非付着性均一粒径粉体の摩擦特性の 空間率依存性について

野村伸一郎*, 伊藤文敏**, 田中達夫***

Analysis of Friction Properties of Non-Cohesive Mono-sized Granular Materials in Relationship to the Void Fraction

by

Shin-ichiro NOMURA[†], Fumitoshi ITOH^{††} and Tatsuo TANAKA^{†††}

The friction properties represented by the angles of repose and internal friction are investigated in relationship to void fraction. A simplified packing model is developed to analyze the shear mechanism of non-cohesive mono-sized granular materials. Both angles are derived as a function of the void fraction and the coefficient of friction of the particle. The derived theory is confirmed reasonably well with the experiment conducted for the angle of repose for various void fractions and some reported data of the angle of internal friction.

Key Words : Angle of Repose, Internal Friction, Void fraction, Non-cohesive Powder, Coordination Number

1. 緒 言

粉体層の摩擦特性はその粉体の流動性および応力状態を左右し、粉体プロセスの設計さらにはその操作方法に大きな影響を与える。

この摩擦特性には、粉体同士のものとして安息角、内部摩擦角があり、前者は、注入角法、排出角法、傾斜角法、後者は、三軸圧縮法、直接せん断法（一方向またはリング式せん断法）等で測定され^{1,2)}、粉体集合体の摩擦特性を表すのに用いられている。

ただし、この摩擦角は粉体集合体の状態（充填状態、粒子形状および粒径、付着特性等）の影響を受け³⁻⁵⁾、

純粋な意味での物性値ではないため、その用途には十分注意する必要がある¹⁾。たとえば、同じ粉体でも測定法によって充填状態が違い、したがって、実測値にも違いを生ずる。しかも現状では、粉体集合体の状態との因果関係が明らかではないので、その実測値を実際プロセスへ直接適用しようということより、流動性指数として相対的に評価すること⁶⁾の方が無難である。

この摩擦角についての過去の研究では、実験的には測定法の開発改良を伴ったものが多く²⁾、また理論的には充填状態の影響^{3,5)}、付着性粉体の粒径の影響⁴⁾について解析したものがいくつかあるが、結果は未定数を含むなど定性的であり、任意の粉体集合体の状態に対し定量的評価を与える関数関係は明確ではない。また松岡⁷⁾は、二次元ではあるが、一面せん断試験中のせん断面での力の伝播および充填状態の変化を微視的に解析しているが、空間率のような平均的マクロ的な情報から摩擦角を予測しようとするには言及していない。

本研究では、粉体層のせん断現象において、上述の集合体状態変数のうち充填状態の影響は根本的な問題

平成元年12月18日受付

化学工学協会第54年会(1989年4月、神戸)にて発表

* パブコック日立(株)呉研究所

(〒737 呉市宝町3-36)

TEL 0823-21-1160

** 三井石油化学工業(株)

*** 北大名誉教授

† Bab Cock Hitachi K.K., Kure Research

†† Mitsui Sekyū-Kagaku K.K.

††† Emeritus Professor of Hokkaido Univ.

であり、その解決なくしてその他の状態変数の影響も解析できないとする立場を取り、その第一歩として、非付着性の均一粒径粒子群に対象を限定するが、それがランダムに充填されている粉体層でのせん断現象をモデル化し、特に、空間率のせん断摩擦特性に与える影響について解析した。その結果、興味ある知見を得たので報告する。

2. 理 論

Fig.1 は、重力場での安息せん断面において、上部の動いている層と下部の静止粒子層とが互いに入り組んだ状態の模型である。この時、せん断面の水平面となす角 ϕ_r が安息角である。このような重力場でのせん断断面对し、上から荷重 W をかけ水平方向に F の力でせん断しているのが**Fig.2**であり、直接せん断法などに見られ、 $\tan^{-1}(F/W)$ から内部摩擦角 ϕ_i を求める。本報では、この ϕ_r 、 ϕ_i を総称してせん断摩擦角とし ϕ で表す。

