重錘落下法による単粒子の衝撃試験 (第4報) 粒子破壊確率の解析*

桑 原 好 孝**, 八 嶋 三 郎***

Impact Test for a Single Particle Using a Drop Weight Type Apparatus, Part IV Analysis of Fracture Probability of Particle by Yoshitaka KUWAHARA† and Saburo YASHIMA††

The fracture probability of particle (P_f) under impact loading by a blow of a drop weight falling was analyzed based upon the weakest-link model, and was derived as the following equation;
 $P_f = 1 - \exp [-(p/L_a)^{2.5}]$. p is the impact force of action to the particle and was deduced from the Hertz's theory of contact and impact energy of the drop weight. L_a is the mean fracture load of the particle, and the value of L_a measured by slow compression testing was taken into account for the calculation of P_f . The results of P_f calculated by the use of the equation mentioned above was closely related to the experimental data.

1. ま え が き

一般に粉碎機内においては、砕料粒子は粉碎媒体から衝撃エネルギーを受け、それによってその一部が破壊されて新しい表面を生成し、これが繰り返されることによって粉碎が進行していくものと考えられる。このような粉碎のメカニズムを基礎的に解析する場合には、衝撃荷重下における単粒子破壊の研究が重要な課題の1つであると考えられる。

筆者らは先に重錘落下式単粒子衝撃試験装置を試作し、粒子に与えた衝撃エネルギーと粒子に発生する衝撃荷重との関係¹⁾、その衝撃エネルギーによって粒子が破壊する確率ならび破壊荷重分布²⁾、および破砕片の粒度分布ならびに繰り返し衝撃破壊³⁾について実験

を行ない、それらの結果を静荷重下での実験結果と対比させて報告してきた。今回は、その一連の研究として、粒子の破壊確率を最弱リンクモデルに基づいて考察した。そして、得られた解析解による計算結果と、さきに報告した実験結果とを対比し、その解の妥当性を検討した。

2. 粒子の破壊確率の基本的解析

破壊様式がぜい性である粒子では、粒子に外力が加えられて粒子内部に一樣な応力が生じたとき、その粒子が破壊するか否かは、粒子内部にその応力の下で活性化されるクラックが存在するかしないかによって決まる。そして、活性化されるクラックの存在する確率は粒子体積に比例すると考え、粒子の微小な体積 dv の内に活性化されるクラックの存在する確率が λdv であると仮定する。

いま、 $P(v+dv)$ は $(v+dv)$ の体積の粒子が破壊しない確率をあらわし、このためには粒子が v の体積で破壊せず、さらに dv の体積でも破壊しないことが必要でかつ十分な条件となる。このことから、粒子中にあるクラックがそれぞれ独立して存在しているとすると

$$P(v+dv) = P(v)P(dv) \quad (1)$$

昭和60年7月17日受付

* 粉体工学会秋期研究発表会にて発表(1984.11 東京)

** 名古屋工業技術試験所(〒462 名古屋市北区平手町1丁目)
TEL 052-911-2111

*** 東北大学選鉱製錬研究所(〒980 仙台市片平2丁目1-1)

† Government Industrial Research Institute Nagoya,
Nagoya 462

†† Research Institute of Mineral Dressing and Metallurgy,
Tohoku University, Sendai 980

となる。一方、さきの仮定により、

$$P(dv) = 1 - \lambda dv \quad (2)$$

であるから、Eqs.(1)および(2)より $dv \rightarrow 0$ として整理すれば次式を得る。

$$P'(v) = -\lambda P(v) \quad (3)$$

そして、Eq.(3)を積分することにより、体積 v の粒子が破壊しない確率 $P(v)$ はつぎのようになる。

$$P(v) = e^{-\lambda v} \quad (4)$$

したがって、体積 v の粒子の破壊確率 P_f は次式のように求められる。

$$P_f = 1 - e^{-\lambda v} \quad (5)$$

λv は体積が v なる粒子の内部に存在するクラックが活性化されて破壊される度合をあらわすものと考えることができる。そこでここでは、 λv が外力によって粒子内部に発生する応力 σ_m と、その粒子の平均的強度 σ_f の比のべき関数であらわれ、つぎのEq.(6)の関係に従うものと仮定する。

