繊維集合体の構造と粒子の捕捉(1)

—2次元ランダム配向繊維集合体の幾何学的構造—

山 田 國 廣*
Kunihiro YAMADA

Key Words : Stochastic Geometry, Fiber Assemblies, Orientation, Polygon

1. は じ め に

繊維集合体とは、多くの繊維が集合して一定の働きをする構造物の総称であり繊維フィルタ、不織布、紙、織物、編物、筋肉、皮膚、革、植物組織などは広い意味で繊維集合体といえる。

繊維集合体の力学特性および粒子や流体が通過するときの特性は、単繊維の構造と物性そして集合体としての構造に依存している。

本解説ではとくに2次元ランダム配向繊維集合体の幾何学構造について、その理論解析結果とモンテカルロ・シミュレーション結果について説明する。

2. 2次元繊維集合体の構造¹⁾

繊維フィルタ、不織布、紙などの2次元繊維集合体の幾何構造をモデル化して考えると、平面の直線によるランダム分割と見ることができる。単繊維の構造としては繊維長 l 、繊維幅 w 、座標軸に対する配向角 θ が考えられる。集合体の構造としては繊維本数 N 、単位面積内における繊維交点数 C 、1本の繊維の単位長さあたりの平均交点数 τ 、繊維配向角分布 $q(\theta)$ などがある。さらにランダム配向直線によって生成される多角形の構造としては辺の数 n の分布 $P(n)$ 、周長 l

の分布 $Q(l)$ 、面積 a の分布 $R(a)$ 、変形度 c の分布 $T(c)$ とそれらの (k, m) 次モーメント $E(n^k l^m)$ 、 $E(n^k a^m)$ 、 $E(l^k a^m)$ 、 $E(c^k)$ などが考えられる。

2.1 第I種分割過程における多角形の辺の数の分布

平面上のランダム直線²⁾をつぎのように与える。

$$X \cos \theta + Y \sin \theta = Z \quad (1)$$

ここで θ は原点から直線に引いた垂線と X 軸のなす角、 Z はこの垂線の長さである。 θ と Z を $0 \leq \theta \leq \pi$ 、 $0 \leq Z \leq M$ の一樣乱数で置き換えると、位置と方向が一樣ランダムな直線群が生成される。シミュレーション実験はコンピュータと線描画による2種類で行ない、初期形状は半径10cmの円に内接する正3角形とした。線描画によるシミュレーションの様子を図1に示す。

1つの多角形が直線分の新たな導入により2つになり、さらに直線分を導入して2つの多角形が両方とも分割されて4つになる。このように進む分割過程を第I種分割過程と呼ぶ。この種の分割を i 段階進めると生成される多角形の数は 2^i 個となる。第I種分割過程の進行の様子を図2に示す。図からわかるように第I種分割過程は理想化された割れ目の進行過程である。

図1 線描画によるモンテカルロ・シミュレーション

昭和61年6月16日受付

*大阪大学工学部産業機械工学科(〒565 吹田市山田丘2-1)
TEL 06-877-5111 内線 4233

〈著 者 紹 介〉

昭42. 京都工芸繊維大学工学部機械工芸学科卒業

昭44. 京都工芸繊維大学大学院工学部研究科修士課程

昭44. 大阪大学工学部機械工学科助手

大阪大学工学部機械工学科において繊維集合体の構造と力学について研究

昭61. 大阪大学工学博士

図2 第Ⅰ種分割過程の進行

いま3角形が1本の直線分によって分割されるとき、直線分が3角形の頂点に交わる確率を0とすると、元の3角形は必ず3角形と4角形に分割される。 m 角形が分割されて n 角形になる推移確率を $T(n|m)$ とするとこの場合は $T(3|3) = T(4|3) = 0.5$ となる。同様の推移確率を4角形以上の場合についても考える。任意の形の m 角形が直線分によって分割されるとき n 角形と $m-n+4$ 角形になる。ここで n は $3 \leq n \leq m+1$ である。 m 角形の形(辺の長さや角度)が固定されていると m 角形から n 角形になる推移確率 $T(n|m)$ は理論的に決定できる。ところで実際の分割過程から生じる多角形は一義的に形が決まらず、まったく確率的なものである。そのため $m \geq 4$ においてこの確率 $T(n|m)$ を幾何学的に計算することができない。そこでつぎのような理想化を行なう。つまり、各分割段階で着目する多角形を同じ辺数を持つ正多角形であるとみなして $T(n|m)$ を計算する。すると簡単な幾何学的誘導より $T(n|m)$ は

$$T(n|m) = \frac{-\sin\{(n-3)\pi/m\} + 2\sin\{(n-2)\pi/m\} - \sin\{(n-1)\pi/m\}}{2\sin(\pi/m)} \quad (2)$$