Figs.1および**2**のどちらもA, B, Cの3つの粒子に着目する。実際のランダムな配置に対し、粒子A, Bは静止面での平均化された（その静止面の方向を与える）位置にある粒子であり、その上を滑っている移動層側の粒子の静止層粒子との位置関係の平均が、粒子Cと粒子Aとのそれで代表されと考える。この3つの粒子の位置関係は、せん断面での充填状態で決まり、

Fig. 1 Packing model for angle of repose

Fig. 2 Packing model for angle of internal friction

本報では平均的空間率を用いる。すなわち、粒子Aの中心aを中心とした粒子B, C間の位置を角度 θ で与えると、 θ は空間率の関数として表される。また、粒子層静止面(粒子A, Bの中心a, bを結んだ直線上)から時計方向に ϕ (**Fig.1**では ϕ_r , **Fig.2**では ϕ_i に相当)回転した方向と粒子Cの滑る方向のなす角を η とすると、次式が成り立つ。

$$\eta = \phi + \theta - (\pi/2) \quad (1)$$

この時、粒子Cは転がらず滑っていると仮定し、力のバランスをとると**Figs.1**および**2**の両者とも次式で整理される。

$$\tan \eta = \mu_p \quad (2)$$

ただし、 μ_p は粒子表面動摩擦係数で、粒子表面状態(形状)に依存するが物性値と見なせるものである。Eq.(2)にEq.(1)を代入すると、結局、せん断摩擦角 ϕ が次式で表される。

$$\phi = -\theta + \{(\pi/2) + \tan^{-1} \mu_p\} \quad (3)$$

ここで、 θ は ϵ の関数で、この式が本解析でのせん断摩擦角 ϕ (安息角では ϕ_r , 内部摩擦角では ϕ_i)と空間率 ϵ とを関係づける基本式である。ただし、 ϕ と ϵ との具体的な関係については、 θ と ϵ との具体的な関係を解析することで明らかになり、以下にそれを述べる。

まず、粒子群の配位状態を**Figs.1**および**2**で取り上げた3個の粒子にもう1つ粒子を加え、それを粒子Dとし、**Fig.3**(A)にその模型を図示する。ここでは粒子A表面での他の粒子のランダムな配位に対し、正三角状で均一(平均的)に分布しているモデルで簡単化し、数式化を試みる。すなわち、この3つの粒子B, C, Dは最も隣接している1組で、その中心は正三角形の3

Fig. 3 Three dimensional packing model around sphere A for a given void fraction

頂点に位置し、その点から粒子Aの中心へ引いた直線のどの2つをとってもその粒子Aの中心での角度は θ で等しい。このとき、粒子Aとその他の粒子との中心間距離は粒子直径 D_p に等しく、粒子B, C, Dの中心b, c, dは半径を D_p とする球面上に位置する(Fig. 3(B))。この球面三角形bcdの内角を ψ とすると、その面積 A_p は次式となる。

$$A_p = (3\psi - \pi) D_p^2 \quad (4)$$

ただし、 ψ と θ とは次の幾何学的関係にある。

$$\cos \theta = \cos \psi / (1 - \cos \psi) \quad (5)$$

いま、粒子Aのまわりの3つの粒子のうちの1つ(仮に粒子B)に着目する。この球面三角形に切ったとき、粒子Bは粒子全体 2π のうち ψ 分だけ切り取られ、球面三角形内に取り込まれる。言い替えると、この球面三角形の形成に、粒子Bは $\psi/(2\pi)$ 個分だけ寄与したかたちになり、粒子C, Dについても同様であり、全体としては $3\psi/(2\pi)$ 個でこの球面三角形を形成していることになる。したがって、球面全体に配位している粒子数 C は、球面の全表面積 $4\pi D_p^2$ より次式となる。

$$C = (4\pi D_p^2 / A_p) \{3\psi / (2\pi)\} = 6\psi / (3\psi - \pi) \quad (6)$$

一方、大内山ら⁸⁾がランダム充填モデルを基に配位数 C と空間率 ϵ との関係を解析し、次式を導出している。

$$C = (32/13)(7 - 8\epsilon) \quad (7)$$

Eqs. (6)および(7)の等置により、

$$\psi = \frac{16\pi(7 - 8\epsilon)}{3(99 - 128\epsilon)} \quad (8)$$

こうして、Eq.(8)をEq.(5)に代入し、Eq.(3)の基本式で用いた θ が ϵ と関係づけられ、結局、せん断摩擦角 ϕ がそのときの充填状態を示す空間率 ϵ で表されたことになる。