$$\lambda v = (\sigma_m / \sigma_f)^r \quad (6)$$

いま、体積が v である一群の粒子を考えたとき、その粒子群の中で個々の粒子は強度のバラツキを持っているわけであり、粒子内に一定の応力 σ_m が発生したとき、 σ_m がその粒子の破壊強度 σ_f に達して破壊するものもあり、また、 σ_f に達せず破壊しない粒子もある。このようなことから、個々の粒子に σ_m の応力が均等に作用したとき、その粒子群の内ではどれだけの粒子が破壊するかその確率を求めると、つぎのEq.(7)のようになる。

$$P_f = 1 - \exp[-(\sigma_m / \sigma_f)^r] \quad (7)$$

ここに r はパラメータである。

3. 粒子の破壊確率の解析解

筆者らはさきに、粒子に作用するエネルギーとそれによって生ずる作用力との関係について、静荷重下のときと同様に衝撃荷重下でもHertzの接触応力理論⁴⁾が成立することを報告した¹⁾。そこで以下には、粒子が重錘の打撃による衝撃を受けた場合の、粒子に働く作用力 p をHertzの接触応力理論から求めることとする。

いま、重錘が E なる衝撃エネルギーで粒子に作用したとする。ただ、この場合、そのすべてが粒子の破壊エネルギーに費されるのではなく、多くのエネルギー損失が生ずる⁵⁾。そこで、ここにエネルギー伝達係数 η を考慮し、損失エネルギーを除いた残りのエネルギーが粒子に加えられ、このエネルギーが粒子の弾性ひずみエネルギーに変換されるものとすれば、つぎの関係が導かれる。

$$\eta \times E = \int_0^{\delta_{max}} p d\delta \quad (8)$$

なお、式中の δ は粒子の圧縮ひずみ量をあらわす。一方、 p と δ との間にはつぎのEq.(9)、Eq.(10)の関係が成立する⁴⁾。

$$p = A \delta^{3/2} \quad (9)$$

$$A = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{1-\nu_p^2}{Y_p} + \frac{1-\nu_w^2}{Y_w} \right)^{-1} d_p^{1/2} \quad (10)$$

ここで ν および Y はポアソン比とヤング率であり、添字 p , w はそれぞれ粒子と重錘をあらわす。そして、Eq.(9)をEq.(8)に代入して積分し整理すると次式のようになる。

$$\delta_{max} = A^{-2/5} \left(\frac{5}{2} \eta E \right)^{2/5} \quad (11)$$

さらに、Eq.(11)をEq.(9)に代入して整理すると、衝撃エネルギー E を持つ重錘が粒子に衝突した際に、粒子の接触点に生ずる作用力 p をあらわす式がつぎのように求められる。

$$p = A^{2/5} \left(\frac{5}{2} \eta E \right)^{3/5} \quad (12)$$

このようにして p を求めると、ぜい性材料の粒子は一般に引張り応力により破壊するので、粒子が p なる作用力で圧縮された場合に粒子内に生ずる平均引張り応力 σ_m は平松の式⁶⁾を用いることにより次式であらわすことができる。

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{2.8 p}{\pi d_p^2} \\ &= \frac{2.8}{\pi d_p^2} A^{2/5} \left(\frac{5}{2} \eta E \right)^{3/5} \end{aligned} \quad (13)$$