となる。式(2)より明らかに

図3 初期多角形が13角形である場合の第Ⅰ種分割過程における多角形の辺の数の分布 $P_i(n)$ の推移

$$T(n|m) = T(m-n+4|m) \quad (3)$$

である。

このような分割過程で、多角形の辺の数の推移は1段階前の状態のみに依存し順次進行していくのでマルコフ過程とみなすことができる。このとき式(2)はマルコフ過程の推移確率行列の要素であると考えることができる。そこで推移確率行列を $[T(n|m)]$ とする。第Ⅰ種分割過程の段階 i において n 角形の存在確率(多角形の辺の数の分布)を $P_i(n)$ 、その確率ベクトルを $[P_i(n)]$ と表わすと、マルコフ過程³⁾の理論より

$$\begin{aligned} [P_i(n)] &= [P_{i-1}(m)][T(n|m)] \\ &= [P_0(m)][T(n|m)]^i \end{aligned} \quad (4)$$

となる。

初期状態を $P_0(13)=1$ として式(4)を $i=100$ まで計算した。その結果を図3に示す。 $i=10$ ではほぼ収束していることがわかる。

2.2 第Ⅱ種分割過程による多角形の辺の数の分布

第Ⅰ種分割過程では段階 $i-1$ から i に進む間に、すべての多角形が例外なく分割されていくとしていた。しかし繊維集合体において、繊維が1本ずつ増加していくような場合、すべての多角形のなかで周長の大きな多角形の方が小さなものより分割されやすい。そこで多角形の周長の大きさに応じて分割される確率の大小を考慮に入れる必要がでてくる。このような場合を第Ⅱ種分割過程と吸ぶことにし、その例として繊維集合体の分割過程を図4に示す。

第Ⅱ種分割過程の段階 $i-1$ で m 角形であったものが段階 i でも分割されずにそのまま残っている確率を q_1 、段階 $i-1$ で m 角形であったものが段階 i で n 角形になる確率を q_2 、そして段階 $i-1$ ですべての多角形の数を C_{i-1} 、段階 $i-1$ から i に進む間に増加した多角形の数を $C_i - C_{i-1}$ と与えると、段階 i における多角形の辺の数の分布 $P_i(n)$ は

$$P_i(n) = \frac{C_{i-1}q_1 + C_{i-1}q_2}{C_{i-1} + (C_i - C_{i-1})} = \frac{q_1 + q_2}{1 + (C_i - C_{i-1})/C_{i-1}} \quad (5)$$

となる。

式(5)における q_1 、 q_2 、そして $(C_i - C_{i-1})/C_{i-1}$ の理論的導入過程は大変複雑なので本解説では省略する

図4 第Ⅱ種分割過程の進行(繊維集合体の場合)

図5 初期多角形が3角形である場合の第Ⅱ種分割過程における多角形の辺の数の分布 $P_i(n)$ の推移

表1 多角形の辺の数の定常分布 $P(n)$ の数値

n	$P(n)$
3	0.3554
4	0.3809
5	0.1901
6	0.5873×10^{-1}
7	0.1258×10^{-1}
8	0.1997×10^{-2}
9	0.2451×10^{-3}
10	0.2404×10^{-4}
11	0.1930×10^{-5}
11	0.1293×10^{-6}
13	0.7345×10^{-8}
14	0.3584×10^{-9}
15	0.1520×10^{-10}

表2 多角形の辺の数の分布 $P(n)$ の k 次モーメント $E(n^k)$ の数値

n	$E(n^k)$
1	4.000
2	1.693×10
3	7.596×10
4	3.615×10^2
5	1.821×10^3
6	9.691×10^4
7	5.431×10^5
8	3.196×10^5
9	1.970×10^6
10	1.268×10^7