3. 安息角の測定

3.1. 実験装置および測定方法

安息角の測定にはいろいろな方法があるが¹⁾、本実験では空間率の影響を調べるのが目的であり、空間率を変えることの可能な三次元排出法を採用した。その概要をFig. 4に示した。

平板の上に内部円筒と外部円筒を置き、粉体を外部円筒内にできるだけ一様な充填状態になるように一杯に充填した後、外部円筒をゆっくり持ち上げ、粉体を少しずつ排出する。その結果、内部円筒上に円錐形の安息面が形成され、その頂点の高さ H を鏡を使って測定し、内部円筒の内径 D とを使って安息角 ϕ_r を算出し

Fig. 4 Experimental apparatus for angle of repose

た。そのときの空間率には、形成された円錐状の山での値を実測できればよいが、必ずしもきれいな円錐にはならず正確な体積を把握できない。そこで、底部の体積既知の内部円筒内の粉体層の空間率を求め、それを仮定した。

外部円筒には高さ14.5cm、内径15cmのものを用いた。内部円筒には高さ5cmで内径4.9, 7.8, 9.96, 13.23cmの4種類を用意し、円筒上部を鋭角に削り、縁の影響を排除した。

3.2. 試料粉体

使用した粉体はガラスビーズ、カルサイト、砂の3種類でそれぞれの物性値をTable 1に示した。なお、ガラスビーズ、カルサイトについては平均粒径を変え、またガラスビーズについてのみ粒子表面の動摩擦係数 μ_p の実測を以下の方法で行った。

ガラスビーズの表面はなめらかなことから、ガラスビーズ同士の滑りを、ガラスビーズをガラス板の上で滑らせることで代用した。適当な小さな木片の底面に両面テープを使って対象となるガラスビーズを張り付け、それを傾斜しているガラス板の上でゆっくり滑らせた後、ガラスビーズのついた板が静止する寸前までガラス板の傾斜を徐々にゆるめ、その時の傾斜角から

Table 1 Material constants

	D_p [mm]	ρ_p [g/cm ³]	μ_p [-]
Glassbeads	0.5	2.521	0.1489
	1.0	2.521	0.1328
	2.0	2.521	0.1301
Calcite	0.43	2.7	0.4813*
	1.2	2.7	0.5519*
Sand	0.5	2.703	0.6048*

* : mean value calculated from data of angle of repose

摩擦係数を算出した。結果は **Table 1** に示した。

3.3 実験の正当性についての検討

本来、非付着性粉体層の場合、充填状態が同じならばどの内径の内部円筒を使って安息角の測定値は同じはずである。**Fig. 5** に3種類の粉体について、各々の内径の内部円筒において、できるだけ同じ空間率(図には範囲で示した)のデータを取り出し、形成された円錐状の山の高さ H と内部円筒の半径 $D/2$ の関係を示した。どれも原点を通る直線近傍にあり、本方法の正当性の一確証になるものと思われる。

4. 結果と考察

まず、本理論解析で得た Eq.(3) の基本式の検討を行う。実験での空間率 ϵ から Eqs.(5) および(8) で算出した θ を横軸にとり、そのときの安息角 ϕ_r に対しプロットしたのが **Figs. 6, 7** および **8** である。まず、**Fig. 6** のガラスビーズの結果から考察する。本理論での唯一の未定定数は粒子表面での滑り摩擦係数 μ_p であり、ガラスビーズについてのみ、相手がガラス板ではあるが滑り摩擦係数を実測した。その値を仮定して引いた理