以上の関係より、粒子体積が一定である粒子群において、その個々の粒子が均等に重錘の衝撃エネルギー E を受けたとき、それに伴って粒子に生ずる応力の下で、粒子群のうちのどれだけの粒子が破壊されるかをあらわす粒子の破壊確率 P_f は次式で求められることになる。

$$P_f = 1 - \exp \left[- \left\{ 2.8 A^{2/5} \left(\frac{5}{2} \eta E \right)^{3/5} (\pi d_p^2)^{-1} \sigma_f^{-1} \right\}^r \right] \quad (14)$$

あるいは、粒子に対する作用力が p であり、その粒子の平均破壊荷重が L_a であるとすれば、Eq.(14)と同意な式として P_f を以下のようにあらわすことも可能である。

$$P_f = 1 - \exp[-(p/L_a)^r] \quad (15)$$

なお、前報^{2),3)}では粒子に作用するエネルギーと粒子の破壊確率との関係についての実験結果から、次式の

関係をえている。

$$P_f = 1 - \exp \{-CE^{1.5}\} \quad (16)$$

そこで、Eq.(14)とEq.(16)において、エネルギーの項のべき数を等しいとおけば、 $r=2.5$ と決めることができる。

4. 解析解の適合性

以上の解析によれば、平均破壊荷重が L_a である粒子に p なる力が働いた場合、その粒子の破壊確率は次式の関係であらわすことができる。

$$P_f = 1 - \exp \{-(p/L_a)^{2.5}\} \quad (17)$$

そして、 p の値は衝撃エネルギーの値から Eq.(9) および(12)を用いて算出することが可能である。そこで、ここで導いた破壊確率の解析解の適合性を、前報²⁾で報告した重錘落下式衝撃試験で行った単粒子の破壊確率の実験結果と対比させて以下に検討することにする。

前報までの実験に使用した試料は、ふるい分けによって5段階の粒度に整粒したガラスビーズである。試料の平均径と、それぞれの静荷重下における平均破壊荷重を **Table 1** に掲げる。なお、表中にはガラスビーズのヤング率とポアソン比を合せて示したが、これらの値は文献⁷⁾から引用した値である。また、衝撃試験に使用した重錘のヤング率とポアソン比を **Table 2** に掲げた。一方、エネルギー伝達係数 η は未知の値であるが、ここでは $\eta = 0.65$ と仮定する^{*}。

Table 1 Mean fracture load of glass beads used

Particle size d_p [cm]	Mean fracture load L_a [N]	Young's modulus & Poisson's ratio
0.581	3001.9	$Y_p = 7.35 \times 10^{10}$ (N/m ²) $\nu_p = 0.16$ (-)
0.389	2138.9	
0.283	1223.9	
0.193	776.7	
0.118	460.9	

Table 2 Young's modulus and Poisson's ratio of drop weight used

Material	Young's modulus Y_w (N/m ²)	Poisson's ratio ν_w (-)
Tungsten carbide	6.08×10^{11}	0.21
Steel	2.06×10^{11}	0.30
Alumina	3.52×10^{11}	0.20
Porcelain	6.89×10^{10}	0.30

*) エネルギー伝達係数 η は八嶋⁸⁾が報告しているように衝撃速度によって変化するものと考えられる。しかし、前報での実験範囲では η が一定であるとし、試料ガラスビーズの反発係数を考慮して、ここでは $\eta = 0.65$ の一定として扱った。

前報²⁾では各試料粒子の破壊荷重分布を静荷重下ならびに衝撃荷重下で求めた。その結果から、ガラスビーズの破壊強度の粒子体積依存性を調べると **Fig. 1** のようになる。なお、この図のたて軸は、各試料粒子の平均破壊荷重 L_a を、さきの Eq.(13) で示した平松の式に代入して求めた破壊強度(静荷重下での平均破壊強度 S_s と衝撃荷重下での平均破壊強度 S_i) である。 **Fig. 1** から、破壊強度の粒子体積依存性は静荷重下に比べて衝撃荷重下のほうが若干大きい傾向にあるものの、平均破壊強度の値について比較すると、実験範囲内では、両者の間には顕著な差異は認められないことがわかる。したがって、ここでは、**Table 1** に示したように、試料強度の1つの基準値として静荷重下における平均破壊荷重を用いることにする。

