static ones for silica sand, and 1.0 to 4.03 times larger than those for wheat, while the frictional stress showed values 1.08 to 8.09 times larger than the static ones for silica sand, and 1.0 to 10.35 times larger than those for wheat.
- (3) The stress is proportional to the height of the silo, and the volumetric flow-out rate is proportional to the 2.5 to 3rd power of the gate diameter of the hopper.

List of Figures and Tables

- Fig. 1** The small scale model of silo (Diameter $\phi 100$: Rated capacity 980 kPa (10 kgf/cm²) in pressure and 49 kPa (5 kgf/cm²) in frictional stress, Rated output 2000 μ st.)
- Fig. 2** Attachment of sensor
- Fig. 3** The medium scale model of silo
- Fig. 4** The small scale wall stress cell (Diameter $\phi 14$: Rated capacity 98 kPa (1 kgf/cm²) in pressure and 49 kPa (0.5 kgf/cm²) in frictional stress)
- Fig. 5** An example of the calibration curve for pressure with a small scale wall stress cell
- Fig. 6** An example of the calibration curve for frictional stress with a small scale wall stress cell
- Fig. 7** Large scale bi-axial wall stress cell
- Fig. 8** An example of the calibration curve for pressure with a large scale wall stress cell
- Fig. 9** An example of the calibration curve for frictional stress with a large scale wall stress cell
- Fig. 10** Wall stress distribution by a small scale model of silo (Silica sand, hopper angle 60°, diameter of gate 40 mm)
- Fig. 11** Wall stress distribution by a small scale

- model of silo (Silica sand, hopper angle 60°, diameter of gate 20 mm)
- Fig. 12** Wall stress distribution by a small scale model of silo (Wheat, hopper angle 60°, diameter of gate 40 mm)
- Fig. 13** Wall stress distribution by a small scale model of silo (Wheat, hopper angle 60°, diameter of gate 20 mm)
- Fig. 14** Wall stress distribution by a small scale model of silo (Silica sand, hopper angle 45°, diameter of gate 40 mm)
- Fig. 15** Wall stress distribution by a small scale model of silo (Silica sand, hopper angle 45°, diameter of gate 20 mm)
- Fig. 16** Wall stress distribution by a small scale model of silo (Wheat, hopper angle 45°, diameter of gate 40 mm)
- Fig. 17** Wall stress distribution by a small scale model of silo (Wheat, hopper angle 45°, diameter of gate 20 mm)
- Fig. 18** Wall stress distribution by a medium scale model of silo (Silica sand, diameter of gate 70 mm)
- Fig. 19** Wall stress distribution by a medium scale model of silo (Silica sand, diameter of gate 40 mm)
- Fig. 20** Wall stress distribution by a medium scale model of silo (Wheat, diameter of gate 75 mm)
- Fig. 21** Wall stress distribution by a medium scale model of silo (Wheat, diameter of gate 65 mm)
- Fig. 22** Wall stress change in dimensionless expression by a small scale model of silo (Silica sand, hopper angle 60°, diameter of gate 40 mm. Total time for flow-out $T=16$ s. Height of the silo model $l=600$ mm.) (a) Pressure, (b) Frictional stress
- Fig. 23** Wall stress change in dimensionless expression by a medium scale model of silo (Silica sand, hopper angle 60°, diameter of gate 70 mm. Total time for flow-out $T=962$ s. Height of the silo model $l=3000$ mm) (a) Pressure, (b) Frictional stress
- Fig. 24** Wall stress change in dimensionless expression by a small scale model of silo (Wheat, hopper angle 60°, diameter of gate 40 mm. Total time for flow-out $T=22$ s. Height of the silo model $l=600$ mm) (a) Pressure, (b) Frictional stress
- Fig. 25** Wall stress change in dimensionless expression by a medium scale model of silo (Wheat, hopper angle 60°, diameter of gate 75 mm, Total time for flow-out $T=1101$ s. Height of the silo model $l=3000$ mm) (a) Pressure, (b) Frictional stress
- Fig. 26** Stress at the wall of silo
- Fig. 27** Static wall stress by a small model of silo (Comparison of the Janssen values and the measured ones for silica sand)
- Fig. 28** Static wall stress by a small scale model of silo (Comparison of the Janssen values and the measured ones for wheat)
- Fig. 29** Static wall stress by a medium scale model of silo (Comparison of the Janssen values and the measured ones for silica sand)
- Fig. 30** Static wall stress by a small scale model of silo (Comparison of the Janssen values and the measured ones for wheat)
- Fig. 31** Dependency of the volumetric flow-out rate U_v on the diameter of gate d .
- Table 1** Conditions of tests
- Table 2** The internal friction angle and the friction coefficient between the wall and the granular material.
- Table 3** Dimensionless stresses calculated from the Janssen's formula
- Table 4** Velocity of propagation of pressure wave
- Table 5** The total time and the rate for flow-out, the measured static stresses, the Janssen values, the maximum values and their ratios at the wall of hopper and the lowest part of cylinder in the experiment by a medium and a small scale model of silo