図6 多角形の辺の数の分布 $P(n)$ の理論値と実測値の比較

○：無限長直線による5回の実測値の最大平均最小を示す
×：Piekearらが行った有限長直線による3回の実測値の平均値を示す

(文献1を参照)。なお、 $q_1 = 0$ の場合は式(4)の第Ⅰ種分割過程と一致する。

第Ⅱ種分割過程で $n_0 = 3$, $i = 2, 5, 10, 100$ の $P_i(n)$ の計算結果を図5に示す。 $i = 10$ ですすでに定常値に近くなっているの、 $i = 100$ の場合を定常値と考え $P_{100}(n)$ の k 次モーメント $E(n^k)$ は

$$E(n^k) = \sum_{n=3}^{\infty} n^k P_{100}(n) \quad (6)$$

で与え、 $k = 10$ までの $E(n^k)$ の数値を表2に示す。

2.3 理論値とシミュレーション結果の比較

ランダム直線によって生成される多角形の辺の数の分布 $P(n)$ についてコンピュータによるモンテカルロ・シミュレーションによって5回の実験を行なった。段階100におけるシミュレーション値の最大、最小、平均値と第Ⅱ種分割過程の理論値との比較を図6に示す。5回の平均値と理論値がよく合っていることがわかる。また、R. E. Miles⁴⁾が求めた理論値 $P(3) = 2 - \pi^2/6 = 0.3551$, $E(n^2) = (\pi^2 + 24)/2 = 16.93$ に対して表1, 2に示したように第Ⅱ種分割過程の理論値は $P(3) = 0.3554$, $E(n^2) = 16.93$ となっており、Milesの結果ともよく合っていることがわかる。

3. 2次元繊維集合体の変形による配向と構造の変化⁵⁾

3.1 繊維集合体の配向モデル

積分幾何において直線の方程式は式(1)で与えられ

図7 繊維長一定配向モデルによる任意の1本の繊維の平行移動と回転、 θ は配向角、 l は繊維長、 z は原点から繊維に直角に引いた垂線の長さを表わしている

繊維集合体が等方、等質性を有するときは θ と Z は独立でそれぞれ一様分布で与えられる。

初期状態において等方、等質性である集合体上に $X-Y$ 座標を考え、集合体が X 軸方向に α 倍、 Y 軸方向に β 倍伸縮されたときの θ の変化を考える。集合体の変形過程に対してつぎのような仮定を設定する。

(1) 集合体の変形によって繊維長は変化しない。

(2) 初期状態において任意の1本の繊維が対角線となるような長方形($a_0 \times b_0$)を仮想領域と考えた場合、集合体変形後その領域は($\alpha a_0 \times \beta b_0$)の長方形になり、繊維は変形した長方形の対角線上にくる。

(3) 初期状態における任意の1本の繊維の midpoint 座標(x_0, y_0)は集合体変形後($\alpha x_0, \beta y_0$)となる。

このような変形過程での繊維の移動、回転の様子を図7に示す。

初期状態において配向角分布が $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ の一様分布である集合体が(1), (2), (3)の仮定に基づいて変形を受けるとき初期配向角 θ_0 と変形後の配向角 θ の関係は

$$\theta = \tan^{-1}(\beta \tan \theta_0 / \alpha) \quad (7)$$

となり、配向角分布 $q(\theta)$ は

$$q(\theta) = \frac{\alpha\beta}{\pi} \frac{1}{\beta^2 \cos^2 \theta + \alpha^2 \sin^2 \theta} \quad (8)$$

で与えられる。

3.2 配向角分布の配向係数による表現

配向角分布 $q(\theta)$ を配向係数 J で表わす。 J は R.S. Stein⁶⁾らによってつぎのように定義されている。

$$J = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta q(\theta) d\theta - 1 \\ = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2\theta q(\theta) d\theta \quad (9)$$

配向が等方性であるときは $J = 0$ 、 X 軸方向に完全配列のときは $J = 1$ 、 Y 軸方向に完全配列のときは $J = -1$ であり J は2次元繊維集合体の配列度を表わす

パラメータになっている。

いま $A(2k)$ を

$$A(2k) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2k\theta q(\theta) d\theta \quad (10)$$

とおく。式(10)へ式(8)を代入して計算すると

$$A(2k) = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^k \quad (11)$$

となる。すると配向係数 J は式(9), (11)より

$$J = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \quad (12)$$

で与えられる。式(12)を変形すると

$$\beta/\alpha = \frac{1-J}{1+J} \quad (13)$$

となる。式(13)を式(7)へ代入すると θ と θ_0 の関係は

$$\theta = \tan^{-1} \left\{ \left(\frac{1-J}{1+J} \right) \tan \theta_0 \right\} \quad (14)$$