以上の数値と関係式によって、前報²⁾での実験条件(衝撃エネルギーの値)に基づいて計算した結果を **Fig. 2** に示す。この図のたて軸は、ここでの解析解による破壊確率の計算値であり、横軸には前報でえた破壊確

Fig. 1 Size effect of fracture strength of glass beads under statical loading and under impulsive loading

Fig. 2 Correlation between calculated results ($P_f C$) and experimental data of fracture probability of glass beads ($P_f T$)

Fig. 3 Comparison of calculated result and experimental data of fracture probability of glass beads

率の実測値である。この図では、粒子径が小さい試料粒子において破壊確率の計算値が実測値より全体的に大きい結果としてプロットされており、また逆に、粒子径が大きい試料粒子では実測値より計算値の方が小さい結果となっている。これは、さきのFig. 1 から明らかなように、強度の基準値として計算に用いた静荷重下での平均破壊強度が、粒子径が小さい場合には衝撃荷重下でのそれより小さく、また、粒子径が大きい

場合は逆に大きいことに起因するとも考えられる。いずれにせよ、Fig. 2 から明らかなように、計算値と実測値とは良好な対応を示している。なお、前報では、粒子に作用する衝撃エネルギーを一定にして破壊確率に及ぼす重錘の材質の影響を示したが、その実験結果とここで解析解に基づく計算結果とを比較した。それをFig. 3 に示す。ここにおいて、測定値と計算値はきわめて良好な一致を示している。

以上の結果より、本報で導いた粒子の破壊確率の解が妥当であると考察した。

5. ま と め

粒子の破壊確率の解析を最弱リンクモデルに基づいて行った。そして、得られた解析解による計算結果と、さきに報告した実験結果とを比較したところ、両者は良好な一致を示しており、この解析解が妥当であることが認められた。そして、これにより、集合粉碎の基本的な現象である砕料粒子の材料力学的な性質と粉碎媒体の材料力学的な性質が破壊挙動に寄与する関係が考察できた。

Nomenclature

A : parameter	$[N/m^{3/2}]$	Y : Young's modulus	$[N/m^2]$
c : constant	$[-]$	γ : index	$[-]$
d_p : particle size	$[m]$	δ : displacement	$[m]$
E : impact energy	$[J]$	η : coefficient of energy transfer at impact	$[-]$
L_a : mean fracture load of particle	$[N]$	λ : parameter	$[-]$
P : probability	$[-]$	ν : Poisson's ratio	$[-]$
P_f : fracture probability	$[-]$	σ_m : internal stress of particle	$[N/m^2]$
p : impact force	$[N]$	σ_t : strength of particle	$[N/m^2]$
v : volume of particle	$[m^3]$		

References

- 1) Kuwahara, Y., F. Saito and S. Yashima : *J. Soc. Powder Technol., Japan*, **19**, 157(1982)
- 2) Kuwahara, Y., F. Saito and S. Yashima : *J. Soc. Powder Technol., Japan*, **19**, 211(1982)
- 3) Kuwahara, Y., F. Saito and S. Yashima : *J. Soc. Powder Technol., Japan*, **21**, 469(1984)
- 4) Timoshenko, S. and J. N. Goodier : "Theory of Elasticity", McGraw-Hill, p. 372 (1951)
- 5) Rumpf, H. : *Aufbereitungs-Techn.*, **14**, 59(1972)
- 6) Hiramatsu, Y., I. Oka and H. Kiyama : *J. Min. Metall. Inst., Japan*, **81**, 1024(1965)
- 7) Yashima, S. et al. : *Kagaku-kogaku*, **34**, 210(1970); **36**, 1017(1972)
- 8) Yashima, S., F. Saito and H. Hotta : *Kagaku-kogaku Ronbunshyu*, **7**, 83(1981)