Fig. 5 Relation between height of cone and radius of inner cylinder

Fig. 6 Angle of repose in relation to θ for glassbeads

Fig. 7 Angle of repose in relation to θ for calcite

Fig. 8 Angle of repose in relation to θ for sand

論線が実験データのほぼ真ん中を通っていることは注目に値する。転がりの摩擦抵抗が滑りのそれと比較してどの程度小さいか不明だが、もし転がりが支配的ならばデータは理論線よりもかなり下にくるだろう。結果は転がりよりも滑りが支配的であることを示していると思われる。また、定性的には、実験の方が理論線の傾きよりいくらか急になっており、その大きな原因の1つとしては、現段階では安息面近傍の空間率を直接測定出来ず、底部内部円筒内のそれで近似したため精度を悪くしたことがあげられ、今後改善されるべき課題の一つである。

次に、**Figs. 7** および **8** に示したカルサイト、砂の結果について考察する。これらの粒子については、ガラスビーズのように μ_p を実測出来ず、安息角、空間率のデータから Eqs.(3), (5) および(8) を使い逆算して得たものの平均値(**Table 1**)を用い理論線を引いた。したがって、定性的のみの比較検討になるが、実験的には、ガラスビーズよりいくらか広い範囲の空間率での実測が得られ、より明瞭な傾向が示された。測定誤差による分散はあるものの、理論と実験の両者の傾向は比較的良好一致しており、全体的には、理論、実験とも改良されるべき点はあるものの、本解析方法の有用性は十分期待できるものと思われる。

次に粒子径の影響について、ガラスビーズ、カルサ

Fig. 9 Microscope photographs of calcite powder [(A) for 1.2mm and (B) for 0.43mm in diameter]

イトの実験で検討する。ガラスビーズについて、Table 1の μ_p の値から判断すると、粒径0.5mmの μ_p が他のものよりもいくらか大きく、粒径2および1mmの ϕ_r の実験値のみからの検討にとどめるが、狭い空間率の範囲ではあるものの、粒径による違いは見られない。一方、カルサイトでは多少粒径による違いが見られる($D_p=0.43$ mmでは $\mu_p=0.4813$ 、 $D_p=1.2$ mmでは $\mu_p=0.5519$)。ただし、この場合は両者で形状の違いがあるようで、それが直接の原因と思われる。Fig. 9が、我々の使用したカルサイト粒子の写真であり、粒径の大きい方(Fig. 9(A))には四角形に近い形をしたものが見え、粒径の小さい方(Fig. 9(B))はこの大きい方を粉砕したため、角が取れて丸みをおびたものがほとんどである。Fig. 7での μ_p の値は、丸みをおびた粒径の小さい粒子の方が小さく、角があるより丸い方が滑り安いと思う感覚と矛盾しない。

こうして粒子径の安息角におよぼす影響について検討を加えたが、非付着性粉体の安息角は、粒子表面状態および形状が同じ(μ_p が同じ)ならば、直接粒径に依存しないものと思われる。

なお、Figs. 10, 11および12に安息角の実験結果を空間率に対しプロットした。空間率の増加にともない安息角は減少している。

次に、内部摩擦角について検討を加える。種谷ら⁹⁾はリング式せん断法、綱川ら¹⁰⁾はプレス載荷法により

Fig. 10 Angle of repose in relation to void fraction for glassbeads

Fig. 11 Angle of repose in relation to void fraction for calcite

Fig. 12 Angle of repose in relation to void fraction for sand

ガラスビーズを使って内部摩擦角を測定しており、その結果を本理論で整理しプロットしたのが、Fig. 13である。実線は $\mu_p=0.1373$ (Table 1の実測値の平均値)を使ったときの理論結果である。実際の直線せん断試験では、せん断中にせん断面の充填状態の変化(ダイレイタンス¹¹⁾)があり、プロットにバラツキが生ずる一因になっているように思われる。データ数が少なく、十分な比較検討はできないが、少なくとも理論線はデータの間を通り、絶対値にそんなにくるいはなく、こ