と表わされる。さらに式(13)を式(8)へ代入すると配向角分布 $q(\theta)$ は

$$q(\theta) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\left(\frac{1-J}{1+J} \right) \cos^2 \theta + \left(\frac{1+J}{1-J} \right) \sin^2 \theta} \quad (15)$$

と J によって表わされる。式(15)において $J = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ と変化させたときの $q(\theta)$ を図8に示す。繊維フィルタ、紙、不織布などの繊維配向状態は式(15)によって表わされることが知られている。さらに千葉⁷⁾らの研究によって高分子溶液中を流れる多数の繊維群の配向についても式(15)がよく適合する

図8 配向係数を $J = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ と変化させた場合のPL型集合体の配向角分布 $q(\theta)$ の推移

ことがわっている。

3.3 配向主軸に対して θ' 方向の走査線に交わる繊維本数および交点数

図7に示したようなモデルにしたがって繊維が配向すると、配向主軸に対して θ' 方向の走査線に交わる繊維本数 $D(\theta')$ および単位面積内の交点数 λ は配向とともに変化する。

小森^{8,9)}らは $D(\theta')$ 、 λ をつぎのように与えている。

$$D(\theta') = \frac{NI}{a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} q(\theta) |\sin(\theta - \theta')| d\theta \quad (16)$$

$$\lambda = \frac{(NI)^2}{2a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} q(\theta) q(\theta') |\sin(\theta - \theta')| d\theta d\theta' \quad (17)$$

ここで N は繊維本数、 l は繊維長、 a は集合体の試料面積である。

式(16)、(17)の右辺の $|\sin(\theta - \theta')|$ をフーリエ級数に展開して積分を実行するとそれぞれ

$$D(\theta') = \frac{NI}{a} \left\{ \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (\cos 2k\theta') J^k / (4k^2 - 1) \right\} \quad (18)$$

$$\lambda = \frac{(NI)^2}{2a} \left\{ \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} J^{2k} / (4k^2 - 1) \right\} \quad (19)$$

となって配向係数 J で表わされる。

3.4 集合体変形による多角形の辺の数の分布の変化

集合体が図7のような変形を受けるとき、多角形の辺の数の分布 $P(n)$ も変化する。初期状態において配向角分布が $J=0$ 、すなわち一様ランダムである場合、そのときの多角形の辺の数の分布を $P(n|J=0)$ 、 k 次モーメントを $E(n^k|J=0)$ と書くことにすると、それらの数値は表1、2に与えられている。

すると任意の配向角分布を有する場合の多角形の辺の数の分布 $P(n)$ は $P(n|J=0)$ と関連づけられる形でつぎのように表わされる(理論的誘導の詳細については文献⁵⁾を参照)。

$$\left. \begin{aligned} P(n) &= \left(\frac{2GI-8}{\pi^2-8} \right) P(n|J=0) \\ n &= 3 \text{ または } n \geq 5 \\ P(4) &= \left(\frac{2GI-8}{\pi^2-8} \right) P(4|J=0) + \left(\frac{\pi^2-2GI}{\pi^2-8} \right) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここで G 、 I はそれぞれ

$$G = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} q(\theta) |\sin(\theta - \theta')| d\theta \right\}^2 d\theta' \quad (21)$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} q(\theta) q(\theta') |\sin(\theta - \theta')| d\theta d\theta' \quad (22)$$

で与えられる。 G の右辺カッコ内の積分は(16)の右辺積分と一致し、 I は式(17)の右辺積分と一致するので、式(18)、(19)より、 I 、 G は配向係数 J によって表わされ、結局 $P(n)$ も配向係数によって表現できることになる。

パラレル・レイド型(単軸配列)集合体で $J=0.65$ 、0.85のときの $P(n)$ について、式(20)による理論値とモンテカルロ・シミュレーション結果の比較を図9、10に示す。

つぎに $P(n)$ の k 次モーメント $E(n^k)$ は式(20)より

$$\begin{aligned} E(n^k) &= \sum_{n=3}^{\infty} n^k P(n) \\ &= \left(\frac{2GI-8}{\pi^2-8} \right) E(n^k|J=0) + \left(\frac{\pi^2-2GI}{\pi^2-8} \right) 4^k \end{aligned} \quad (23)$$

となる。

なお、多角形の辺の数 n 、周長 l 、面積 a の分布に関する1次、2次モーメントはMiles⁴⁾によってそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} E(n) &= 4 \\ E(l) &= 4/I\tau \\ E(a) &= 2/I\tau^2 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} E(n^2) &= IG + 12 \\ E(nl) &= 2(IG + 4)/I\tau \\ E(na) &= 2G/\tau^2 \\ E(la) &= 4G/I\tau^3 \\ E(a^2) &= 4G/I\tau^4 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

として積分幾何学の手法によって求められている。こ

図9 PL型集合体の多角形の辺の数の分布 $P(n)$ の理論値(実線)とモンテカルロ・シミュレーション結果(棒グラフ)の比較

図10 PL型集合体の多角形の辺の数の分布・ $p(n)$ の理論値(実線)のモンテカルロ・シミュレーション結果(棒グラフ)の比較

ここで τ は単位長あたりの交点数である。さらに、配向角分布が一様ランダムの場合は式(21), (21)より I, G は

$$\left. \begin{aligned} I &= 2/\pi \\ G &= \pi^2/4 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

となる。

4. 平面内のランダム直線によって生成される多角形の周長および面積の分布¹⁰⁾

4.1 多角形の周長分布

一様ランダム配向を有する直線群において、単位長あたりの交点数 τ が与えられているとき、 n 角形の周長分布 $Q(l|n)$ は

$$l_* = 2\tau l / \pi \quad (27)$$

と変換すると、自由度が $2(n-2)$ の χ^2 分布⁴⁾になることが知られている。すなわち l_* の確率密度関数は

$$Q(l_*|n) = 2^{-(n-2)} \{\Gamma(n-2)\}^{-1} (l_*)^{n-3} e^{-l_*/2} \quad (28)$$

である。式(28)を l の分布に変換すると

$$Q(l|n) = (\tau/\pi)^{n-2} \{\Gamma(n-2)\}^{-1} l^{n-3} e^{-(\tau/\pi)l} \quad (29)$$

となる。すると、すべての多角形の周長分布 $Q(l)$ は式(5), (29)より

$$Q(l) = \sum_{n=3}^{\infty} P(n) Q(l|n) \quad (30)$$

と表わされる。

$E(l)=1$ のときの $Q(l|n)$ の変化を図11に、そして $E(l)=0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ と変化させたとき

の $Q(l)$ を図12に示す。さらに $E(l)=0.2141$ の場合の理論値とシミュレーション結果の比較を図13に示す。

図11 すべての多角形の周長の平均値が $E(l)=1.0$ の場合の周長分布 $Q(l)$ と n 角形の周長分布 $Q(l|n)$ の変化の様子

図12 すべての多角形の周長の平均値が $E(l)=0.1 \sim 5.0$ の場合の周長分布 $Q(l)$ の変化

図13 すべての多角形の周長の平均値が $E(l)=0.2141$ の場合の周長分布 $Q(l)$ の理論値と実験値の比較

4.2 多角形の面積分布

周長 l の正 n 角形の面積 a_* は

$$a_* = (l^2/4n) \tan\{(n-2)\pi/2n\} \quad (31)$$

で与えられる。

いま任意の多角形が正多角形からずれている程度を表わす量として変形度(面積修正係数) c を

$$c = \frac{\text{周長 } l \text{ の任意の } n \text{ 角形の面積}}{\text{周長 } l \text{ の正 } n \text{ 角形の面積}}$$

と定義する。明らかに c は $0 \leq c \leq 1$ で変化する。また定義より相似な多角形の c は同値であるので、 c は多角形の大きさとは無関係であることがわかる。すると周長 l 、変形度 c の面積 a は

$$a = (cl^2/4n) \tan\{(n-2)\pi/2n\} \quad (32)$$

となる。 c は分布しているので、その確率密度関数を $T(c)$ とすると、式(29)、(32)より n 角形の面積の分布 $R(a|n)$ は

$$R(a|n) = \{\Gamma(n-2)\}^{-1} 2^{-(n-1)} u^{n-2} a^{(n-4)/2} (\tau/\pi)^{n-2} \int_0^1 c^{-(n-2)/2} e^{-(1/2)(\tau/\pi)uc^{1/2}} T(c) dc \quad (33)$$