Fig. 13 Angle of internal friction in relation to θ for glassbeads (GB-1,2 and 3 are from ref. 9 and GB-4 is from ref.10)

の内部摩擦角に対しても本理論の有用性は期待される。

5. 結 言

本解析では、安息角および内部摩擦角をせん断摩擦角として同一せん断モデル上で考え、せん断面での空間率に代表される充填状態に主眼をおき、その両者の関係を理論的に解析した。そして、安息角については、三次元排出法を用いて実測し、また内部摩擦角については、数少ないが過去の直接せん断法の実験を参照し、本理論の検証を行い、満足される結果を得た。

具体的には、非付着性均一粒径粒子群については、

安息角も内部摩擦角もせん断面での空間率と粒子表面の摩擦係数の関数として同一の式で表され、粒子表面状態が同じであれば、そこでの粒径には関係しないということを理論的実験的に確認した。

問題は粒子表面摩擦係数 μ_p で、粒子表面の形状の影響を含む物性値であるため、その推定が難しい。ガラスビーズのように表面がなめらかである粒子についてのみ、本報で用いたように同一材質の平板上での実測の可能性がある。実際の複雑な形状の粉体では、比較的簡便な安息角を空間率の関数 θ に対し測定し、傾き-1の本理論式から間接的にその粒子の μ_p を得る方法が代案として提案される。そうしてにおいて、実際の流動性または応力解析に必要な内部摩擦角の予測へと再度本理論式を利用すれば、もともと流動性の相対的評価のみに使用されていた安息角に対しても、その実用的な重要性が再確認され、本解析結果の有用性も理解されるものと思われる。

今後は、付着性の粉体のせん断現象を解析し、より一般的な形へと展開していくことが重要な課題であり、本報でのせん断モデルは十分適用可能と考えられる。

〔謝 辞〕 本研究では、清水晃氏（北大工学部応用化学科）の御協力を頂き、また日東粉化工業K.Kからのカルサイト試料の御提供をうけました。ここに謝意を表します。

Nomenclature

A_p : area of spherical triangle defined in Fig. 3 (B)	[m ²]	η : angle defined in Figs.1 and 2	[rad]
C : coordination number	[-]	θ : angle between two spheres B and C	[rad]
D : diameter of inner cylinder	[m]	μ_p : coefficient of friction of particle	[-]
D_p : particle diameter	[m]	ρ_p : density of particle	[kg m ⁻³]
F : shear force	[N]	ϕ : angle of shear friction	[rad]
H : height of cone reposed	[m]	ϕ_i : angle of internal friction	[rad]
W : vertical load	[N]	ϕ_r : angle of repose	[rad]
ϵ : void fraction of powder	[-]	ψ : inner angle of spherical triangle	[rad]

References

- 1) "Funtai - Bussei - Zusetsu" edited by The Society of Powder Technology, Japan and the Association of Powder Industry & Engineering, p.133 - 143 Nikkei - Gijutsu - Tosho (1985)
- 2) Aoki, R. : *Kagaku - Kogaku*, **25**, 199 (1961)
- 3) Otsubo, T. : *J. Res. Assoc. Powder Tech. Japan*, **1**, 97 (1964)
- 4) Kaneniwa, N. : *J. Res. Assoc. Powder Tech. Japan*, **7**, 187 (1970)
- 5) Shinohara, K. and T. Tanaka : *Kagaku - Kogaku*, **32**, 88 (1968)
- 6) Yokoyama, T. and K. Urayama : *J. Res. Assoc. Powder Tech. Japan*, **6**, 264 (1969)
- 7) Matsuoka, H. : *Soils and Foundations* (Japanese Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering) **14**, 29 (1974)
- 8) Ouchiya, N. and T. Tanaka : *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **19**, 338 (1980)
- 9) Taneya, S., S. Satoh and R. Aoki : *J. Res. Assoc. Powder Tech. Japan*, **11**, 199 (1974)
- 10) Tsunakawa, H. and R. Aoki : *J. Res. Assoc. Powder Tech. Japan*, **11**, 263 (1974)