となる。ここで u は

$$u = 4n^{1/2} [\tan\{(n-2)\pi/2n\}]^{-1/2} \quad (34)$$

で与えられ、 $T(c)$ は

$$T(c) = \{B(2.816, 1.202)\}^{-1} c^{1.816} (1-c)^{0.202} \quad (35)$$

で与えられるベータ分布である。

$E(a)=1$ のときの $R(a|n)$ の変化を図14に、そして $E(a)=0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ のときの $R(a)$ の変化の様子を図15に示す。さらに $E(a)=0.003647$ の場合の理論値とシミュレーション結果の比較を図16に示す。

図14 すべての多角形の面積の平均の直が $E(a)=1.0$ の場合の面積分布 $R(a)$ と n 角形の面積分布 $R(a|n)$ の変化の様子

図15 すべての多角形の面積の平均値が $E(a)=0.1 \sim 5.0$ の場合の面積分布 $R(a)$ の変化の様子

図16 すべての多角形の面積の平均値が $E(a)=0.003647$ の場合の面積分布 $R(a)$ の理論値と実験値の比較

4.3 多角形の辺の数 n , 周長 l , 面積 a に関する (k, m)

次モーメント $E(n^k l^m)$, $E(n^k a^m)$, $E(l^k a^m)$

n, l, a の分布に関する (k, m) 次モーメントは、式(5)、(29)、(33)よりそれぞれ

$$E(n^k l^m) = \sum_{n=3}^{\infty} P(n) \int_0^{\infty} n^k l^m Q(l|n) dl \\ = \sum_{n=3}^{\infty} P(n) n^k \prod_{i=0}^{m-1} (n+i-2) (\pi/\tau)^m \quad (36)$$

$$E(n^k a^m) = \sum_{n=3}^{\infty} P(n) \int_0^{\infty} n^k a^m R(a|n) da \\ = \sum_{n=3}^{\infty} P(n) n^k -m 2^{-2m} [\tan\{(n-2)\pi/2n\}]^m$$

$$\cdot E(c^m) \prod_{i=0}^{2m-1} (n+i-2) (\pi/\tau)^{2m} \quad (37)$$

$$E(l^k a^m) = \sum_{n=3}^{\infty} P(n) \int_0^1 \int_0^{\infty} l^k a^m T(c) Q(l|n) dc dl$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} P(n) n^{-m} 4^{-m} [\tan\{(n-2)\pi/2n\}]^m \cdot$$

$$\cdot E(c^m) \prod_{i=0}^{k+2m-1} (n+i-2) (\pi/\tau)^{k+2m} \quad (38)$$

となる。ここで $E(c^m)$ は

$$E(c^m) = B(2.816 + m, 1.202) / B(2.816, 1.202) \quad (39)$$

で与えられるベータ分布の m 次モーメントである。

Goudsmit¹¹⁾, Miles⁴⁾, Kendall¹²⁾らは積分幾何の手法によって1次, 2次モーメントと3次モーメントの一部を求めているが, 残りのモーメントのすべては式(36)~(38)によって求めることができる。

5. お わ り に

2次元繊維集合体の幾何学構造と粒子および流体通過特性を関連づけるための基礎論として, 多角形の辺の数, 周長, 変形度, 面積の分布と, その k 次モーメントの理論結果を解説した。そして, 理論値とモンテカルロ・シミュレーションの結合がよく合うことを示した。

引 用 文 献

- 1) 山田國廣, 堀川明: 繊維論文集, **36**, 111 (1983)
- 2) 栗田稔: 積分幾何, p. 14, 共立出版(1959)
- 3) 北川敏男: マルコフ過程, 共立出版(1967)
- 4) Miles, R. E.: Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., **52**, 901 (1964)
- 5) 山田國廣, 堀川明: 繊維論文集, **37**, 201 (1984)
- 6) Stein, R. S. and S. N. Stidham: *J. Appl. Phys.*, **35**, [1], 42 (1964)
- 7) 千葉訓司, 林茂寿, 宋起元, 堀川明: 繊維学会第38回年次大会講演要旨集, 35 (1985)
- 8) 小森尚志, 牧島邦夫: 繊維誌, **32**, [6], 71, (1976)
- 9) 小森尚志, 牧島邦夫: 繊維誌, **32**, [9], (1976)
- 10) 山田國廣, 堀川明: 繊維論文集, **37**, 31 (1984)
- 11) Goudsmit, S.: *Rev. Mod. Phys.*, **17**, 321 (1945)
- 12) Kendall, D. G. and E. F. Harding: "Stochastic Geometry", John Wiley & Sons (1974)